

位相最適化手法を用いた  
構造形態創生に関する一連の研究

2019年9月

藤井大地

A Series of Studies on  
Computational Morphogenesis  
using Topology Optimization Method

September 2019

Daiji FUJII

Department of Architecture  
Faculty of Engineering, Kindai University  
739-2116 Japan

# 目次

|            |   |
|------------|---|
| 論文概要 ..... | 1 |
|------------|---|

|                   |    |
|-------------------|----|
| 研究業績（論文）リスト ..... | 10 |
|-------------------|----|

## 第1章 ボクセル有限要素法を用いた建築構造の形態創生

|  |    |
|--|----|
| 1-1 SLP法を用いたトポロジー最適化における数値的不安定の改善 .....            | 11 |
| 1-2 最適性規準法を用いた位相最適化におけるフィルタリング法 .....              | 19 |
| 1-3 CA-ESO法による構造物の位相最適化 .....                      | 27 |
| 1-4 CA-ESO法とボクセル有限要素法を用いた3次元構造物の位相最適化 .....        | 33 |
| 1-5 改良型ESO法を用いた3次元構造物の位相最適化 .....                  | 41 |
| 1-6 IESO法を用いた建築構造の形態創生 鉛直荷重と地震荷重に抵抗する建物の自然形態 ..... | 49 |
| 1-7 IESO法を用いた建築構造の形態創生 ファサードデザインへの応用 .....         | 57 |
| 1-8 IESO法を用いた連続体シェル構造の形態創生 .....                   | 65 |

## 第2章 グランドストラクチャ法を用いた建築構造の形態創生

|   |     |
|---|-----|
| 2-1 グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化 .....      | 73  |
| 2-2 最適化手法CONLINを用いた骨組構造の位相最適化 .....       | 81  |
| 2-3 グランドストラクチャ法による建築構造の形態創生 .....         | 89  |
| 2-4 ESO法とグランドストラクチャ法を用いた骨組構造物の位相最適化 ..... | 97  |
| 2-5 ESO法を用いた高層ビルの制振ダンパー構面配置の最適化 .....     | 105 |

## 第3章 位相最適化手法を用いた制振機構の形態創生

|   |     |
|---|-----|
| 3-1 均質化設計法を用いた弾性変形機構の位相最適化 .....            | 113 |
| 3-2 骨組の位相最適化手法を用いたリンク機構の創生 .....            | 121 |
| 3-3 連続体の位相最適化手法を用いた制震機構の創生 .....            | 127 |
| 3-4 HMPS法とIESO法を用いた有限変形を伴う弾性構造体の位相最適化 ..... | 135 |

## 論文概要

### 序文

本研究は、構造最適化手法の一つである位相最適化手法を建築構造および制振機構の形態創生に応用したものである。位相最適化手法には、大きくわけて、(A)連続体構造の位相最適化と(B)骨組構造の位相最適化がある。そして、連続体構造の位相最適化では、(A-1) 固定された設計領域の要素密度を最適化する方法と(A-2) 最適化の過程で設計領域を変化させる方法がある。また、骨組構造の位相最適化では、(B-1) 固定された設計領域（グラウンドストラクチャ）の要素密度を最適化する方法がある。以下では、本研究と関連するこれらの方法の発展の現況について概説する。

#### (A-1) 連続体構造の位相最適化—固定された設計領域の要素密度を最適化する方法

位相（トポロジー）最適化は、簡単に言えば、穴の数が変化する最適化問題で、形状最適化では、穴が1つの構造は、どのように形状が変化しても穴は一つであるが、位相最適化では、最適化の過程で穴の数が増えたり減ったりする。このような最適化問題は、数学的に解くことが最も難しい問題とされてきたが、1988年、Bendsøe and Kikuchi<sup>1)</sup>によってついにその突破口が開かれ、1991年のSuzuki and Kikuchi<sup>2)</sup>の論文で具体的な解析例が示されて以降飛躍的な発展を遂げた。菊池ら<sup>1,2)</sup>の方法は、穴の空いた連続体構造を均等格子メッシュで要素分割し、穴の部分の要素密度（要素の材料密度）を0、穴以外の要素密度を1とする問題に置き換え、密度0と1の微分不可能問題を、材料のマイクロ構造に穴を空けることでマクロ的に微分可能にして解くという画期的なものであった。また、菊池らは、材料のマイクロ構造に穴を空けて解析する方法として均質化法（Homogenization method）を用い、また、剛性最大化問題の目的関数としてコンプライアンス（仕事量）を用いることで感度解析を容易にした。さらに、市販のソフトウェア（Optishape）の開発も同時に進めたため後進の研究に大きな影響を及ぼした。なお、この方法は、均質化法を用いたことで、HDM (Homogenization Design Method)と呼ばれた。（なお、著者の論文では均質化設計法と呼んでいる）

また、1989年、Bendsøe<sup>3)</sup>は、密度の0と1の微分不可能問題は、均質化法を用いずとも、0と1の間の中間密度を許容し、中間密度にペナルティを与える連続関数（密度のべき乗関数など）を用いることで、数学的に解けることを示し、後に、この方法は要素分割を十分細かくすれば、HDMと同等の解が得られることが証明された。当初、この方法は密度法 (Density approach)と呼ばれたが、後に、SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法と呼ばれるようになった。これは、HDMでは、マイクロ構造の穴の大きさや方向を最適化する異方性材料を扱う問題であったのに対し、密度法では、マイクロ構造の穴の大きさのみを最適化する等方性材料を扱う問題に相当していたことによる。

しかし、SIMP法のみならず、HDMもマクロ的には0と1の間の中間密度（グレースケールと呼ぶ）を許容する方法であったため、特にせん断変形が大きい問題では、解形態に中間密度や密度0と1の要素がチェッカーボード状に並ぶ現象（チェッカーボード現象と呼ぶ）が頻繁に生じた。このため、このような問題を解決し、より鮮明でシンプルな解形態を得るための方法（フィルタリング (Filtering) 法と呼ぶ）が研究され、様々な方法が提案された<sup>4)</sup>。

また、1994年、Hollister and Kikuchi<sup>5)</sup>は、以上のような位相最適化手法の副産物として、均等格子メッシュを画像のピクセルと同レベルの細かさにすれば、どんな複雑な物体も容易にメッシングできるという発想から、メッシュフリー法の一つとしてボクセル有限要素法 (Voxel FEM)（voxelはpixelを3次元に拡張したVolume elementの略語）を提案した。この手法では、ピクセルの色の変化で様々な画像が表現できるのと同様に、固定された設計領域のボクセルの材料密度の有無で様々な物体形状を表現できる。しかも連立方程式の解法に反復法を用いることで大幅にメモリと計算時間を節約できる。（以下では固定設計領域を均等ボクセルで分割して解く方法をボクセル有限要素法と呼ぶ。）

その後、2003年には、上述のようなグレースケールやチェッカーボード現象の問題を根本的に解決し、しかもシンプルで滑らかな境界形状の解形態を得る方法として、構造に穴を空けるための関数（レベルセット関数）を別に用意し、その関数のパラメータを数学的に最適化することで解形態を得るレベルセット (Level set) 法<sup>6)</sup>が提案された。

一方、以上のように最適化問題を定式化して数学的に解く数値計画法に対して、要素密度の0と1を、生物の進化を模倣したアルゴリズムを用いて求める発見的手法も数多く提案された。しかしながら、このような問題の設計変数の数は要素数に比例して増大するため、なんらかの感度指標（目的関数の設計変数に関する微分に相当する指標）なしに、最適

解を見つけ出すことは困難であった。そこで、1993年、Xie and Steven<sup>7)</sup>は、剛性最大化問題の感度指標に応力を用い、応力解析を繰り返すことで、応力の小さい要素密度を徐々に0にしていく ESO (Evolutionary Structural Optimization) 法<sup>7)</sup>を提案した。この方法は、非常に単純なアルゴリズムにも関わらず、SIMP法と同等な解形態が得られたことで広く注目を集めた。後に、このESO法は、最適化の各ステップで要素の除去と付加を繰り返す BESO (Bi-directional ESO) 法<sup>8)</sup>に発展し、2007年、HuangとXie<sup>9)</sup>は、このBESO法をさらに改良し、SIMP法と同様に最適化問題を定式化し、目的関数(コンプライアンス)の設計変数に関する微分(要素ひずみエネルギー)を感度指標とし、さらにSIMP法と同様のフィルタリング法を用いることで、SIMP法とほぼ変わらない解形態を得ることに成功している。

#### (A-2) 連続体構造の位相最適化－最適化の過程で設計領域を変化させる方法

以上のようなボクセル有限要素法を用いた位相最適化手法は、建築分野においては、最近まであまり用いられてこなかった。これは、コンピュータの性能(計算速度、メモリ容量、グラフィック表示速度)が、十分に滑らかな境界形状を表現するだけのボクセル分割に追いつけなかったためである。また、シェル構造のような薄肉の構造をボクセルで表現しようとすれば、膨大な密度0の要素を解析に取り込むことになり、計算効率が悪化する。したがって、建築分野の位相最適化においては、境界内部のみを設計領域とし、これを三角形要素や四面体要素でメッシュ分割する方法が発展した。しかしながら、このような方法では、穴の数が増える度に再メッシュ分割が必要となり、自動メッシュ分割機能を備えた高度なプログラミング技術が必要とされた。

このような研究として最も大きな成果をあげたのが、2001年の大森と崔<sup>10)</sup>の 拡張 ESO (Extended ESO) 法による研究である。大森と崔が提案した方法は、有限要素法による応力解析によって応力等値線を求め、この応力等値線にしたがって、閾値以下の領域では穴を空け、閾値以上の領域では穴を埋める、そして穴を除く内部領域に対して再メッシュ分割を行い、さらに同様の過程を繰り返すというものであった。このような方法で得られた解形態は、応力等値線に沿っているため、境界形状が非常に滑らかでシンプルなものであった。その後、この方法は、2002年にシェル構造<sup>11)</sup>、2004年に3次元構造<sup>12)</sup>に拡張され、建築分野において位相最適化が大きな注目を集めるきっかけとなった。また、2004年に大森ら<sup>13)</sup>は、この方法を実際の建築物のファサードデザインに適用し、位相最適化手法を用いて設計された建築物を初めて世に出した。また、文献12)の共著者である佐々木睦朗<sup>13)</sup>は、建築家磯崎新と組んで、拡張 ESO 法による三次元解析によって形状決定されたフィレンツェ新駅コンペ案を発表し、これが世界中に大きなインパクトを与えた。

#### (B-1) 骨組構造の位相最適化－固定された設計領域(グラウンドストラクチャ)の要素密度を最適化する方法

以上のような連続体構造の位相最適化に対して、建築分野においては、骨組構造の位相最適化が幅広く研究された。このような骨組構造の位相最適化も、連続体構造の位相最適化と同時期(1989年以降)に大きな発展を遂げている。手法としては、与えられた節点配置に対して、節点間をすべての連結可能な線要素(骨組部材)で繋いだ骨組構造(グラウンドストラクチャと呼ぶ)を作成し、この構造から位相最適化手法によって最適な骨組形態(骨組部材の連結関係)を浮かび上がらせる グラウンドストラクチャ法 (Ground Structure Method) が用いられた。このような手法は、Rozvanyら<sup>15),16)</sup>によって確立され、位相最適化の方法としては、当初は密度法<sup>3)</sup>と同様の数理計画法にもとづく方法が用いられていたが、後に発見的手法<sup>17),18)</sup>を含めて様々な方法が提案されている。特に、トラス構造の位相最適化においては、2005年、高田ら<sup>19)</sup>が、複雑なグラウンドストラクチャから厳密な最適解を導く方法を提案し、最適解が複数存在することなどを明らかにしている。また、最近の研究としては、2015年の大崎ら<sup>20)</sup>の耐震補強格子ブロックへの応用や、2018年の木村、大崎ら<sup>21)</sup>の鋼構造骨組ブレース配置への応用などが挙げられる。

著者の研究業績は、以上の位相最適化手法の内、(A-1)のボクセル有限要素法にもとづく方法と(B-1)のグラウンドストラクチャ法にもとづく方法を建築分野の構造形態創生問題に応用したものである。以下では、本研究の成果とその意義について、第1章ボクセル有限要素法を用いた建築構造の形態創生、第2章グラウンドストラクチャ法を用いた建築構造の形態創生、第3章位相最適化手法を用いた制振機構の形態創生に分け、業績論文の概要とともに説明する。なお、11頁以降の一連の業績論文の内、Webで公開されているPDFが不鮮明なものは、2頁以降を、原著原稿をPDFに変換したものに入れ替えている。また、解析手法の省略表記(HDM等)の原形英文は、10頁の脚注にまとめている。

## 第1章 ボクセル有限要素法を用いた建築構造の形態創生

著者は、1998年3月から1年間、ミシガン大学の菊池昇教授のもとで研究を行う機会を得て、そこからボクセル有限要素法を用いた位相最適化に関する研究を始めた。当初は、菊池ら<sup>1,2)</sup>の研究を把握するために、論文に書かれている理論にもとづき独自のプログラムを作成し、そこから問題点を探究した。その結果、理論どおりにプログラムを作成しても、論文に掲載されている結果は容易には得られないことがわかった。これは、位相最適化問題は、初期値依存性が強い多峰性問題であるため、最適化問題の解法の違いや、最適化に関するパラメータの微妙な設定により、解形態が様々に変化するためである。さらに、グレースケールやチェッカーボード現象が頻繁に現れ、文献<sup>2)</sup>に示されるような明解な解形態はなかなか得られなかった。そこで、著者が最初に取り組んだのは、このようなグレースケールやチェッカーボード現象の問題を解決し、よりシンプルな解形態を得るためのフィルタリング法の開発である。

**研究業績 1-1 (1999年)** 本論文では、HDMを用いた位相最適化手法に対して、要素密度に比例した引力(重力)を導入するフィルタリング法を提案し、最適化問題の解法にSLP法を用いた場合の有効性を検証した。

**研究業績 1-2 (2001年)** 本論文では、1-1に提案したフィルタリング法について、最適化問題の解法にOC (Optimality Criterion) 法(最適性規準法)を用いた場合の有効性を検証した。また、位相最適化手法としてHDMを用いた場合とSIMP法を用いた場合を比較し、その違いを明らかにした。

その後、著者は、最適化問題の解法をOC法からCONLIN (Convex Linearization) 法に変更し、2002年にそれまでの研究成果をソースプログラム付き著書<sup>23)</sup>として出版した。【新しい学問分野の開拓】さらに、2008年にはこれを建築分野向けの専門書として再編し、学生にも理解しやすい著書<sup>24)</sup>として再出版している。【社会貢献】

以上のように、著者は、2007年頃までは、位相最適化の手法として最適化問題を数学的に解く数値計画法を用いてきた。しかし、それまで開発した手法を幾何学的非線形問題に拡張しようと考えた頃から数値計画法に限界を感じるようになった。この頃取り組んでいた研究が、粒子法を用いた位相最適化である。粒子法は、幾何学的非線形問題に関して非常にロバスト性があり、ボクセル有限要素法と同様のメッシュフリー法であるため、位相最適化への適用は容易であると思われた。しかしながら、当時の粒子法の解析精度は有限要素法に比較して低かったため、感度解析が容易ではなかった。そこで、著者と眞鍋<sup>25)</sup>は、感度解析を必要としない発見的手法を用いることを検討し、その成果を2009年の日本建築学会大会で発表した。ここで提案した手法は、各粒子に生じる応力を感度指標とし、最適化の各ステップで、閾値より低い応力を有する粒子は除去し、平均値より高い応力を有する粒子の周辺(ノイマン近傍)粒子を付加するというESO法とCA (Cellular Automaton) 法のアイディアを組み合わせたものであった。また、この除去の閾値には、大森ら<sup>11)</sup>の拡張ESO法に用いられていた閾値を採用した。その後、著者は、このCA法とESO法を組み合わせた方法を有限要素法に適用し、SIMP法と比較することでその有効性を検証する研究を行った。しかしながら、有限要素法に適用すると、要素除去に使用する閾値パラメータの微妙な設定で様々な解形態が得られ、SIMP法と比較しても、その利点は、グレースケールが生じないこと以外には見つからなかった。これは、有限変形を扱う粒子法では応力の差異が明確なのに対して、微小変形を扱う有限要素法では、応力がより均等化されるためと考えられた。そして、その後の様々な試行錯誤の中で、解形態の不安定さを引き起こす原因がCA法による要素付加にあることを突き止め、これがブレイクスルーとなって以下の研究業績につながった。

**研究業績 1-3 (2013年)** 本論文では、CA法とESO法を組み合わせた位相最適化手法としてCA-ESO法を提案し、2次元問題に対してその有効性を検証した。ここで、CA-ESO法とESO法<sup>7)</sup>の違いは、ESO法では与えられた除去率で要素除去(要素密度を0にすること)を行うのに対して、本手法では大森ら<sup>11)</sup>の拡張ESO法で提案された閾値[(感度指標の平均値) - (パラメータ $\eta$ ) × (感度指標の標準偏差)]を用いて除去を行う点にある。また、BESO法<sup>8)</sup>との違いは、本手法では、総密度が制約値以下になるまでは一方的に要素除去のみを行い、各ステップで要素の付加は行わない点にある。すなわち、CA法による要素付加は総密度が制約値以下になった場合にのみ行われ、そこから再びESOによる要素除去が行われる。本手法は、このような過程を繰り返すことで最適解を探索する方法であり、収束解はあくまでESO法

の除去過程から得られる。本論文の成果は、このような ESO 法にもとづく発見的手法で得られた解形態は、数理計画法にもとづく SIMP 法で得られた解形態と比較して、平行線のないより自然な形態（自然界に存在する人工的でない形態）になることを示した点にある（1-3 の図 11～13 参照）。（※建築意匠では自然への参照が重要視される。参考：『ルイス・カーン建築論集』（鹿島出版会）。このため、創生された形が自然界の形に近いことは重要であると考えられる。）

**研究業績 1-4（2014 年）** 本論文では、1-3 で提案した CA-ESO 法を 3 次元問題に拡張し、SIMP 法との比較によってその有効性を検証した。また、ここでは 8 節点アイソパラメトリック要素に比較してより精度の高い 8 節点応力仮定法要素を用いている。本論文の成果は、CA-ESO 法により、3 次元解析に対しても、SIMP 法に比較して力の流れがより明確な解形態が得られる点と、イタリアフィレンツェ新駅コンペ案の形状決定に用いられた解析例<sup>12)</sup>により、SIMP 法では、直線的な部材が各所に現れ、人工的な印象を与える解形態が得られるのに対し、CA-ESO 法では、樹木の根のようなより自然な（人工的でない）解形態が得られることを示した点にある（1-4 の図 14 参照）。

しかしながら、以上の手法にはいくつかの弱点があった。一つは、感度指標に正式な感度（コンプライアンスの要素密度に関する微分）ではなく、Von Mises 応力を用いている点である。もう一つは、解析対象ごとに事前解析を行い、閾値パラメータ  $\eta$  の値を調整しなければならない点である。感度指標に応力を用いている理由は、正式な感度では、感度分布が平滑化されて、閾値パラメータ  $\eta$  の微妙な変化で大きく解形態が変化するためである。実際、感度指標に応力を用いれば、 $\eta$  を 0～1 まで、0.1 刻み程度で探せば最適な値を見つけられるが、感度指標が要素ひずみエネルギーの場合、0.01 以上で刻まなければ最適な  $\eta$  を見つけることができない。このような弱点を克服したのが以下の研究業績である。

**研究業績 1-5（2016 年）** 本論文では、1-3、1-4 で提案した CA-ESO 法を発展させ、感度指標としてコンプライアンスの正式な感度である要素ひずみエネルギーを用いた改良型 ESO (Improved ESO) 法（略称 IESO 法）を提案した。本論文では、閾値パラメータ  $\eta$  の微妙な変化で大きく解形態が変化する問題を、閾値パラメータ  $\eta$  の調整をプログラム内で自動的に行うというアイデアで解決している。すなわち、この改良手法では、最適化の各ステップの除去要素数を与え、この除去要素数に近くなるような閾値パラメータ  $\eta$  をプログラム内で自動的に探索させる。やり方としては、まず、0.1 刻みで探し、次に 0.01 刻みで探し、最終的に 0.001 刻みで探すという原始的なやり方を用いている。また、この各ステップの除去要素数は、入力データとして除去率（例えば 0.05 など）を与え、（前ステップの残存要素数）×（除去率）で計算する。このため、実際の除去要素数は、ステップが進むごとに少なくなる。また、よりシンプルな解形態を求める方法として、BESO 法<sup>9)</sup>で用いられているフィルタリング法を採用している。この方法では、まずチェッカーボード現象を防ぐために要素感度を節点感度に変換し、さらに要素中心から影響半径以内の節点感度の重み付き平均によって要素感度を計算する。これによって、影響半径を大きくすれば、感度が平滑化され、よりシンプルな解形態が得られる。本手法は、以上の点を改良しただけの手法であるが、意外にも画期的な成果をもたらした。それは、どのような総密度制約に対しても、適当な除去率と影響半径を与えるだけで、ほぼ確実に明確な解形態が得られるようになった点である。これは、BESO 法<sup>9)</sup>や SIMP 法にもない特徴と言える。

以上の IESO 法は、20 ステップ程度で収束する非常に計算効率の良い手法であるが、得られた収束解が CA-ESO 法の解に比較してやや荒削りに見えることと、CA-ESO 法、SIMP 法と比較して、収束解のコンプライアンスがやや高い値となることが課題として残った。これらの点についてさらに改良を加えたのが以下の研究業績である。

**研究業績 1-6（2017 年）** 本論文では、1-5 で提案した IESO 法の解形態をより鮮明にし、コンプライアンスも改善する CA 法と IESO 法を組み合わせた仕上アルゴリズムを提案した。この仕上アルゴリズムは、IESO 法で得られた解形態に対して、CA 法で要素を付加し、除去率をより小さく設定した IESO 法で細かく削るという過程を何回か繰り返すもので、これにより、著者らが目指していたより鮮明でコンプライアンスも低い解形態が得られるようになった。また、本論文から市販の VOXELCON というソフトウェアをプリプロセッサとして利用できるようにしたため、境界条件、荷重条件、空間条件などが容易に設定できるようになった。本論文では、これにより他の研究でも示されていなかった地震力を考慮した 3 次元建築構造の形態創生例を初めて示すことができた（1-6 の図 10～図 18 等参照）。

そして、以下の研究は、1-5、1-6の提案手法（IESO法+仕上アルゴリズム）を建築物のファサードデザインおよび連続体シェル構造の形態創生に応用したものである。

**研究業績 1-7（2017年）** 本論文では、1-5、1-6の提案手法（IESO法+仕上アルゴリズム）を建築物のファサードデザインに応用している。本論文では、四角いビルで囲まれた都会に、いきなり有機的（人工的でない）デザインの建築物を建設しても違和感を持たれるのではないかとということで、デザインに何らかの人工的要素を付加することを提案している。また、有機的デザイン建築は、現状の生産技術では、型枠コストなどの増大を招くため、ここでは、提案手法をプレファブ壁式構造建築物のユニット壁のデザインに用いることを試みている。そして、本論文では、人工的要素として、設計変数（要素密度）に対称性や連続性などの条件を加えることを提案し、様々なユニット壁のデザインを創生できることを示した（1-7の Fig5～Fig.8 参照）。また、意匠系の学生の協力を得て、都会の中にこのようなファサードデザインのビルが建築された場合の背景とのマッチングを検証した（1-7の Fig9～Fig.16 参照）。

**研究業績 1-8（2018年）** 本論文では、1-5、1-6の提案手法（IESO法+仕上アルゴリズム）を連続体シェル構造の形態創生に応用している。著者にとって、ボクセル有限要素法によって、シェル構造の形態創生を行うことは積年の課題であった。壁となっていたのは、シェル厚が薄くなるほど詳細なボクセル分割が必要になる点と、シェルの形態の変化に伴って荷重の作用点が変わる点にあった。前者の問題は、パソコンの性能の飛躍的な向上と、VOXELCON という強力なプリプロセッサの導入により解決された。そして、後者の問題に対しては、本論文では、雪荷重などのシェル表面に加わる積載荷重の評価をあらかじめ、シェルの自重と地震による慣性力のみを評価することで解決を図った。すなわち、本方法では、すべてのボクセルに均等な重力と地震慣性力を与え、これによってシェルの構造形態を創生している。本手法は、シェルの形状と厚さと位相を同時に最適化できるため、これまでにない新しい連続体シェル構造の形態創生法として、今後の発展が期待できる。

以上の研究業績 1-3～1-8 の成果は、本研究で提案した位相最適化手法が、学生が図 1、図 2 に示されるような設計デザインコンペ案を作成できるまでに性能が高められた点と、本研究で開発したプログラムが建築分野向けのソフトウェアとして市販ソフト VOXELCON に組み込まれる予定になっており、実用化への道が開けた点にある。【実用的価値】



図 1 IESO 法による建築構造の形態創生作品 <sup>26)</sup>

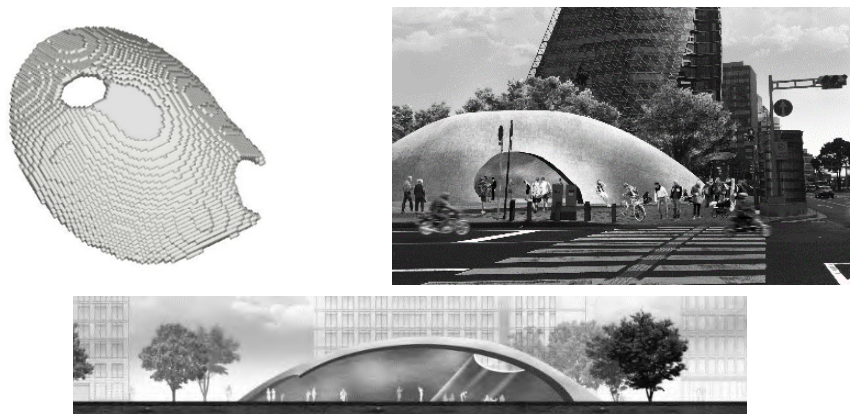


図 2 IESO 法によるシェル構造の形態創生作品 <sup>27)</sup>



## 第2章 グランドストラクチャ法を用いた建築構造の形態創生

第1章のボクセル有限要素法を用いた構造形態創生法は、コンピュータの計算速度と記憶容量、それにグラフィック性能の向上、さらには3Dプリンタの普及により、最近になって注目され、ソフトウェアとしての実用化の目処が立ったが、以前は意匠設計者が注目するような魅力的な構造形態を創生することはできなかった。このため、著者は、ボクセル有限要素法を用いる手法と平行して、グランドストラクチャ法を用いる構造形態創生法の開発を行った。この方法は、線要素を用いる骨組構造をベースとしているため、ボクセル有限要素法に比較して圧倒的に少ない要素数で構造形態創生が可能であり、また建築構造は伝統的に骨組として扱われることが多いため、建築構造の形態創生法としては、この方法の方が実用化への早道と思われた。

このようなグランドストラクチャ法に関する著者の研究は、以下の2編の研究から始まる。

**研究業績 2-1 (2000年)** 本論文では、建築骨組構造の形態創生法として、位相最適化問題の解法に SLP 法を用いるグランドストラクチャ法を提案した。そして、連続体の位相最適化手法である HDM の解析結果との比較により、このような方法でも連続体と同様の構造形態創生が可能であることを示した。また、本論文に示す手法の特徴は、グランドストラクチャを形成する骨組接合部を剛接からピン接まで連続的に扱える半剛接としている点にある。

**研究業績 2-2 (2001年)** 本論文では、2-1 で提案した手法における位相最適化問題の解法に CONLIN 法を用いることを提案し、その有効性を検討した。この CONLIN 法に関しては、日本ではまだまだ適用例がなかったため、本論文では、CONLIN 法による最適化問題の解法を概説し、著者がそれまでに用いていた SLP 法や OC 法との比較によりその性能評価を行っている。そして、CONLIN 法の収束性は、SLP 法や OC 法に比較して優れていることをコート掛け問題や橋梁構造の形態創生問題で検証した。

その後、2005年に高田ら<sup>19)</sup>が、トラス構造のグランドストラクチャから厳密な最適解を導く方法を提案したことを受けて、著者らが2-2で提案した方法と同様の厳密解が求まるかどうかを検討した。その結果、グランドストラクチャの要素数が増えると、高田らの示した厳密解が容易には求まらないことがわかり、以下にその解決法を提案した。

**研究業績 2-3 (2008年)** 本論文では、グランドストラクチャの節点数が増えて要素数が増大すると、一般的な最適化計算アルゴリズムでは局所解に収束しグローバルな最適解を得ることが困難であることを示し、2-2 で提案したグランドストラクチャ法の最適化計算アルゴリズムの改良手法を提案した。本論文の提案手法は、最適化計算で得られた収束解を再度初期値として最適化計算を繰り返すもので、このような再計算を繰り返すことで、高田ら<sup>19)</sup>が求めたトラス構造の厳密解が求まることを示した。また、本論文では、提案手法を用いて様々な建築構造のファサードデザインが創生できることを示している (2-3 の図 18~22 参照)。

以上の 2-1~2-3 研究成果は、2002年と2008年に出版したソースプログラム付き著書<sup>23,24)</sup>に反映されている。また、2-2 で開発した CONLIN 法のプログラムは市販のソフトウェアにも組み込まれた。【新しい学問分野の開拓、社会貢献】

その後、1-3~1-8の研究により、発見的手法である ESO 法にもとづく方法が数理計画法に劣らない解を導くことがわかったため、これをグランドストラクチャ法に応用することを考えた。ただし、要素密度を段階的に変化させるグランドストラクチャ法は、すでに2000年に ESO 法を適用した論文<sup>28)</sup>が発表されていたため、著者らは、単純に感度指標の小さい要素から1本ずつ除去する方法を検討した。その成果をまとめたのが以下の研究業績である。

**研究業績 2-4 (2016年)** 本論文では、グランドストラクチャ法において、要素ひずみエネルギー密度の最も小さい要素から順に除去する ESO 法を提案した。そして、トラス構造の最適化問題では、2-3 の数理計画法を用いた手法による解と一致するか類似する解が得られ、骨組構面の耐震ブレースの最適配置問題ではブレースの断面積を均一にして比較すると、むしろ提案手法の方が2-3 の数理計画法の解よりも剛性の高い解が得られることを示した。また、本論文では、骨組構面の形態創生例も示し、ファサードデザインへの応用の可能性も示した。

研究業績 2-5 (2017 年) 本論文では、2-4 の提案手法を高層ビルの制振ダンパーの最適配置問題に応用した。制振ダンパーの最適配置は、建築物の動的特性に影響を受けるため、特に層間設置型のダンパー配置に関しては、その配置計画は非常に難しいものとなっていた。また、動的問題では、正確な感度を求めることが難しいことも、最適化手法の実用化に向けての壁になっていた。これに対して、ESO 法は、正確な感度を用いなくても、最適解ないしはその近傍の優良解が得られるため、非常に実用的と言える。そこで、本論文では、層間設置型のオイルダンパーをダッシュポットに置き換え、各ダッシュポットの累積減衰エネルギーを感度指標として、累積減衰エネルギーの小さいダッシュポットから順に除去するという非常に単純な方法でダンパーの最適配置を求める方法を提案した。本論文では、本手法は目的関数が明確でないため最適解の保証は無いが、一般によく用いられる配置計画に比較して、最大変位、最大層間変位、最大層間速度を概ね低減できる優良解が得られることを示した。

以上の 2-4、2-5 の研究成果としては、提案手法は、実務設計における耐震ブレースや制振ダンパーの配置計画等に容易に適用できるという点と、図 3 (2-5 の図 17, 図 18 から引用) に示すように、第 1 章の連続体の位相最適化手法と同様に建築構造デザインに応用が可能という点が挙げられ、今後の発展が期待できる。**【実用的価値と波及効果】**

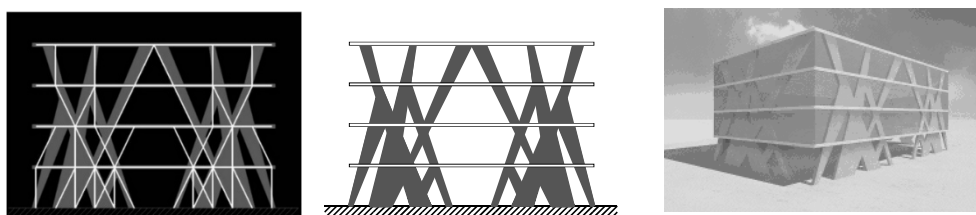


図 3 ESO 法を用いたグラウンドストラクチャ法にもとづくファサードデザイン例<sup>2-4</sup>

### 第 3 章 位相最適化手法を用いた制振機構の形態創生

以上のような位相最適化手法は、振動問題をはじめ様々な最適化問題に応用されているが、建築分野においては、剛性最大化問題以外の適用例はほとんど見られない。そこで著者らは、1997, 1998 年に西脇ら<sup>30),31)</sup>によって提案されたコンプライアントメカニズム(弾性変形機構)の位相最適化手法が建築物の制振機構の開発に応用できないかと考え、一連の研究を行っている。なお、このようなコンプライアントメカニズムの位相最適化に関する研究は、西脇らの研究を端緒に発展を遂げ、最近では、2008 年にレベルセット法の適用<sup>32)</sup>、2014 年に BESO 法の適用<sup>33)</sup>が提案され、より明確な形態が求められるようになってきている。一方、著者らの研究は、以下の論文から始まっている。

研究業績 3-1 (2000 年) 本論文では、位相最適化手法に HDM、最適化問題の解法に SLP 法、フィルタリング法に著者らが 1-1 で提案した手法を用いてコンプライアントメカニズムを創生する手法を提案した。本論文で提案している手法の特徴は、入力点と出力点の相対変位を大きくする構造形態が求められることで、これまでの手法では求めることが難しかった例題の解形態を求めることに成功している (3-1 の図 7~12 参照)。

次に、3-1 で提案した手法では、小さな入力変位で大きな出力変位を生じさせるメカニズム(機構)を創生できるため、当時、注目されていたトグル制振装置のような新しい形の制振機構が創生できないかと考え、以下の研究を行った。

研究業績 3-2 (2005 年) 本論文では、トグル制振装置のような入力変位を増幅させる制振機構(リンク機構)の形態創生を目的として、グラウンドストラクチャ法を用いた制振機構の形態創生法を提案した。このような最適化問題は、初期値依存の激しい多峰性問題となるため、本論文では、初期値の生成法として、エリート戦略的な方法と GA (Genetic Algorithm) を用いる方法の 2 種類を提案し、その有効性を検証している。

研究業績 3-3 (2007 年) 本論文では、ボクセル有限要素法を用いた制振機構の形態創生法を提案した。ただし、位相最適化手法には SIMP 法、最適化問題の解法には SLP 法、フィルタリング法には著者らが 1-1 で提案した手法を用いている。また、本論文では、初期値の生成法として、エリート戦略と SA (Simulated Annealing) 法を組み合わせた方法を

用いることを提案し、その有効性を検証している。

以上のような方法で、ラーメンの変位を増幅させる様々なメカニズムを創生できることは示したが、リンクの数が増えると製造コストが増大するため、今のところトグル制振装置を超えるような新しい装置の開発には結びついていない。また、以上で提案した手法では、微小変形理論にもとづく有限要素法を用いていたため、実際に模型を製作すると予想した動きが拘束される場合があり、有限変形が考慮できる解析法への拡張が課題となった。そこで、2007年から長年にわたって取り組んだのが、有限要素法の代わりに粒子法を用いる位相最適化手法の開発である。本研究は、2009年に眞鍋の修士論文として一応の成果<sup>25)</sup>を得て、その後、2011年に眞鍋、西脇ら<sup>34)</sup>によって、レベルセット法を用いた位相最適化手法に適用されたが、建築分野への応用は未だ実現できていない。そこで、2017年から眞鍋との共同研究を再開し、有限要素法の代わりに粒子法を用いた有限変形を考慮できる位相最適化手法の開発をめざした。その成果が、以下の研究業績である。

**研究業績 3-4 (2019年)** 本論文では、応力解析に粒子法を用い、位相最適化に (IESO 法+仕上アルゴリズム) を用いた有限変形を考慮できる位相最適化手法を提案した。本論文では、粒子法として、3次元問題への拡張が容易で、応力や変位の解析精度にも定評がある Hamiltonian MPS (Moving Particle Semi-implicit) 法 (HMPS 法) を用い、これにより、これまでほとんど前例がない、有限変形を考慮した3次元構造の形態創生例を示した。また、(IESO 法+仕上アルゴリズム) を用いることで、レベルセット法に劣らない明確な解形態が得られることを示した。

3-4の研究は、未だ発展途上であるが、すでに、HMPS法とIESO法を用いる方法で、図4に示すようなコンプライアントメカニズムの創生が可能であることを確かめている<sup>35)</sup>。今後は、これを新しい形の制振機構の開発につなげて行ければと考えている。【新しい学問分野の開拓、今後の発展】

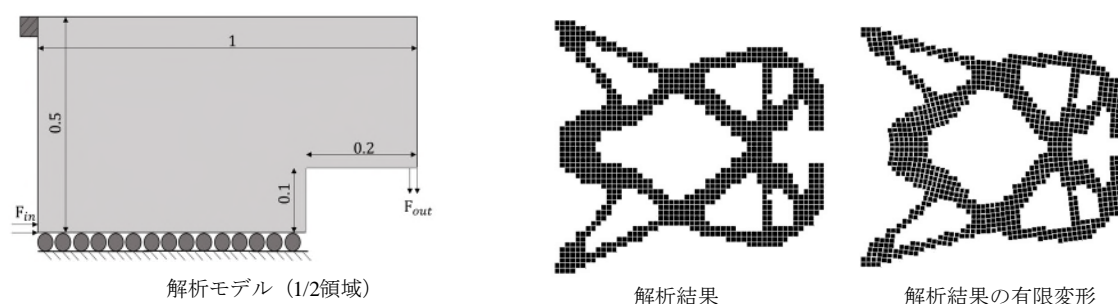


図4 HMPS法とIESO法を用いたコンプライアントメカニズムの創生例<sup>35)</sup>

## まとめ

本研究の第1章と第2章では、位相最適化手法を建築構造の形態創生に応用し、第3章では、制振機構の形態創生に応用する研究を行った。そして、第1章で行った研究は、提案手法によるプログラムが市販のソフトウェアに組み込まれるところまで発展させることができた。第2章で行った研究は、まだ実務の設計に活用されるまでには到っていないが、ESO法を用いた手法は、既存の汎用ソフト等にも容易に組み込めるため、今後の発展が期待できる。第3章で行った研究は、未だ発展途上ではあるが、免震層に設置する新しい形の制振装置の開発等につなげて行きたいと考えている。

## 謝辞

著者が、位相最適化手法に興味を持ったきっかけは、このような手法によってアントニ・ガウディのような有機的な建築物を創生できないかというものであった。20年以上の研究と、コンピュータの発達、それに3Dプリンタの普及により、それも少し現実に近づいてきた。これは偏に1998年にこのような研究テーマを与えていただいた菊池昇教授の先見の明である。また、その後の研究では、大森博司教授の研究に大いに刺激を受け、貴重な助言も頂いた。また、本研究は、著者の研究室で修士論文を作成した学生達の努力の結晶でもある。ここに記して深く感謝する。

## 参考文献

- 1) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi : Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 2) K. Suzuki and N. Kikuchi : A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 3) M. P. Bendsøe : Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, Vol.1, pp.193-202, 1989
- 4) O. Sigmund and J. Petersson : Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, *Structural Optimization*, Vol.16, pp.68-75, 1998
- 5) S. J. Hollister and N. Kikuchi : Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, *Biotechnology and Bioengineering*, 43, No.7, pp.586-596, 1994
- 6) M. Y. Wang, X. Wang and D. Guo : A Level Set Method for Structural Topology Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No.1-2, pp.227-246, 2003
- 7) Y. M. Xie and G. P. Steven : A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Computers and Structures* Vol.49, pp.885-886, 1993
- 8) V. Young, O. M. Querin, G. P. Steven and Y. M. Xie : 3D and Multiple Load Case Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization (BESO), *Structural Optimization*, Vol.18, pp.183-192, 1999
- 9) X. Huang, Y. M. Xie : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.43, pp.1039-1049, 2007
- 10) 大森博司, 崔昌禹 : 等値線を利用した拡張 ESO 法による構造形態の創生, *日本建築学会構造系論文集*, 第 539 号, pp.87-94, 2001.1
- 11) 大森博司, 崔昌禹 : 拡張 ESO 法による構造形態の創生—多目的適応型構造とシェル構造への適用—, *日本建築学会構造系論文集*, 第 552 号, pp.109-116, 2002.2
- 12) 崔昌禹, 大森博司, 佐々木睦朗 : 拡張 ESO 法による構造形態の創生—三次元構造への拡張—, *日本建築学会構造系論文集*, 第 576 号, pp.79-86, 2004.2
- 13) 大森博司, 風袋宏幸他 : 構造形態創生法によるオフィスビルの設計, *日本建築学会, 技術報告集*, 第 20 号, pp.77-82, 2004.12
- 14) 佐々木睦朗著 : FLUX STRUCTURE, TOTO 出版, 2005
- 15) G.I.N. Rozvany : *Structural Design via optimality Criteria*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- 16) G.I.N. Rozvany (ed.) : *Topology Optimization in Structural Mechanics*, CISM Courses and Lectures 374, Springer, 1997
- 17) 河村拓昌, 大森博司 : 遺伝的アルゴリズムによる立体トラス構造物の形態創生, *日本建築学会構造系論文集*, 第 538 号, pp.115-121, 2000.12
- 18) 河村拓昌, 大森博司 : 遺伝的アルゴリズムによる接合状態を考慮した離散的構造物の形態創生, *日本建築学会構造系論文集*, 第 555 号, pp.121-128, 2002.5
- 19) 高田豊文, 松岡貴士 : 体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジー最適化問題への線形計画法の適用, *日本建築学会構造系論文集*, 第 598 号, pp.87-91, 2005.12
- 20) 見上知広, 大崎 純, 福島功太郎 : 建築骨組の耐震補強格子ブロックの形状最適化, *日本建築学会構造系論文集*, 第 80 巻, 第 715 号, pp.1427-1434, 2015.9
- 21) 木村俊明, 大崎 純, 岡崎 稜 : 鋼構造骨組ブレース配置と柱・梁断面の同時最適化, *日本建築学会構造系論文集*, 第 83 巻, 第 752 号, pp.1445-1554, 2018.10
- 22) 藤井大地, 藤谷義信 : 薄肉はり置換法による高層ビルの形状および剛性分布の最適化に関する研究, *日本建築学会構造系論文集*, Vol.63, No.510, pp.99-106, 1998.8
- 23) 藤井大地著 : 「パソコンで解く構造デザイン」, 丸善, 2002
- 24) 藤井大地著 : 「建築デザインと最適構造」, 丸善, 2008.10
- 25) 真鍋匡利, 藤井大地 : 粒子法を用いた発見的手法に基づく有限変形を伴う弾性体のトポロジー最適化, *日本建築学会大会学術講演梗概集(東北) 構造 I*, pp.349-350, 2009.8
- 26) 渡部桃子, 谷川大輔, 藤井大地 : IESO 法を用いた建築構造デザインの創生, *日本建築学会中国支部研究報告集*, Vol.41, p.226, 2018.3
- 27) 上村絢一, 松本慎也, 小野聡子, 藤井大地 : IESO 法を用いた形態創生手法のシェル構造デザインへの応用, *コロキウム構造形態の解析と創生 2018*, pp.71-76, 2018.10
- 28) Steven, G. P., Querin, O. M., Xie, Y. M. : Evolutionary structural optimisation (ESO) for combined topology and size optimisation of discrete structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.188, pp.743-754, 2000
- 29) 高坂憲治, 藤井大地 : ESO 法とグランドストラクチャ法を用いた骨組構造物の位相最適化, *コロキウム構造形態の解析と創生 2014*, pp.69-74, 2014.11
- 30) 西脇眞二, Mary. I. Frecher, S. Min, 菊池昇 : 柔軟性を考慮した構造の最適化 (第 1 報 定式化とコンプライアントメカニズムへの応用), *日本機械学会論文集 (C 編)*, Vol.63, No.612, pp.81-88, 1997.8
- 31) S. Nichiwaki : Optimum structural topology design considering flexibility, Ph.D Thesis, Mechanical Engineering in The University of Michigan, 1998
- 32) 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井浩, 吉村允孝 : レベルセット法に基づくコンプライアントメカニズムの構造最適化, *Transactions of JSCES, Paper No.20080001*, 2008.1
- 33) Y. Li, X. Huang, Y. M. Xie, S. W. Zhou : Evolutionary topology optimization of hinge-free compliant mechanisms, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.86, pp.69-75, 2014
- 34) 真鍋匡利, 山田崇恭, 泉井一浩, 西脇眞二 : 粒子法を用いたレベルセット法による形状表現に基づくトポロジー最適化, *日本機械学会論文集 (A 編)*, 77 巻 784 号, pp.2054-2066, 2011.12
- 35) 大坪悠登, 山下真輝, 藤井大地 : HMPS 法と IESO 法を用いたコンプライアントメカニズムのトポロジー最適化, *日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸) 構造 I*, p.20458, 2019.9

## 研究業績（論文）リスト

### 第1章 ボクセル有限要素法を用いた建築構造の形態創生

- 1-1 藤井大地, 菊池昇: SLP 法を用いたトポロジー最適化における数値的不安定の改善, 日本建築学会構造系論文集, Vol.64, No.521, pp.65-72, 1999.7
- 1-2 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣: 最適性規準法を用いた位相最適化におけるフィルタリング法, 日本建築学会構造系論文集, Vol.66, No.543, pp.105-112, 2001.5
- 1-3 藤井大地, 真鍋匡利: CA-ESO 法による構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.78, No.691, pp.1569-1574, 2013.9
- 1-4 藤井大地, 岡部 諒, 真鍋匡利: CA-ESO 法とボクセル有限要素法を用いた 3 次元構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.79, No.703, pp.1279-1286, 2014.9
- 1-5 新内洋平, 松本慎也, 藤井大地: 改良型 ESO 法を用いた 3 次元構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.81, No.723, pp.851-858, 2016.5
- 1-6 新内洋平, 松本慎也, 藤井大地: IESO 法を用いた建築構造の形態創生 鉛直荷重と地震荷重に抵抗する建物の自然形態, 日本建築学会構造系論文集, Vol.82, No.731, pp.97-103, 2017.1
- 1-7 丸山瑞樹, 松本慎也, 藤井大地: IESO 法を用いた建築構造の形態創生 ファサードデザインへの応用, 日本建築学会構造系論文集, Vol.82, No.739, pp.1383-1389, 2017.9
- 1-8 上村紘一, 真鍋匡利, 松本慎也, 藤井大地: IESO 法を用いた連続体シェル構造の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, Vol.83, No.745, pp.459-465, 2018.3

### 第2章 グランドストラクチャ法を用いた建築構造の形態創生

- 2-1 藤井大地, 松本慎也, 藤谷義信, 菊池昇: グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化, 日本建築学会構造工学論文集, Vol.46B, pp.1-8, 2000.3
- 2-2 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣: 最適化手法 CONLIN を用いた骨組構造の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.66, No.548, pp.59-66, 2001.10
- 2-3 藤井大地, 真鍋匡利, 高田豊文: グランドストラクチャ法による建築構造の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, Vol.73, No.633, pp.1967-1973, 2008.11
- 2-4 高坂憲治, 松本慎也, 藤井大地: ESO 法とグランドストラクチャ法を用いた骨組構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.81, No.721, pp.547-553, 2016.3
- 2-5 野村将貴, 松本慎也, 崎野良比呂, 藤井大地: ESO 法を用いた高層ビルの制振ダンパー構面配置の最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.82, No.742, pp.1885-1892, 2017.12

### 第3章 位相最適化手法を用いた制振機構の形態創生

- 3-1 藤井大地, 江島晋, 菊池昇: 均質化設計法を用いた弾性変形機構の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.65, No.528, pp.99-105, 2000.2
- 3-2 藤井大地, 原田卓哉, 平田裕一: 骨組の位相最適化手法を用いたリンク機構の創生, 日本建築学会構造系論文集, Vol.70, No.597, pp.63-68, 2005.11
- 3-3 藤井大地, 谷澤 毅: 連続体の位相最適化手法を用いた制震機構の創生, 日本建築学会構造系論文集, Vol.72, No.619, pp.73-79, 2007.9
- 3-4 藤井大地, 山下真輝, 真鍋匡利: HMPS 法と IESO 法を用いた有限変形を伴う弾性構造体の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.84, No.764, 2019.10 (掲載決定)

---

#### 【脚注：解析手法の省略表記の原形英文】

|        |  |        |                                 |
|--------|--|--------|---------------------------------|
| HDM    | : Homogenization method                      | CONLIN | : Convex Linearization          |
| SIMP   | : Solid Isotropic Material with Penalization | GA     | : Genetic Algorithm             |
| ESO    | : Evolutionary Structural Optimization       | SA     | : Simulated Annealing           |
| BESO   | : Bi-directional ESO                         | MPS    | : Moving Particle Semi-implicit |
| 拡張 ESO | : Extended ESO                               | HMPS   | : Hamiltonian MPS               |
| IESO   | : Improved ESO                               |        |                                 |
| CA     | : Cellular Automaton                         |        |                                 |
| OC     | : Optimality Criterion                       |        |                                 |
| SLP    | : Sequential Linear Programming              |        |                                 |

# 第 1 章

## ボクセル有限要素法を用いた 建築構造の形態創生

研究業績（論文）

# SLP法を用いたトポロジー最適化における数値的不安定の改善

## IMPROVEMENT OF NUMERICAL INSTABILITIES IN THE TOPOLOGY OPTIMIZATION USING SLP METHOD

藤井大地\*, 菊池 昇\*\*

*Daiji FUJII and Noboru KIKUCHI*

In this paper, we present a method for preventing numerical instabilities such as checkerboards, mesh-dependence and local minima occurring in topology optimization in which SLP method is used as optimizer. The method presented here is that a function based on the concept of gravity (we named "gravity control function") is added to the objective function with a weight. The distribution of density of the topology is concentrated by maximizing this function, and as a result, checkerboards and intermediate densities are eliminated. Some techniques are introduced in the optimization procedure for preventing the local minima. The homogenization design method is used to obtain the optimum topology. The validity of the present method is demonstrated by numerical examples of the short cantilever beam and the MBB beam.

**Keywords:** Homogenization method, Topology optimization, Numerical instabilities, Sequential linear programming method  
Two dimensional structure, Finite element method

均質化法, 位相最適化, 数値的不安定, 逐次線形計画法, 2次元構造物, 有限要素法

### 1. はじめに

連続体構造物のトポロジー最適化は, 1988年に Bendsoe and Kikuchi<sup>1)</sup>の論文が発表されて以来目覚ましい発展を遂げ, 様々な工学問題に適用されてきた。特に, 静的構造物の剛性最大化問題に関しては, 2次元構造物のみならず3次元構造物にも多くの適用例が示され<sup>2),3),4)</sup>, 最近では非線形問題への適用が試みられている<sup>5),6)</sup>。しかしながら, このようなトポロジー最適化には, 収束性(局所最小値への収束), チェッカーボード(要素の密度分布がチェッカーフラッグのようになる現象), メッシュ依存性等の様々な数値計算上の問題があり, より正確で安定したトポロジーを求めることは未だに容易ではない。このため, このような数値的不安定を解決するためのいくつかの方法が提案されており, Sigmund and Petersson<sup>7)</sup>は, これらの研究のレビューを行っている。

ところで, 連続体構造物のトポロジー最適化では, これまで最適化問題の解法として最適規準法(Optimality criteria method)が主に用いられてきた<sup>1),8),9)</sup>。1991年の Suzuki and Kikuchi<sup>8)</sup>の論文では, この方法を用いた均質化法トポロジー最適化で, 多少のチェッカーボードは見られるものの, メッシュ依存性の小さい精度の高いトポロジーを得ることに成功している。しかし, 最近適用される問題が複雑になるにしたがって, 最適規準法の代わりに数理計画法にもとづく直接解法(SLP, SQP)が用いられるようになって

きた<sup>10),11),12),13),14)</sup>。これは, 最適規準法では, 目的関数が凸関数である必要があることや, 制約条件の扱いが, 数理計画法に比較して複雑になるためである<sup>15)</sup>。しかしながら, 数理計画法にもとづく手法で, Suzuki and Kikuchi<sup>8)</sup>が示したトポロジーを再現することは意外に難しい。これは, トポロジー最適化問題の目的関数(平均コンプライアンス)が, 最適解の近傍で非常にフラットになっている場合が多く, 局所最小値(local minima)に陥りやすいことに起因している<sup>7)</sup>。また, 最近では, 均質化法を用いる代わりに要素密度を設計変数とする SIMP (Simple Isotropic Material with Penalization) アプローチ<sup>9)</sup>(あるいは, Density Method)と呼ばれる方法が多く用いられているが, この方法においても Suzuki and Kikuchi<sup>8)</sup>が示したトポロジーを再現することは難しいことが指摘されている(Density Methodでは45度方向の線が現れやすい)<sup>15)</sup>。

本論文の目的は, 数理計画法の中で最もよく用いられる SLP法(逐次線形計画法)を用いた均質化法トポロジー最適化において, 以上に述べた数値的不安定を改善する新たな方法を提案することにある。本論文で提案する方法は, 重力の概念にもとづく要素密度の集中を促す関数(以下"gravity control 関数"と呼ぶことにする)を目的関数に付加するもので, トポロジー最適化で問題となるチェッカーボードを防ぐだけでなく, グレースケール(中間的密度)にもペナルティを課すことができる。

\* ミシガン大学 客員研究員・博士(工学)  
(広島大学工学部第四類建設構造工学 助手)

\*\* ミシガン大学 教授・Ph. D.

Visiting Scholar, Dept. of Mechanical Eng. and Applied Mech., Dr. Eng.  
(Research Assoc., Dept. of Structural Engineering, Hiroshima Univ.)  
Prof., Dept. of Mechanical Eng. and Applied Mech., Ph. D.

本論文では、Suzuki and Kikuchi<sup>9)</sup>が示した平面片持りの例題を取り上げ、本論文で提案する方法により、文献に示される解をほぼ再現できることを示す。また、このような数値的不安定の議論によく用いられている MBB と呼ばれるはりの例題<sup>7),9),11),16)</sup>についても解析を行い、本方法の有効性を示す。

以下、本論文第2章では、均質化法による2次元構造物の解析法について概説する。第3章では、トポロジー最適化問題の定式化と SLP 法による解法を示し、数値的不安定を改善する gravity control 関数について説明する。第4章では、平面片持りと MBB はりの解析例を示し、本方法の有効性を検証する。第5章では以上のまとめを述べる。

## 2. 均質化法によるトポロジー最適化<sup>1)</sup>

### 2.1 定式化

図1に示すように、有孔 unit cell で構成される周期的マイクロストラクチャーからなる2次元構造物を仮定し、この変位場  $\mathbf{u}$  が、摂動展開により次式で表されるものとする。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^H(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{x}$  は全体マクロ座標系、 $\mathbf{y}$  は局所マイクロ座標系、 $\varepsilon$  はマイクロストラクチャーの代表長さを表す。 $\mathbf{u}^H, \mathbf{u}^{(1)}$  は面内変形問題では次式で表される。

$$\mathbf{u}^H(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u_1^H \\ u_2^H \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

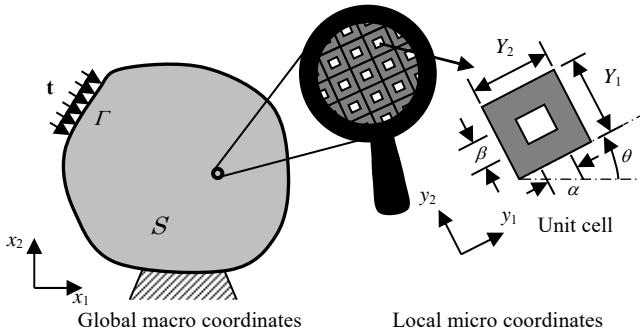


図1 周期的マイクロストラクチャーからなる2次元構造物

このとき、ひずみと応力も次式で近似できる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) &\approx \boldsymbol{\varepsilon}^H(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \mathbf{b}_x \mathbf{u}^H(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_y \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}_x \mathbf{u}^H(\mathbf{x}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}_y \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{D}$  は弾性定数マトリックス、また、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^H(\mathbf{x}) &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^H \\ \varepsilon_2^H \\ \gamma_{12}^H \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(1)} \\ \varepsilon_2^{(1)} \\ \gamma_{12}^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{b}_x &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_y = \begin{bmatrix} \partial/\partial y_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y_2 \\ \partial/\partial y_2 & \partial/\partial y_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

このとき、ポテンシャルエネルギーは次式のように展開できる。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) &\approx \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H + \mathbf{b}_y \mathbf{u}^{(1)})^T \mathbf{D} (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H + \mathbf{b}_y \mathbf{u}^{(1)}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_S (\mathbf{u}^H)^T \mathbf{f} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} (\mathbf{u}^H)^T \mathbf{t} d\Gamma \\ &\approx \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H + \mathbf{b}_y \mathbf{u}^{(1)})^T \mathbf{D} (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H + \mathbf{b}_y \mathbf{u}^{(1)}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_S \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} (\mathbf{u}^H)^T \mathbf{f} d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} (\mathbf{u}^H)^T \mathbf{t} d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

ここに  $\mathbf{f}$  は物体力ベクトル、 $\mathbf{t}$  は表面力ベクトルである。ただし、(5)式の2番目には次式の関係が用いられている。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S \mathbf{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_S \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{g}$  は座標系  $\mathbf{y}$  に対する周期関数である。

最小ポテンシャルエネルギーの原理より、次の2式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_S \int_{\mathbf{Y}} (\mathbf{b}_x \delta \mathbf{u}^H)^T \mathbf{D} (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H + \mathbf{b}_y \mathbf{u}^{(1)}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_S \int_{\mathbf{Y}} (\delta \mathbf{u}^H)^T \mathbf{f} d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\delta \mathbf{u}^H)^T \mathbf{t} d\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_S \int_{\mathbf{Y}} (\mathbf{b}_y \delta \mathbf{u}^{(1)})^T \mathbf{D} (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H + \mathbf{b}_y \mathbf{u}^{(1)}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{u}^{(1)}$  が次式のように分離できるとし、

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{b}_x \mathbf{u}^H(\mathbf{x}) \quad (9)$$

$\boldsymbol{\chi}$  が次式を満足するものとする、

$$\int_{\mathbf{Y}} (\mathbf{b}_y \delta \mathbf{u}^{(1)})^T (\mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}_x \boldsymbol{\chi}) d\mathbf{y} = 0 \quad (10)$$

(8)式は自動的に満足される。このとき、(9)式を(7)式に代入すると、次式の均質化されたマイクロストラクチャーの釣合方程式が得られる。

$$\int_S (\mathbf{b}_x \delta \mathbf{u}^H)^T \mathbf{D}^H (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H) d\mathbf{x} = \int_S (\delta \mathbf{u}^H)^T \mathbf{f}^H d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\delta \mathbf{u}^H)^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (11)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^H &= \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} (\mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}_x \boldsymbol{\chi}) d\mathbf{y} \\ \mathbf{f}^H &= \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (12)$$

### 2.2 離散化

マイクロストラクチャーに対する(11)式は、通常の有限要素法によって離散化する。本論文では、Wilson と Taylor ら<sup>17),18)</sup>によって提案された4節点非適合四辺形要素<sup>19)</sup>を用いる。本要素は、2種の曲げ型面内変位モードを有しているため4節点アイソパラメトリック要素に比較して精度が良い。

一方、マイクロストラクチャーに対する(12)式の $\boldsymbol{\chi}$ は、(10)式をマイクロストラクチャーの周期性を考慮した境界条件のもとで解くことによって得られる(図2参照)。(10)式は4節点アイソパラメトリック要素により離散化する<sup>1)</sup>。また、(12)式の $\mathbf{D}^H$ も同じ要素で離散化する。

以上のようにして求められたマイクロストラクチャー各要素の $\mathbf{D}^H$ は、次式によりその応力の主軸方向に変換される<sup>1),8)</sup>。

$$\mathbf{D}^G = \mathbf{T}^P \mathbf{D}^H \mathbf{T}^P \quad (13)$$

ここに、

$$\mathbf{T}^P = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (14)$$



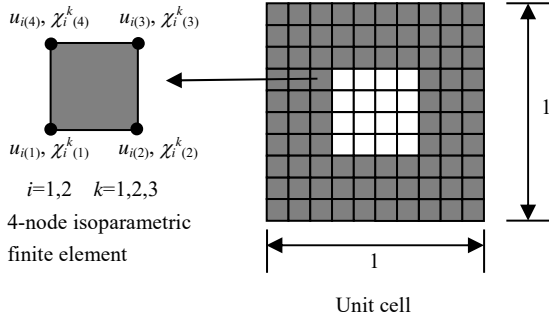


図2 Unit cell の離散化

### 3. トポロジー最適化問題の解析法

#### 3.1 最適化問題の定式化と SLP 法による解法

図1に示すように、各 Unit cell の孔の大きさを  $\alpha, \beta$  とし、この孔の大きさは、各マクロストラクチャーの有限要素ごとに異なるものとする。最適化の目的は、一定の荷重を与えた場合の剛性の最大化、すなわち、外力のなす仕事（平均コンプライアンス）の最小化とする。また、制約条件は、物質の総体積を制約値以下にすることとする。

以上の問題を定式化すると、以下のように表せる。

Find  $\mathbf{X} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$

which minimize

$$C(\mathbf{X}) = \int_S (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H)^T \mathbf{D}^H (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H) dx \quad (15)$$

subject to

$$V(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N A_i t_i (1 - \alpha_i \beta_i) \leq V_0 \quad (16)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad 0 \leq \beta_i \leq 1$$

ここに、 $N$  はマクロストラクチャーの有限要素総数、 $C$  は平均コンプライアンス、 $V, V_0$  は、物質の総体積とその制約値、 $A_i, t_i$  は  $i$  要素の面積と板厚である。

(15)式、(16)式で示される最適化問題の解法として、SLP法を用いる。図3に本方法を用いた場合の解析の流れ図を示す。本アルゴリズムの特徴は、各ステップで応力の主軸角度の計算を2度行っている点である（平均コンプライアンスの計算時にも主軸角度が計算される）。これは、局所解への収束を回避するために設計変数の move limit を大きな値に設定するためである。

平均コンプライアンスの感度は次式により計算される<sup>8)</sup>。

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} = - \int_S (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H)^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \alpha_i} (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H) dx = - \mathbf{d}_i^T \int_S \mathbf{B}_i^T \frac{\partial \mathbf{D}_i^H}{\partial \alpha_i} \mathbf{B}_i dx \cdot \mathbf{d}_i \quad (17)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \beta_i} = - \int_S (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H)^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \beta_i} (\mathbf{b}_x \mathbf{u}^H) dx = - \mathbf{d}_i^T \int_S \mathbf{B}_i^T \frac{\partial \mathbf{D}_i^H}{\partial \beta_i} \mathbf{B}_i dx \cdot \mathbf{d}_i$$

ここに、 $\mathbf{d}_i$  は  $i$  要素の節点変位ベクトル、 $\mathbf{B}_i$  は  $i$  要素のひずみ-変位マトリックスである。また、 $\mathbf{D}^H$  の感度は、 $\mathbf{D}^H$  のデータベースから近似的に計算する。なお、本論文では、Unit cell を  $20 \times 20$  分割し、孔の大きさ  $\alpha, \beta$  に関して、 $51 \times 51$  点 (0.02 刻み) の  $\mathbf{D}^H$  の値を計算し、これをデータベースとした。そして、中間値および感度は9点のLagrange補間によって計算している。一方、体積の感度は(16)式から解析的に計算される。

各設計変数は、以下のような変数変換を行う。

$$\Delta \tilde{\alpha}_i = \frac{\Delta \alpha_i}{\alpha_i} + \tilde{\varepsilon}, \quad 0 \leq \Delta \tilde{\alpha}_i \leq 2\tilde{\varepsilon}$$

$$\Delta \tilde{\beta}_i = \frac{\Delta \beta_i}{\beta_i} + \tilde{\varepsilon}, \quad 0 \leq \Delta \tilde{\beta}_i \leq 2\tilde{\varepsilon} \quad (18)$$

ここに、 $\tilde{\varepsilon}$  は、通常  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon / \alpha_i$  等で定義されるべきものであるが、ここでは、 $\tilde{\varepsilon}$  を  $\alpha_i, \beta_i$  に依存しないものとする。すなわち、move limit  $\varepsilon$  を  $\alpha_i, \beta_i$  の値に比例させる。この場合、 $\alpha_i, \beta_i$  が 0 に近づくほど設計変数の変動幅は小さくなる。また、 $\tilde{\varepsilon}$  は、初期値を 0.5 とし、30 ステップまでは  $\tilde{\varepsilon} / 1.05^n$  ( $n$ : ステップ数)、30 ステップ以上では  $\tilde{\varepsilon} / 1.05^{30} / 1.1^{n-30}$  で絞り込みを行う。収束判定に用いる  $\varepsilon_c$  (図3) は、 $\tilde{\varepsilon}$  の初期値の  $1/200$  とする (この場合 72 ステップ以下で収束する)。

また、体積の制約値  $V_0$  に関して、 $V_0$  が小さい値の場合、繰り返し計算初期の段階で  $C$  の変動が非常に大きくなり、局所解への収束傾向が強まる。そこで、 $V_0$  が小さい値の場合は、繰り返し初期段階の制約値を次式で定義される  $\tilde{V}_0$  に置き換える。

$$\tilde{V}_0 = V_0 (1 + \lambda \mu_n) \quad (19)$$

ここに、 $\lambda = V_T / V_0 - 2$ 、 $\mu_n = 1 - (n-1) / n_s$  であり、 $V_T$  は全  $\alpha, \beta$  が 0 の場合の体積、 $n_s$  は適当なステップ数で、本論文では 20 としている。なお、 $\lambda, \mu_n$  が 0 以下になる場合は 0 とする。

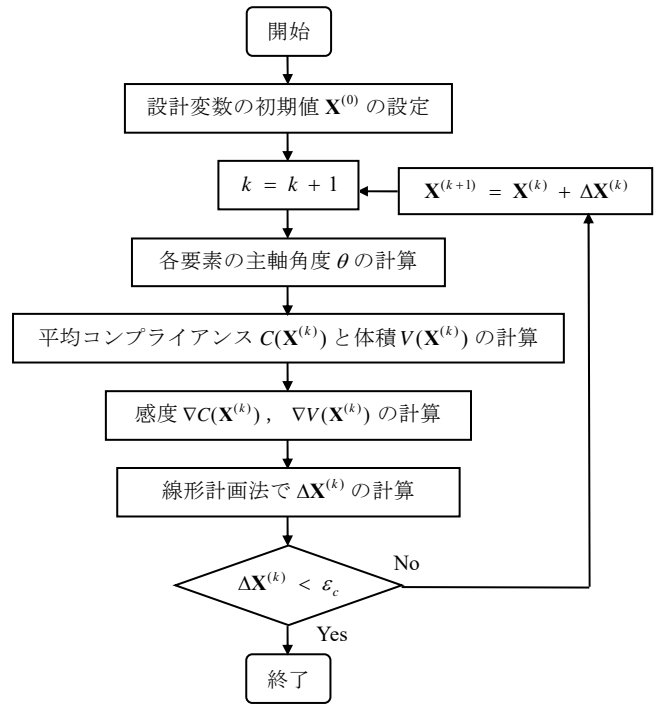


図3 SLP 法による解析フロー

#### 3.2 数値的不安定の改善

これまで、チェッカーボード、メッシュ依存性、局所解への収束等の数値的不安定を改善する主な方法として、perimeter control 法<sup>11),20),21)</sup>と mesh-independent filtering 法<sup>7),16)</sup>が提案されている。しかし、後に示すようにこれらの方法はグレースケールにペナルティが課されないため、以上に示した均質化法による最適化問題に

適用すると、グレースケールの広がった不鮮明なトポロジーが得られる。そこで、本論文では、重力の概念を応用した新たな方法を提案する。本方法では、Beckers<sup>21)</sup>が示した離散的な perimeter control 法を参考に、次式のような gravity control 関数を定義する。

$$g = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} (\rho_i^p \cdot \rho_j^p + \bar{\rho}_i^p \cdot \bar{\rho}_j^p) \quad (20)$$

$$\rho_i = 1 - \alpha_i \beta_i, \quad \bar{\rho}_i = 1 - \rho_i$$

ただし、 $N$  は全要素数、 $m_i$  は  $i$  要素と辺を共有する要素数であり、内部では 4 であるが、端や角の要素では 3 または 2 となる。また、 $p$  はグレースケールにペナルティを課すパラメータで、本論文では、 $p=2$  に設定する。なお、“gravity control 関数” は、2 要素間の重力が  $\rho_i \rho_j / r_{ij}$  ( $r_{ij}$ : 2 要素間の中心距離) で定義されることから名付けた。

図 4 は、 $i$  要素および  $j$  要素と辺を共有する要素の密度が 0, 0.5, 1 の場合について、 $i$  要素の gravity control 関数の値を示したものである。ただし、 $p=2$  としている。また、図 5 は、比較のため、同じ密度分布に対する Beckers<sup>21)</sup>によって示された perimeter control 関数の値を示したものである。なお、Beckers によって示された perimeter control 関数は次式で定義される。

$$P = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} l_{ij} |\rho_i - \rho_j| \quad (21)$$

ここに、 $l_{ij}$  は  $i$  要素と  $j$  要素の共有辺の長さである。

図 4 と図 5 を比較してわかるように、要素密度が 0 と 1 の場合は、両関数値とも同様の評価となる (ただし、値の大小関係は逆)。しかし、perimeter control 関数は、グレースケールへのペナルティが課されないのに対し (すべて黒とすべてグレーが同じ値となる)、gravity control 関数は、グレースケールにかなり大きなペナルティを課することができる (すべて黒が 4 に対してすべてグレーは 0.5)。

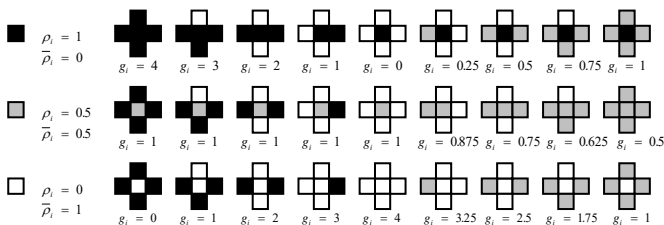


図 4 要素密度が 0, 0.5, 1 の場合の gravity control 関数値

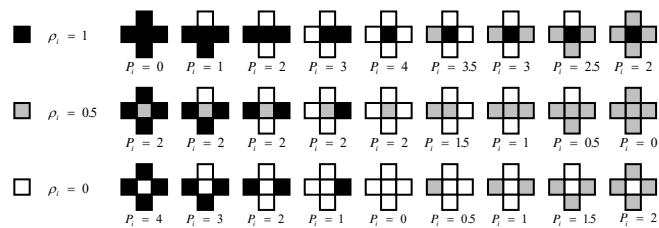


図 5 要素密度が 0, 0.5, 1 の場合の perimeter control 関数値 ( $l_{ij} = 1$ )

以上からわかるように、gravity control 関数の値が高くなれば、要素密度が集中し、またグレースケールが少なくなる。そこで、本論文では、この関数に重みを付けて目的関数に加え、平均コン

プライアンスを最小化すると同時に、gravity control 関数値を最大化する多目的問題とする。多目的関数の単一目的関数化にはいくつかの方法が提案されているが、ここでは、lp ノルムによる方法を採用する<sup>22)</sup>。すなわち、新たな目的関数を次式で定義する。

$$f(\mathbf{X}) = \sqrt{C(\mathbf{X})^2 - (w_g \bar{C} \tilde{g}(\mathbf{X}))^2} \quad \tilde{g}(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}) / \sum_{i=1}^N m_i \quad (22)$$

ここに、 $w_g$  は重み、 $\bar{C}$  は各ステップの平均コンプライアンス値であるが、スケーリングのみに用いているもので、設計変数に対する感度は 0 とする。なお、 $\tilde{g}$  は常に 1 以下となる。

## 4. 数値解析例

### 4.1 平面片持はりの解析

以上に示した方法の有効性を検証するために、まず、Suzuki and Kikuchi<sup>9)</sup>によって示された平面片持はりの解析を行う (図 6)。解析は対称性を利用して 1/2 領域で行う。また、 $\alpha, \beta$  の初期値は、 $\alpha = \beta$  として全要素で均等とする。ここでは、板厚を 1、荷重を 2 に設定した。有限要素メッシュは 1/2 領域で  $64 \times 20$  とした。

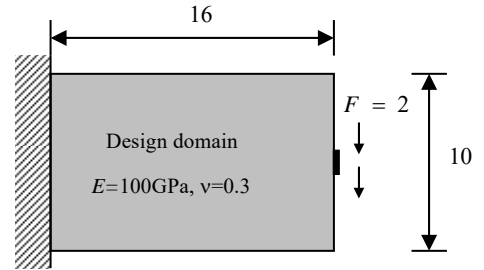


図 6 平面片持はりのトポロジー解析領域

図 8 は、gravity control 関数の重みを 0 から 0.5 まで 0.1 刻みで変化させた場合の最適トポロジー解を示している。なお、図 8 は、各要素の密度を図 7 に示すスケールで表示している。図より、gravity control 関数の重みが大きくなるにしたがって、グレースケールが少なくなり、トポロジーが鮮明になっていくことがわかる。また、本例題では、 $w_g = 0.3$  で Suzuki and Kikuchi<sup>9)</sup>によって示された解とほぼ同様なトポロジーが得られており、コンプライアンス値から見ても、0.3 が妥当な重みであることがわかる。

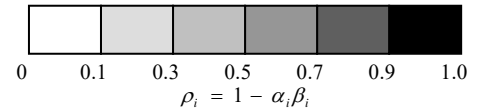


図 7 トポロジー表示における密度スケール

図 9 は、比較のため、次式により (21) 式で定義される perimeter control 関数の最小化を行った場合の結果である。

$$f(\mathbf{X}) = \sqrt{C(\mathbf{X})^2 + (w_p \bar{C} \tilde{P}(\mathbf{X}))^2} \quad \tilde{P}(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X}) / L \quad (23)$$

ただし、 $w_p = 0.01$ 、 $L = 16$  としている。図から明らかのように、この場合はグレースケールが残り、特に  $V_0 = 80$  の場合は、不鮮明なトポロジーとなることがわかる。

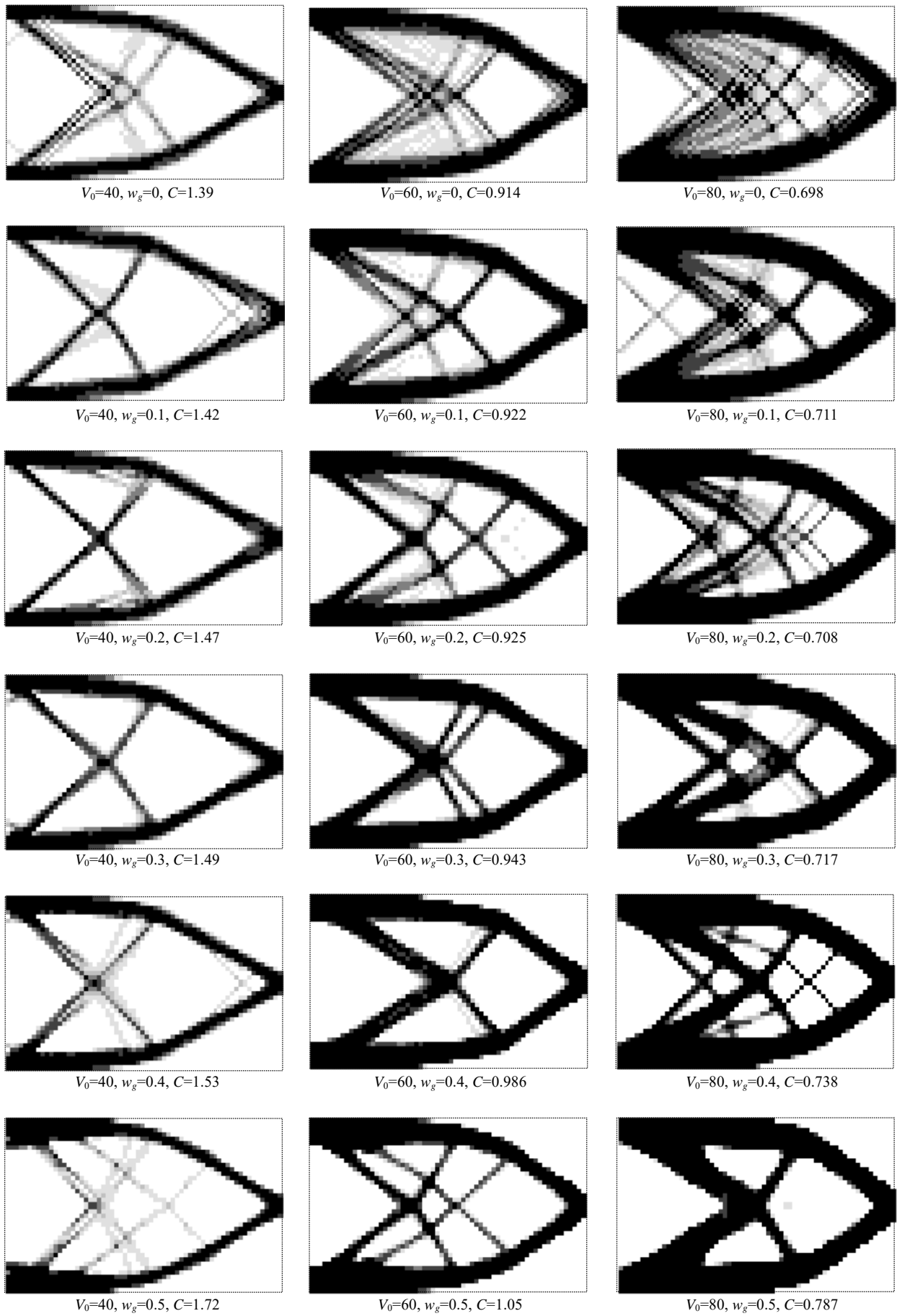


図8 平面片持はりのトポロジー解析結果 ( $w_g$  の変化に対して)

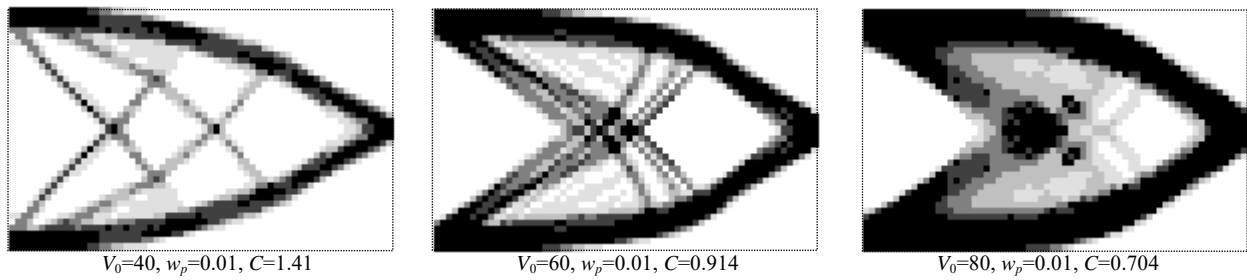


図9 perimeter control 関数を用いた場合のトポロジー解析結果

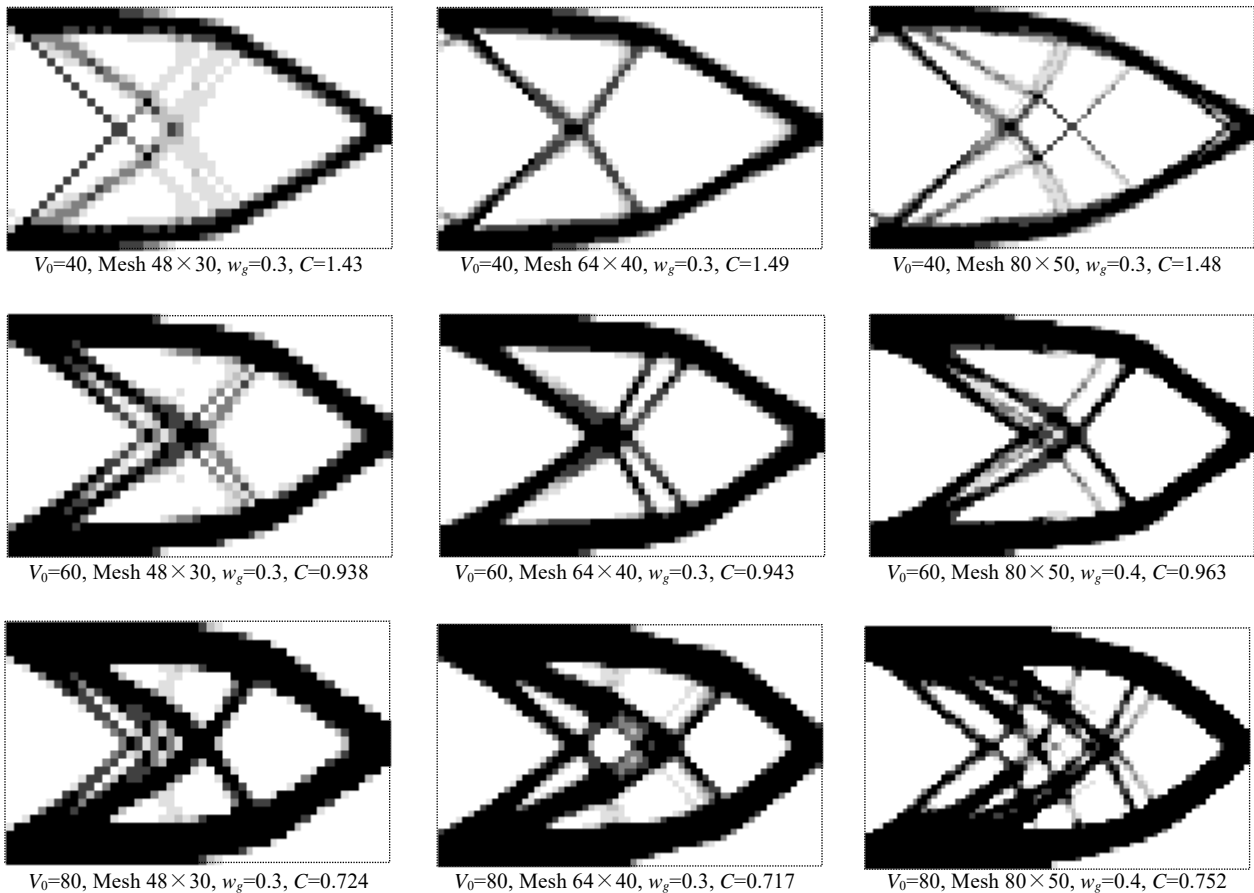


図10 異なる有限要素メッシュに対するトポロジー解析結果

すなわち、perimeter control 法では、グレースケールへのペナルティを別の方法で課す必要がある。また、mesh-independent filtering 法は perimeter control 法と同様の効果となるため、この方法についても同様のことが言える。

図10は、メッシュ依存性を調査するために、3種のメッシュ分割に対するトポロジー解析結果を示したものである。図より、 $V_0=40$  と  $V_0=80$  の場合では若干のメッシュ依存性が見られるが、ほぼ類似したトポロジーが得られていることがわかる。ただし、 $V_0=60$  と  $V_0=80$  の  $80 \times 50$  のメッシュでは  $w_g = 0.4$  としている。また、コンプライアンス値を見ると、メッシュ分割数が多くなっても必ずしもコンプライアンス値は小さくならない。したがって、メッシュ依存性に関しては、Suzuki and Kikuchi<sup>9)</sup>の示した最適規準

法による結果ほどの精度は期待できないことがわかる。

#### 4.2 MBB はりの解析

次に、図11に示す MBB と呼ばれるはり<sup>9)</sup>のトポロジー解析を行う。解析は対称性を利用して  $1/2$  領域で行い、有限要素分割は、この領域で  $75 \times 25$  とした。ヤング係数、ポアソン比、板厚は図6の例題と同じ値を用いた。体積の制約値は  $V_T$  の50%である。

図12は、gravity control 関数の重みを0から0.5まで0.1刻みで変化させた場合の最適トポロジー解を示している。図からわかるように、この場合も  $w_g=0.3$  で最も鮮明なトポロジーが得られている。また、 $w_g=0.3$  のトポロジーは、文献7)に示される5400要素の解析結果とほぼ同様のトポロジーとなっており（本解析では全領域で3750要素）、また、文献9)に示される正解を指向している。

$w_g$ が0.3以上では、内部の線の本数は少なくなるが、線がまとまるというよりは、線が消えていく傾向にある。実際、 $w_g=0.5$ の場合の体積は46.5%となっている。このことは、グレースケールを除いた場合、より単純な形状のトポロジー解は存在しないことを示している。

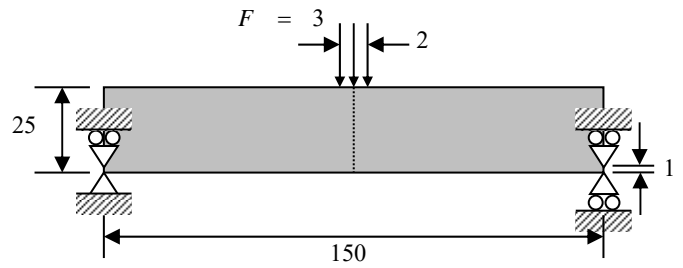


図11 MBB はりモデルのトポロジー解析領域



$w_g=0, C=3.86$



$w_g=0.1, C=3.91$



$w_g=0.2, C=3.93$



$w_g=0.3, C=4.02$



$w_g=0.4, C=4.29$



$w_g=0.5, C=4.83$

図12 MBB はりのトポロジー解析結果 ( $w_g$ の変化に対して)

## 5. まとめ

本論文では、均質化法によるトポロジー最適化問題を SLP 法で解く場合に問題となる数値的不安定を改善する方法を示した。まず、チェッカーボードおよびグレースケールを回避する方法として、gravity control 関数に重みを付けて目的関数に加え、これを最大化する方法を示した。また、局所解への収束を回避するテクニックとして、move limit の初期値を 0.5 と大きな値に設定し、さらに、move limit を要素密度が高くなるにしたがって変動幅を小さくするように設定した。また、体積の制約値が小さい値の場合は、繰り返し計算初期の段階で制約値を大きくする方法を示した。

以上の方法により、Suzuki and Kikuchi<sup>9)</sup>によって示された平面片持りの例題を解析した結果、本論文で定義した gravity control 関数の重みを 0.3 にすることで、文献に示された結果をほぼ再現できることが確かめられた。比較のため perimeter control 法の適用も試みたがグレースケールが均等に広がる不鮮明なトポロジーとなった。したがって、この方法は、SIMP アプローチのようにグレースケールへのペナルティを別の形で課すことのできる方法と組み合わせる必要がある。メッシュ依存性についても調査を行った結果、メッシュ分割を換えても、ほぼ類似したトポロジーが得られることが確かめられた。

次に、数値的不安定の議論によく用いられる MBB はりについて解析を行った。その結果、この場合も gravity control 関数の重みを 0.3 とすることで、既往の解と同様のトポロジーが得られ、また、本解析解は正解を指向していることがわかった。

以上の結果より、本論文で提案した gravity control 関数は、その重みを 0.3 (メッシュ分割が精細で、体積制約値が大きい場合は 0.4) として、目的関数に組み込むことで、チェッカーボードを防ぎ、グレースケールのより少ない鮮明なトポロジーを得ることがわかった。また、局所解への収束を避けるテクニックも有効であることが確かめられた。

**謝辞**：本研究を遂行するにあたり、平成 9 年度能村膜構造技術振興財団の助成金の補助を頂いた。ここに記して謝意を表します。

## 参考文献

- 1) M. P. Bendsoe and N. Kikuchi : Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 2) M. P. Bendsoe : *Optimization of structural topology, shape and material*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1995
- 3) A. Diaz and R. Lipton : Optimal layout for 3D elastic structures, *Structural Optimization*, Vol.13, pp.60-64, 1997
- 4) N. Olhoff, E. Rønholdt and J. Scheel : Topology optimization of three-dimensional structures using optimum microstructures, *Structural Optimization*, Vol.16, pp.1-18, 1998
- 5) K. Yuge and N. Kikuchi : Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation, *Structural optimization*, Vol.10, pp.197-208, 1995
- 6) K. Maute, S. Schwarz and E. Ramm : Adaptive topology optimization of elastoplastic structures, *Structural Optimization*, Vol.15, pp.81-91, 1998
- 7) O. Sigmund and J. Petersson : Numerical instabilities in topology

- optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, *Structural Optimization*, Vol.16, pp.68-75, 1998
- 8) K. Suzuki and N. Kikuchi : A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 9) M. Zhou and G.I.N. Rozvany : The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.89, pp.309-336, 1991
- 10) R. J. Yang and C. H. Chuang : Optimal topology design using linear programming, *Computers & Structures*, Vol. 52, No.2, pp.265-275, 1994
- 11) P. Duysinx : Layout optimization: A mathematical programming approach, *Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics*, Vol.540, pp.1-30, 1997
- 12) 西脇眞二, Mari I. Frecker, S. Min and 菊池昇 : 柔軟性を考慮した構造の最適化(第 1 報 定式化とコンプライアントメカニズムへの応用), *日本機械学会論文集 (C 編)*, Vol. 96-1569, pp.2657-2664, 1997
- 13) S. Nishiwaki, Mary I. Frecker, S. Min, and N. Kikuchi : Topology Optimization of Compliant Mechanisms using the Homogenization Method, *Int. J. Numer. Methods. Engrg.*, Vol. 42, No. 3, pp.535-560, 1998
- 14) Emilio. C. N. Silva, Jun. S. O. Fonseca and N. Kikuchi : Optimal design of periodic piezocomposites, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.159, pp.49-77, 1998
- 15) S. Nishiwaki : Optimum structural topology design considering flexibility, Ph.D Thesis, Mechanical Engineering in The University of Michigan, 1998
- 16) J. Petersson and O. Sigmund : Slope constrained topology optimization, *Int. J. Numer. Mech. Engrg*, Vol.41, pp.1417-1434, 1998
- 17) E. L. Wilson, R. L. Taylor, W. P. Doherty, and J. Ghaboussi : Incompatible displacement models, in *Num. and Comp. Meth. in Struct. Mech.* (eds S. T. Fennes et al.), Academic Press, pp.43-57, 1973
- 18) R. L. Taylor, P. J. Beresford, and E. L. Wilson : A non-conforming element for stress analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.10, pp.1211-1220, 1976
- 19) 鷲津久一郎他編 : 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, pp.250-253, 1981
- 20) R.B. Haber, M. P. Bendsoe and C. Jog : A new approach to variable topology shape design using a constraint on the perimeter, *Structural Optimization*, Vol.11, pp.1-12, 1996
- 21) M. Beckers: Optimisation de structures en variables discrètes, Thèse de doctorat, Université de Liege, Ingénieur civil Electricien-mécanicien (a\_ropatiale), pp.108-135, 1997
- 22) 山川宏 : 最適化デザイン, 培風館, pp.144-145, 1993

(1998 年 9 月 24 日原稿受理, 1999 年 2 月 12 日採用決定)

# 最適性規準法を用いた位相最適化におけるフィルタリング法

## FILTERING METHOD FOR TOPOLOGY OPTIMIZATION ANALYSIS USING OPTIMALITY CRITERIA METHOD

藤井大地\*, 鈴木克幸\*\*, 大坪英臣\*\*\*

*Daiji FUJII, Katsuyuki SUZUKI and Hideomi OHTSUBO*

In the topology optimization analysis based on the homogenization design method or the density approach, the checkerboards, that is the formation of regions of alternating solid and void elements ordered in a checkerboard-like fashion, often appear in the optimum solutions. Therefore, the filtering method is necessary for these approaches. In this paper, we present an effective filtering method for the topology optimization analysis using the optimality criteria method as optimizer. In this method, the value of the gravity control function is controlled as a constrained condition. The gravity control function, which was presented by the author in the topology optimization analysis using the SLP method<sup>9),10)</sup>, is defined from the relations of the density of an element with that of its neighbor elements. This function imposes the penalty in the checkerboards and the gray scale density, that is, if the function is high, the checkerboards and gray scales disappear in the optimum solution. In this paper, this filtering method is applied in the topology optimization using the homogenization design method and the density approach. Several examples of 2D and 3D problems are shown to demonstrated the effectiveness of the present method.

**Keywords:** *Filtering method, Topology optimization, Optimality criteria method, Homogenization method, Density approach*

フィルタリング法, 位相最適化, 最適性規準法, 均質化法, 密度法

### 1. はじめに

連続体の位相最適化技術は、機械分野においてはすでに実務レベルで利用され、部品の軽量化等で実績が得られつつある。建築分野においても、研究レベルでは、大森らによる GA を利用したトラス構造の位相最適化<sup>1)</sup>、ESO 法による位相最適化<sup>2),3)</sup>、本間らによるセル・オートマトンを利用した位相最適化<sup>4),5)</sup>等の研究が行われている。一方、欧米では、Ramm と Maute らを中心にシェル構造の位相最適化<sup>6)</sup>、橋梁の位相最適化、鉄筋コンクリートの鉄筋の位相最適化等<sup>7)</sup>の現実的な問題への適用が試みられている。これらの研究の多くは、部材の断面設計を中心とするいわゆる構造設計よりも設計の第一段階であるコンセプトデザインへの利用を目指すものであり、このような技術が建築デザインの新しいツールとなる可能性を秘めている。

このような背景のもとづいて、著者らもグランドストラクチャー法による骨組構造の位相最適化<sup>8)</sup>、均質化設計法による板・シェル構造の位相最適化<sup>9),10),11)</sup>、密度法による 3 次元構造の位相最適化手法<sup>12)</sup>を示し、これらの手法をもとに建築デザインに利用できる位相最適化ツールの開発を目指している。

ところで、このような手法をツール化する上で問題となるのが、

数学的な最適解が必ずしも設計者が期待するようなシンプルで明解な位相とはならないという点である。また、連続体の位相最適化では、ソリッド要素と空隙要素がチェッカーボードのように交互に並ぶ数値的不安定現象が多く見られ、実際にどのように構造物の境界を定めるべきかを判断しにくい場合が多い。このような問題を解決する方法としては、一つには、Maute and Ramm ら<sup>13)</sup>が提案しているように、均質化設計法と同様の手法で位相を求め、それにもとづいて有限要素メッシュを再分割し、さらに位相を求めるというようなことを繰り返すアダプティブ法的な手法が考えられる。このようにして得られた位相は滑らかな境界を持ち非常に明解なものとなっているが、計算コストと開発コストがかかりすぎるという問題がある。他の方法としては、均質化設計法や密度法による位相最適化手法にフィルタリング法を組み合わせることが考えられる。このようなフィルタリング法に関しては文献 14) に整理されており、著者らも文献 9),10) に新しいフィルタリング法を提案している。

著者らが提案したフィルタリング法は、一つの要素の周辺の密度に注目し、その要素が中実であれば周辺に中実要素が、その要素が空隙であれば周辺に空隙が集中するような関数を定義する。

\* 東京大学工学系研究科 助手・博士(工学)

\*\* 東京大学新領域創成科学研究科 助教授・Ph. D.

\*\*\* 東京大学工学系研究科 教授・工学

Research Assoc., Graduate School of Engineering, The University of Tokyo, Dr. Eng.

Assoc. Prof., Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo, Ph. D. Prof., Graduate School of Engineering, The University of Tokyo, Dr. Eng.

そして、この関数をすべての要素について加えた関数（重力制御関数）を制御することで、チェッカーボードのない明解な位相を求める方法である。文献9),10)では、2次元問題の均質化設計法で、この方法と SLP 法を組み合わせる手法を示し良好な結果を得ている。しかしながら、制約条件が質量のみの剛性最大化問題では、SLP 法よりも最適性規準法 (Optimality criteria method) の方が計算効率上有利である。したがって、本方法と最適性規準法との組み合わせを検討する必要がある。また、このフィルタリング法を3次元問題に適用した場合の効果についても検討する必要がある。

そこで、本論文では、重力制御関数値を制約条件とする位相最適化問題を最適性規準法を用いて解く方法を示し、このような方法により、2次元および3次元問題において、チェッカーボード状の密度分布がなく、設計者に明確な情報を与える位相が求められることを示す。2次元問題の位相最適化手法としては、設計領域を多孔質材料とし、材料のマイクロ構造の穴の大きさと角度を設計変数とする均質化設計法<sup>9),10),15),16)</sup>を用いる。3次元問題では、計算効率上の理由から均質化設計法を簡略化し、各要素の弾性定数を要素密度のべき乗関数に比例すると仮定する密度法<sup>12),17),18),19)</sup>を用いる。なお、文献12)においても最適性規準法を用いているが、この場合は重力制御関数を文献9),10)と同様に目的関数に付加した形で用いており、本論文に示す方法とその点で異なる。

以下、本論文第2章では、均質化設計法による2次元構造物の位相最適化問題を、重力制御関数値を制約条件として最適性規準法で解く方法を示す。第3章では、密度法による3次元の位相最適化問題を同様な方法で解く方法を示す。第4章では、第2章、第3章で示した方法の有効性を2次元および3次元の解析例題で示す。第5章では以上のまとめを述べる。

## 2. 均質化設計法による2次元問題の位相最適化

### 2.1 最適化問題の定式化

均質化設計法では、図1に示すように設計領域を有限要素分割し、各要素の材料が、異なる長方形の穴を有するセルが周期的に並ぶマイクロ構造を有するものとする。そして、各要素のマイクロ構造の穴の大きさ  $a, b$  と角度  $\theta$  を設計変数として、材料の必要などころでは穴が小さく、必要でないところでは穴が大きくなることを利用して構造物の最適位相を求める。剛性の最大化を目的とする場合の本方法の最適化問題は次式のように定式化される<sup>9),16)</sup>。

$$\min_{\alpha \in L} [\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}] \quad (1)$$

$$L = \left\{ \alpha \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, 2N), \sum_{i=1}^N (1-a_i b_i) \leq m_s \right\}$$

ここに、 $\alpha$  は設計変数  $\{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$  で、 $a_i, b_i$  は  $i$  番目要素のマイクロ構造の穴の大きさを表し、 $N$  は有限要素数である。なお、マイクロ構造の穴の角度は各要素の応力の主軸方向に向けるものとして設計変数からは除外する<sup>16)</sup>。また、(1)式の  $\mathbf{d}$  は節点変位ベクトル、 $\mathbf{K}$  は全体剛性マトリックス、 $L$  は与えられた条件を満たす許容設計変数の集合、 $m_s$  は質量（ここでは総密度比）の制約値である。なお、(1)式の  $\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}$  は外力の仕事量である平均コンプライアンスを示しており、次式のように表しておく。

$$C(\alpha) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (2)$$

(1)式を解いて得られる最適位相では位相の境界がはっきりしない

場合が多いため、位相境界をはっきりさせる働きを持つ次式の重力制御関数を定義する<sup>9),10)</sup>。

$$G(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^N g_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (3)$$

ここに、

$$g_i = \sum_{j=1}^{m_i} [\rho_i \rho_j + (1-\rho_i)(1-\rho_j)] \quad (4)$$

ただし、 $\rho_i = 1 - a_i b_i$  であり、 $m_i$  は  $i$  番目の要素と辺を共有する要素数で、内部の要素では4、端や隅の要素ではそれ以下となる。また、(3)式の  $G$  は、 $0 < G \leq 1$  となる。

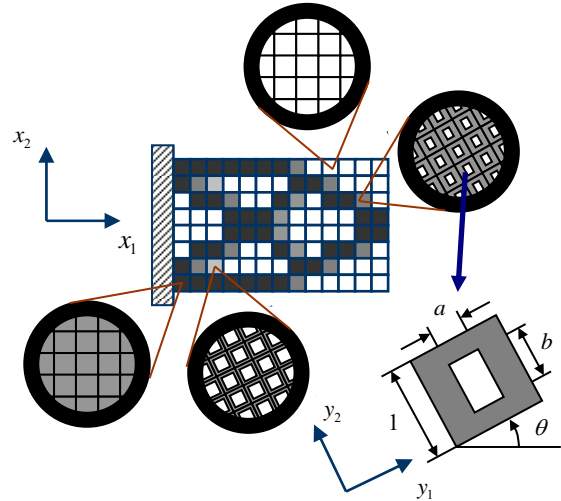


図1 均質化設計法による位相最適化

図2は、密度比  $\rho$  が1, 0.5, 0となる場合について、(4)式の関数  $g_i$  の値を示したものである。図からわかるように、この関数値は、 $i$  番目要素が黒で周辺要素が白の場合、または  $i$  番目要素が白で周辺要素が黒の場合が最も低い値となる。チェッカーボード状の解はこのパターンに相当するので、この関数値が高くなればチェッカーボードは防げる。また、この関数の特徴として、グレースケール（密度比が0.5の場合）にもペナルティーが課され、すべてグレーの値は、すべて黒またはすべて白よりも低い値となる。したがって、(3)式の関数値が高くなれば、チェッカーボード状の密度分布が少なくしかも白黒のはっきりした位相が得られる。

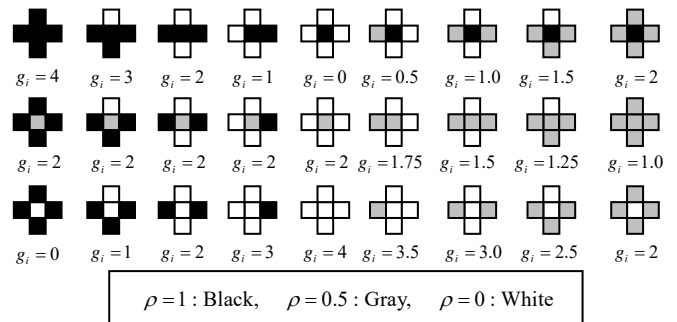


図2  $i$  番目要素とその近隣要素の密度比と関数  $g_i$  の関係



そこで、ここでは、(3)式の  $G$  を与えられた値以上にする制約を課すことにする。この場合、(1)式は次のように書ける。

$$\min_{\alpha} [C(\alpha)] \quad (5)$$

$$\mathbf{L} = \left\{ \alpha \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, 2N), \sum_{i=1}^N (1 - a_i b_i) \leq m_s, \quad G \geq \bar{G} \right\}$$

ここに、 $\bar{G}$  は重力制御関数の制約値で、 $0 \leq \bar{G} \leq 1$  の範囲で与える。

## 2.2 最適性規準法による解法

(5)式の問題を最適性規準法によって解く<sup>16)</sup>。最適性規準法では、(5)式の問題を解くために次式の Lagrangian を定義する。

$$L(\alpha) = C(\alpha) - \lambda \left( \sum_{i=1}^N (1 - a_i b_i) - m_s \right) - \lambda_g (\bar{G} - G(\alpha)) \quad (6)$$

ただし、 $\lambda, \lambda_g$  はラグランジェ乗数 ( $\lambda \leq 0, \lambda_g \leq 0$ ) であり、ラグランジェ乗数がかかる項は制約条件を満足すれば負になる。そして、(6)式を設計変数とラグランジェ乗数に関して変分をとることにより、最適性規準を求める。この場合は次式となる。

$$\begin{aligned} \delta L(\alpha) = & \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial C(\alpha)}{\partial a_i} + b_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial a_i} \lambda_g \right) \delta a_i \\ & + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial C(\alpha)}{\partial b_i} + a_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial b_i} \lambda_g \right) \delta b_i \\ & - \left( \sum_{i=1}^N (1 - a_i b_i) - m_s \right) \delta \lambda - (\bar{G} - G(\alpha)) \delta \lambda_g = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式は(6)式の最小化の条件である。(7)式より、 $\delta a_i, \delta b_i (i=1, \dots, N)$ 、 $\delta \lambda, \delta \lambda_g$  の任意性から次式が成り立つ。

$$-\frac{b_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial a_i} \lambda_g}{\frac{\partial C(\alpha)}{\partial a_i}} = 1 \quad -\frac{a_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial b_i} \lambda_g}{\frac{\partial C(\alpha)}{\partial b_i}} = 1 \quad (8),(9)$$

$$\frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1 - a_i b_i) = 1 \quad \frac{\bar{G}}{G(\alpha)} = 1 \quad (10),(11)$$

(8)式より次のような関係式を作ることができる。

$$-\frac{b_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial a_i} \lambda_g}{\frac{\partial C(\alpha)}{\partial a_i}} = 1 \Rightarrow -\frac{b_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial a_i} \lambda_g}{\frac{\partial C(\alpha)}{\partial a_i}} = \frac{a_i}{a_i} \quad (12)$$

$$\Rightarrow a_i^{(k+1)} = \left[ \frac{b_i^{(k)} \lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}}} \right]^\beta a_i^{(k)} \quad (i=1, \dots, N)$$

ここに、 $\beta$  は設計変数の更新幅を制御するべき乗係数である。(12)式と同様の操作により、次式のような関係式が得られる。

$$b_i^{(k+1)} = \left[ \frac{a_i^{(k)} \lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}}} \right]^\beta b_i^{(k)} \quad (i=1, \dots, N) \quad (13)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \left[ \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1 - a_i^{(k)} b_i^{(k)}) \right]^\beta \lambda^{(k)} \quad (14)$$

$$\lambda_g^{(k+1)} = \left[ \frac{\bar{G}}{G(\alpha^{(k)})} \right]^\beta \lambda_g^{(k)} \quad (15)$$

ただし、 $a_i, b_i, \lambda, \lambda_g$  には次式の制約条件があるので、

$$0 \leq a_i \leq 1, \quad 0 \leq b_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \quad \lambda \leq 0, \quad \lambda_g \leq 0 \quad (16)$$

(12)~(15)式より、次式の最適性条件が得られる。

$$a_i^{(k+1)} = \min \left\{ \max \left\{ 0, s_{ai}^{(k)} \right\}, 1 \right\} \quad (17)$$

$$b_i^{(k+1)} = \min \left\{ \max \left\{ 0, s_{bi}^{(k)} \right\}, 1 \right\} \quad (18)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[ \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1 - a_i^{(k)} b_i^{(k)}) \right]^\beta \lambda^{(k)} \right\} \quad (19)$$

$$\lambda_g^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[ \frac{\bar{G}}{G(\alpha^{(k)})} \right]^\beta \lambda_g^{(k)} \right\} \quad (20)$$

ここに、

$$s_{ai}^{(k)} = \left[ \frac{b_i^{(k)} \lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}}} \right]^\beta a_i^{(k)} \quad (21)$$

$$s_{bi}^{(k)} = \left[ \frac{a_i^{(k)} \lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}}} \right]^\beta b_i^{(k)} \quad (22)$$

(17),(18)式には、さらに設計変数の変動幅の制約 (move limit) を課す。この変動幅の制約は次のように書ける<sup>16)</sup>。

$$a_i^{(k+1)} = \begin{cases} \max \left\{ (1 - \zeta) a_i^{(k)}, 0 \right\} & \text{if } s_{ai}^{(k)} \leq \max \left\{ (1 - \zeta) a_i^{(k)}, 0 \right\} \\ s_{ai}^{(k)} & \text{if } \max \left\{ (1 - \zeta) a_i^{(k)}, 0 \right\} \leq s_{ai}^{(k)} \\ & \leq \min \left\{ (1 + \zeta) a_i^{(k)}, 1 \right\} \\ \min \left\{ (1 + \zeta) a_i^{(k)}, 1 \right\} & \text{if } \min \left\{ (1 + \zeta) a_i^{(k)}, 1 \right\} \leq s_{ai}^{(k)} \end{cases} \quad (23)$$

$$b_i^{(k+1)} = \begin{cases} \max \left\{ (1 - \zeta) b_i^{(k)}, 0 \right\} & \text{if } s_{bi}^{(k)} \leq \max \left\{ (1 - \zeta) b_i^{(k)}, 0 \right\} \\ s_{bi}^{(k)} & \text{if } \max \left\{ (1 - \zeta) b_i^{(k)}, 0 \right\} \leq s_{bi}^{(k)} \\ & \leq \min \left\{ (1 + \zeta) b_i^{(k)}, 1 \right\} \\ \min \left\{ (1 + \zeta) b_i^{(k)}, 1 \right\} & \text{if } \min \left\{ (1 + \zeta) b_i^{(k)}, 1 \right\} \leq s_{bi}^{(k)} \end{cases} \quad (24)$$

ここに、 $\zeta$  は変動幅の制約値 (move limit) である。

さらに、 $\lambda, \lambda_g$  は最適化繰返し計算の各ステップの内側のループでも収束計算を行う<sup>16)</sup>。すなわち、次式

$$s_{ai}^{(k+1)} = \left[ \frac{b_i^{(k)} \lambda^{(k+1)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}} \lambda_g^{(k+1)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}}} \right]^\beta a_i^{(k)} \quad (25)$$

$$s_{bi}^{(k+1)} = \left[ \frac{a_i^{(k)} \lambda^{(k+1)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}} \lambda_g^{(k+1)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}}} \right]^\beta b_i^{(k)} \quad (26)$$

から、(23),(24)式により設計変数を更新し、これから(19),(20)式により  $\lambda, \lambda_g$  を再度更新する。これを(25),(26)式に代入し、(23),(24)式によりまた設計変数を更新するというようなループを繰り返す。ただしこの間(25),(26)式の  $a_i^{(k)}, b_i^{(k)}$  は更新しない。

以上の計算の流れをまとめると、(23),(24)式で前ステップの解から設計変数の値を更新し、これから(19),(20)式によってラグランジュ未定係数を更新する。そして、(25),(26)式を用いた内側のループにより、制約条件を満足するようにさらに設計変数の更新を行う。これを次ステップの設計変数として、平均コンプライアンス、質量(総密度比)を計算し、感度係数を求め、再び(23),(24)式によって設計変数を更新する。このような手続きを与えられたステップ数まで繰り返す。

なお、(21)式中の平均コンプライアンス  $C$  の設計変数  $a_i$  に関する感度係数は次式のようにして求められる。

$$\frac{\partial C}{\partial a_i} = \frac{\partial(\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d})}{\partial a_i} = \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} \mathbf{d} - 2 \mathbf{d}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial a_i} \quad (27)$$

ただし、変位ベクトル  $\mathbf{d}$  は次式の剛性方程式

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (28)$$

解であるから、(28)式の両辺を設計変数  $a_i$  で偏微分すると、

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial a_i} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} \mathbf{d} \quad (29)$$

となるので、これを(27)式に代入すると次式となる。

$$\frac{\partial C}{\partial a_i} = -\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} \mathbf{d} = -\mathbf{d}^{eT} \frac{\partial \mathbf{K}^{ei}}{\partial a_i} \mathbf{d}^{ei} = -\mathbf{d}^{eT} \left( \int_{\Omega^{ei}} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial a_i} \mathbf{B} \mathbf{d} \Omega^{ei} \right) \mathbf{d}^{ei} \quad (30)$$

ここに、 $\mathbf{K}^{ei}, \mathbf{d}^{ei}$  は  $i$  番目要素の要素剛性マトリックスと節点変位ベクトル、 $\mathbf{B}$  は  $i$  番目要素のひずみ-変位関係マトリックス、 $\mathbf{D}^H$  は均質化法によって求められる均質化弾性マトリックス、 $\Omega^{ei}$  は  $i$  番目要素の領域を表す。なお、 $\mathbf{D}^H$  に関してはマイクロ構造の穴の大きさ  $a, b$  に関するデータベースをあらかじめ作成しておき、設計変数に対する感度係数はその補間関数を微分することによって求める。なお、本論文では文献 9)と同じデータベースを用いる ( $a, b$  に関して  $51 \times 51$  点の  $\mathbf{D}^H$  を計算したデータベース)。

### 3. 密度法による3次元問題の位相最適化

#### 3.1 最適化問題の定式化

密度法<sup>12),17),18),19)</sup>は、材料の弾性剛性が密度比のべき乗に比例すると仮定し、図3に示すように各有限要素の密度比を設計変数として最適位相を求める方法である。これは、均質化設計法の穴の大きさを  $a=b$  として材料の等方性を仮定したものに対応する。

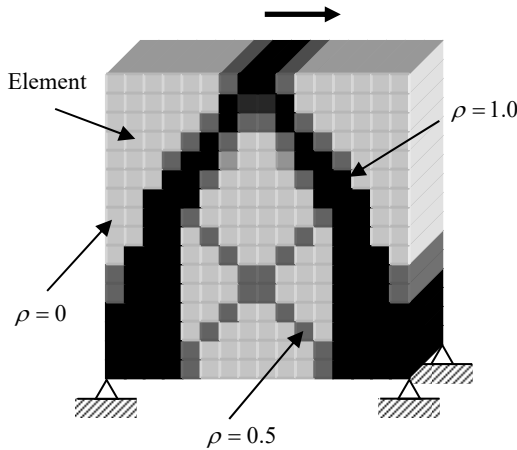


図3 密度法による位相最適化

(5)式と同様に、密度法による構造物の位相最適化問題は次式のように定式化される。

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\rho}} [C(\boldsymbol{\rho})], \quad C(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \mathbf{L} = \left\{ \boldsymbol{\rho} \mid 0 \leq \rho_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \sum_{i=1}^N \rho_i \leq m_s, G(\boldsymbol{\rho}) \geq \bar{G} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

ここに、 $\boldsymbol{\rho}$  は各要素の密度比  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$  で、その他の変数は(5)式と同じである。ただし密度法では、全体剛性マトリックス  $\mathbf{K}$  は、要素密度比の関数として次のように表される。

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{A} \left( \rho_i^p \mathbf{K}^{ei} \right) \quad (32)$$

ここに、 $\mathbf{A}$  は要素剛性マトリックスの重ね合わせを表す記号、 $\mathbf{K}^{ei}$  は  $i$  番目要素の剛性マトリックスである。また、 $p$  はべき乗係数で、本論文では文献 19)にしたがい  $p=2$  とする。また、重力制御関数  $G$  は(3)式と同様に次式で定義される。

$$G(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N g_i(\boldsymbol{\rho}) / \sum_{i=1}^N m_i \quad (33)$$

ここに、 $g_i$  の定義は(4)式と同じであるが、 $m_i$  は  $i$  番目の要素と面を共有する要素で、内部の要素では6、端や隅の要素ではそれ以下となる。

#### 3.2 最適性規準法による解法

(31)式を最適性規準法によって解く。まず、設計変数を次式のように  $\boldsymbol{\rho}$  から  $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\rho})$  に変更する。

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\alpha}} [C(\boldsymbol{\alpha})], \quad C(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \mathbf{L} = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) \leq m_s, G(\boldsymbol{\alpha}) \geq \bar{G} \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、 $\rho_i = (1 - \alpha_i), i=1, \dots, N$  である。このような変更により、(34)式は(5)式の穴の寸法を等しくして、この穴の寸法を設計変数にすることに対応する(ただし、均質化法では、弾性定数は密度のべき乗関数にはならない)。最適性規準法の場合、重力制御関数の制約との関係から設計変数をこのように設定する方がフィルタリングの効率が良い。

(34)式のLagrangianは次式となる。

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = C(\boldsymbol{\alpha}) - \lambda \left( \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) - m_s \right) - \lambda_g (\bar{G} - G(\boldsymbol{\alpha})) \quad (35)$$

次に、(35)式を設計変数とラグランジュ乗数に関して変分をとることにより、

$$\begin{aligned} \delta L(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial C(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} + \lambda + \frac{\partial G(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \lambda_g \right) \delta \alpha_i \\ &- \left( \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) - m_s \right) \delta \lambda - (\bar{G} - G(\boldsymbol{\alpha})) \delta \lambda_g = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

(12)式と同様に、(36)式の  $\delta \alpha_i (i=1, \dots, N), \delta \lambda, \delta \lambda_g$  の任意性から次式の最適性規準を作ることができる。

$$\alpha_i^{(k+1)} = \left[ \frac{A^{(k)} + \frac{\partial G(\boldsymbol{\alpha}^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\boldsymbol{\alpha}^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}}} \right]^\beta \alpha_i^{(k)} \quad (i=1, \dots, N) \quad (37)$$

$$A^{(k+1)} = \left[ \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i^{(k)}) \right]^\beta A^{(k)}, \quad \lambda_g^{(k+1)} = \left[ \frac{\bar{G}}{G(\boldsymbol{\alpha}^{(k)})} \right]^\beta \lambda_g^{(k)} \quad (38), (39)$$

また、 $\alpha_i, A, A_g$  には次式の制約条件

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \quad A \leq 0, \quad A_g \leq 0 \quad (40)$$

があるので、(37)~(39)式より次式の最適性規準が得られる。

$$\alpha_i^{(k+1)} = \min \left\{ \max \{0, s_i^{(k)}\}, 1 \right\} \quad (41)$$

$$A^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[ \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i^{(k)}) \right]^\beta A^{(k)} \right\} \quad (42)$$

$$A_g^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[ \frac{\bar{G}}{G(\boldsymbol{\alpha}^{(k)})} \right]^\beta A_g^{(k)} \right\} \quad (43)$$

ここに、

$$s_i^{(k)} = \left[ \frac{A^{(k)} + \frac{\partial G(\boldsymbol{\alpha}^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}} A_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\boldsymbol{\alpha}^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}}} \right]^\beta \alpha_i^{(k)} \quad (44)$$

均質化設計法の場合と同様に、(41)式には、設計変数の変動幅の制約を課す。また、 $A, A_g$  は最適化繰返し計算の各ステップの内側のループでも収束計算を行う。

なお、平均コンプライアンス  $C$  の設計変数  $\alpha_i$  に関する感度係数は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_i} \mathbf{d} = -\mathbf{d}^{eiT} \frac{\partial \left( (1 - \alpha_i)^p \mathbf{K}^{ei} \right)}{\partial \alpha_i} \mathbf{d}^{ei} \\ &= \mathbf{d}^{eiT} \left( p(1 - \alpha_i)^{p-1} \mathbf{K}^{ei} \right) \mathbf{d}^{ei} \end{aligned} \quad (45)$$

## 4. 解析例

### 4.1 パラメータの設定

最適性規準法では、以下のパラメータの設定が必要である。

- 1) (19)-(22),(42)-(44)式のべき乗係数  $\beta$
- 2) 設計変数の変動幅の制約値 (move limit)  $\zeta$
- 3) 感度係数を更新する外側ループの繰返し回数
- 4) 感度係数を更新しない内側ループの繰返し回数

以上のパラメータを決定するために、4.2 節に示す例題で数値実験を行った。まず、1)と2)の  $\beta, \zeta$  は、いずれも設計変数の変動幅を制約するものである。4.2 節に示すフィルタリングを除いた例題で調査した結果、move limit を設けない場合は  $\beta$  が 0.25 以下で妥当な解が得られることがわかった。そこで、 $\beta$  は 0.25 に設定し、 $\zeta$  に関して調査したところ同じ例題では 0.1 の近傍で最小の平均コンプライアンスが得られた。そこで、ここでは  $\zeta = 0.1$  に設定した。次に、3)の感度係数を更新する外側のループの繰返し回数は、30 回程度で平均コンプライアンスの値がほぼ一定になる。しかし、この段階では設計変数等は(8)-(11)の最適性規準を満足していないため、ここから move limit  $\zeta$  を  $\zeta^{(k+1)} = \zeta^{(k)} / 1.1^{(k-29)}$  ( $k = 30, 31, \dots$ ) として絞り込みトータル 40 回まで繰返すこととした。また、感度係数の計算をしない内側のループは、100 回程度で質量制約がアクティブになる (制約値に等しくなる)。しかしながら、重力制御関数値を各ステップでアクティブにすると、この制約が敏感に効きすぎて、最適解から大きく外れてしまう。したがって、 $A_g$  の更新は質量制約に比較して少なくする必要がある。そこで、本プ

ログラムでは、 $A$  に関する更新は 100 回、 $A_g$  に関する更新は 5 回に設定した。

### 4.2 均質化設計法による解析例

均質化設計法におけるフィルタリングの効果を示すために 2 次元問題の解析例を示す。有限要素としては、せん断剛性に関して低減積分を行った 4 節点アイソパラメトリック要素を用いる。

まず、既往の文献によく引用されている 図 4 に示すような MBB はり<sup>9),18)</sup>の解析例を示す。解析は対称性を利用して 1/2 領域で行い、有限要素分割は、この領域で  $75 \times 25$  とした。総密度比の制約値は  $m_s / N = 0.5$  (全密度比を 1 とした場合の 50%) とした。なお、弾性マトリックスは平面応力問題のものを用いている。

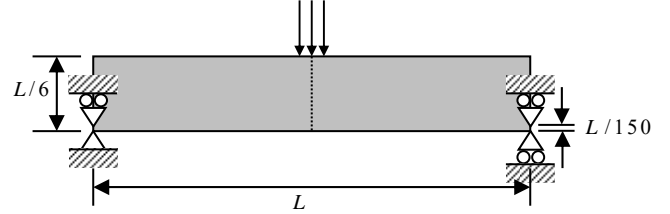


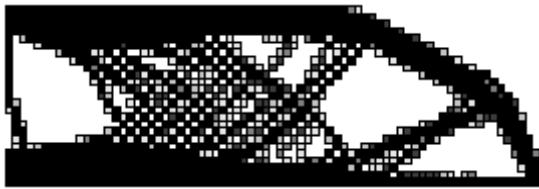
図 4 MBB はりモデルのトポロジー解析領域

図 5 は、フィルタリングの効果を示すために、重力制御関数の制約値  $\bar{G}$  を変化させた場合の結果を示している。図中の  $G$  は最適解における重力制御関数値、 $\bar{m}$  は最適解における総密度比の比率、

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^N (1 - a_i b_i)}{N} \quad (46)$$

である。また、 $C/C_0$  は、フィルタリングをかけた場合の平均コンプライアンス値を、 $\bar{G} = 0$  の場合の平均コンプライアンス値  $C_0$  との比で示したものである。なお、図ではグレースケールのフィルタリング効果も示すため、密度比のしきい値を 0.1 とし、それ以下の要素は除いている。図からわかるように、重力制御関数値を制約しない場合 ( $\bar{G} = 0$ ) は、チェッカーボード状の密度分布が現れ、どこをどうつなげばよいかははっきりしない。これに対して、制御関数の制約値が 0.8 以上の場合には非常にはっきりした位相が得られ、設計者に明確な情報を与えることができる。また、制約値が 0.8 以上では、平均コンプライアンス値が徐々に高くなり最適解からは外れるが、構造のシンプルさが要求され、どこかの部材を省く必要がある場合には、このような位相が利用できる。なお、図 5(c) ( $\bar{G} = 0.85$ ) で、(b)の解 ( $G = 0.87$ ) が得られないのは、局所解に収束しているためと考えられる。

図 6 は  $\bar{m}_s (= m_s / N)$  を 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 に変化させた場合の解析結果 (全体図) を示している。ただし、重力制御関数の制約値  $\bar{G}$  は、解の平均コンプライアンス値が、制約しない場合と比較して大きく変化しない範囲で定めている。また、図では、密度比のしきい値は 0.3 とし、それ以下の要素は除いている (実用的にはこの程度のしきい値を設定すればよい)。図からわかるように、どの  $\bar{m}_s$  に対しても非常に明確な位相が得られており、本論文で示したフィルタリング法が有効であることがわかる。なお、重力制御関数の制約値は、まず、制約なしの場合を計算し、それから 0.05 ~ 0.1 程度上げた値で制約すれば、平均コンプライアンス値を大きく上げることなく、しかも鮮明な位相が得られる。



(a)  $\bar{G}=0, G=0.73, \bar{m}=0.50$



(b)  $\bar{G}=0.8, G=0.87, \bar{m}=0.50, C/C_0=1.02$



(c)  $\bar{G}=0.85, G=0.89, \bar{m}=0.50, C/C_0=1.08$



(d)  $\bar{G}=0.90, G=0.90, \bar{m}=0.50, C/C_0=1.18$

図5 MBB ばりの最適位相 ( $\bar{G}$  を変化した場合)



(a)  $\bar{m}_s=0.3, \bar{m}=0.30, \bar{G}=0.85, G=0.85, C/C_0=1.05$



(b)  $\bar{m}_s=0.4, \bar{m}=0.40, \bar{G}=0.85, G=0.87, C/C_0=1.08$



(c)  $\bar{m}_s=0.5, \bar{m}=0.50, \bar{G}=0.85, G=0.89, C/C_0=1.08$



(d)  $\bar{m}_s=0.6, \bar{m}=0.60, \bar{G}=0.8, G=0.89, C/C_0=1.03$

図6 MBB ばりの最適位相 ( $\bar{m}_s$  を変化した場合)

### 4.3 密度法による解析例

次に、密度法におけるフィルタリングの効果を示す。密度法に

よる位相最適化に用いる有限要素としては、関口と菊池<sup>20</sup>が提案している応力仮定法にもとづく8節点長方柱要素を採用する<sup>12</sup>。また、本プログラムでは大規模計算が可能となるように連立方程式の解法としてElement-by-Element法にもとづく前処理付共役勾配法<sup>21</sup>を用いている。この方法では、通常のパソコンのメモリ256Mbyte内で、50万要素程度までの解析が可能である<sup>12</sup>。なお、密度法では、要素形状が等しい場合、要素剛性マトリックスの再計算の必要がなく、共役勾配法の計算効率が非常に良い。

まず、4.2節に示したMBBばりの例題をソリッド要素で解析した例を示す。要素分割数は $75 \times 25 \times 1$ とし、総密度比の制約値は $\bar{m}_s=0.5$ としている。図7は、フィルタリングの効果を示すために、重力制御関数の制約値 $\bar{G}$ を変化させた場合の結果を示している。なお、3次元問題の位相表示は複雑であるため、ここでは、Open-GLを用いて作成したグラフィックスソフトにより結果を表示している。このためグレースケールの表示はしていない。また、密度比のしきい値は0.3としている。図からわかるようフィルタリングをかけない場合( $\bar{G}=0$ )は、均質化設計法による解よりもさらに顕著にチェッカーボード状の密度分布が現れる。しかし、 $\bar{G}$ が、0.75の場合は図5の(b)と、0.8の場合は図5の(c)、(d)と類似した位相が得られている。また、総密度比 $\bar{m}$ はすべての場合で制約値に一致している。



(a)  $\bar{G}=0, G=0.61, \bar{m}=0.50$



(b)  $\bar{G}=0.75, G=0.84, \bar{m}=0.50, C/C_0=1.04$



(c)  $\bar{G}=0.8, G=0.88, \bar{m}=0.50, C/C_0=1.21$

図7 密度法によるMBBばりの解析結果

図8は $\bar{m}_s(=m_s/N)$ を0.3, 0.4, 0.5, 0.6に変化させた場合の解析結果(全体図)を示している。ただし、重力制御関数の制約値 $\bar{G}$ は、チェッカーボード分布がほぼ消える値に設定している。また、図では、密度比のしきい値は0.3とし、それ以下の要素は除いている。図において、 $\bar{m}_s=0.3$ の場合で、 $\bar{G}$ と $C/C_0$ の値が大きくなっているのは、総密度比が小さい問題では、チェッカーボード状の複数の要素で面的に(薄板として)剛性を高める方が構造上

有利になるため、接合部付近のチェッカーボードが消えにくいことに起因する。図より、図6の均質化設計法の結果に比較すると形態変化の自由度の点で劣るが、フィルタリングの効果により密度法においてもそれなりに明確な位相が得られることがわかる。

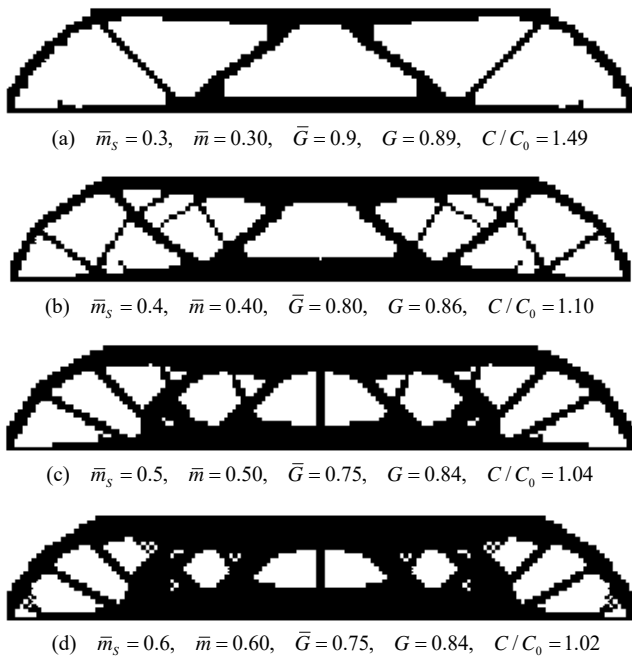


図8 密度法による MBB はりの最適位相 ( $\bar{m}_s$  を変化させた場合)

#### 4.4 コンクリートラーメンの解析例

建築的な例題として、1層コンクリートラーメンを想定した例題を解析する。設計領域は図9に示すものとし、荷重は鉛直等分布荷重と鉛直荷重の0.2倍の水平等分布荷重を加える。底面の支持部は、柱脚に相当する部分(50cm×50cm)のみを完全固定とする。また、図の梁部分(50cm×50cm)の設計は固定し、梁を除いた部分を設計対象とする。設計領域の寸法は図中に示すように、アスペクト比を変化させた3種の場合について解析する。材料はコンクリートとし、ヤング係数は20.6GPa、ポアソン比は1/6としている。解析は密度法による3次元解析法によって行い、それぞれの場合の有限要素分割数は、Case1が60×5×40、Case2が40×5×40、Case3が40×5×60とする。また、総密度比の制約値 $\bar{m}_s$ は0.2に設定する。なお、本例題は応力分布が非対称となるため、プログラム内で設計変数を設計領域中心のxz面に対して対称となるように設定している。

重力制御関数の制約値に関しては、0.8から0.1ずつ順に上げて調査した結果、制約値0.8および0.9では、指定した制約値を満足せず、最終解にチェッカーボード分布が見られた。これは、この問題の場合、荷重が分布荷重であるため、構造的に面(板)構造が現れやすいことが原因と考えられる。この対策としては、 $\Lambda_g$ に関する内側ループの繰り返し回数を増やすことと、重力制御関数の制約の影響を高めるため制約値をさらに上げることが考えられる。しかし、内側ループの繰り返し回数を増やすと総密度の制約が満足されなくなるため、ここでは、後者の方法を採用し、重力制御関数値を、実際には制約が満足されない1.1に設定した。

図10,11,12は、Case1~Case3について、以上の設定にしたがって解析した結果を、2次元図と透視図で示している。なお、密度比のしきい値は0.3としている。これらの図からわかるように、チェッカーボード分布が一部残っているものもあるが、重力制御関数値の制約値を高め設定することで、設計者に明確な情報を与えることのできる位相が求まっている。なお、図には最適解の総密度比と重力制御関数値が示されているが、総密度比はほぼ制約値と一致しており、質量制約は乱されていないことがわかる。

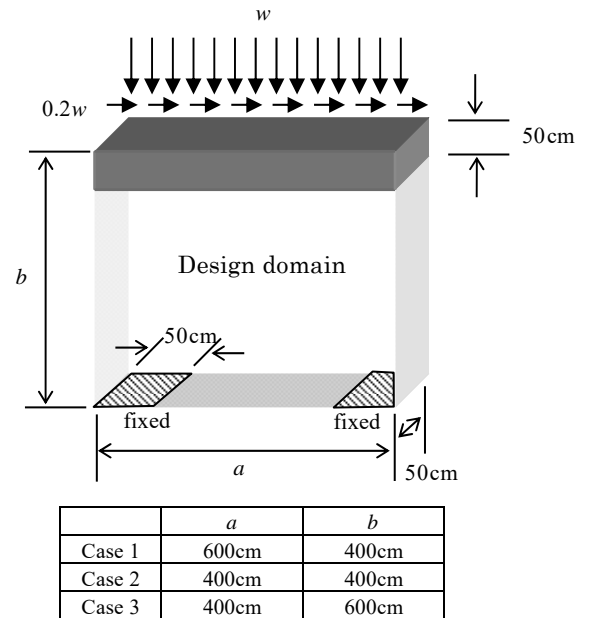


図9 コンクリートラーメン構造を想定した設計領域

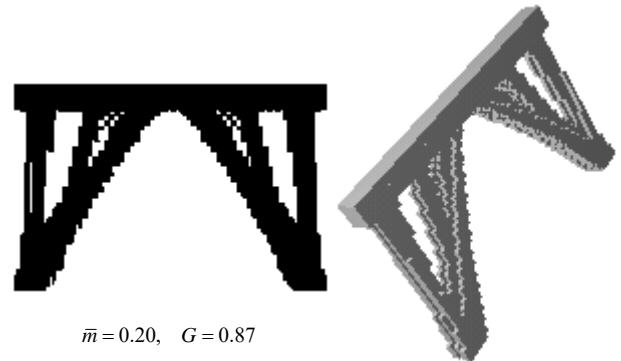


図10 コンクリートラーメンの最適位相 (Case1)

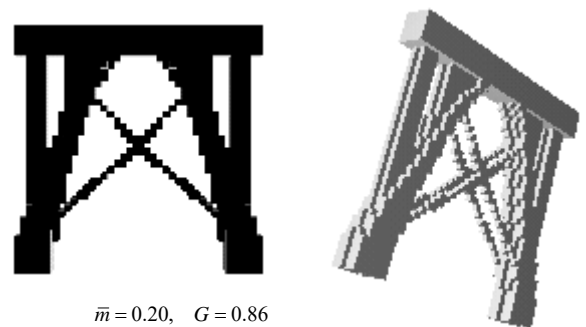


図11 コンクリートラーメンの最適位相 (Case2)

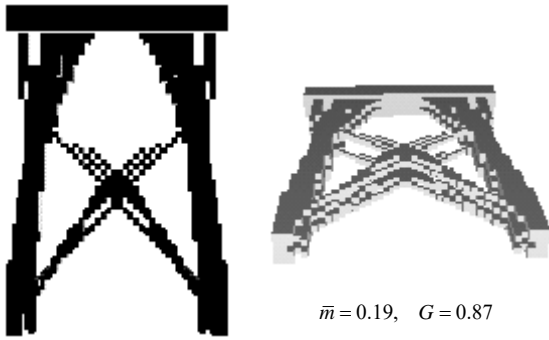


図 12 コンクリートラーメンの最適位相 (Case3)

## 5. まとめ

本論文では、均質化設計法および密度法によって定式化された位相最適化問題を最適性規準法を用いて解く場合に有効となるフィルタリング法の提案を行った。本フィルタリング法は、要素の周辺にソリッドまたは空隙を集中させる重力制御関数を最適化問題の制約条件として制御するものであり、最適解に頻繁に現れるチェッカーボード状の密度分布を防ぎ、よりシンプルで明解な位相を求めることができる。

本方法の有効性を MBB はりの例題を解析することによって検討した結果、均質化設計法による 2 次元解析では、重力制御関数値を制約することでチェッカーボード状の密度分布が消え、さらにその制約値を高くすることによって、よりシンプルな形態が得られることがわかった。また、密度法による 3 次元解析においても、フィルタリングの効果は均質化設計法の場合と同様に有効であることがわかった。

次に、密度法による解法を利用して、コンクリートラーメンを想定した例題を解析した結果、分布荷重を受ける例題では、チェッカーボード状の密度分布が現れやすく、重力制御関数値の制約と総密度比の制約を同時に満足する解が得られなかった。しかし、このような場合でも、重力制御関数値を 1 以上の高い値に設定することで、チェッカーボード状の密度分布が少ない明解な位相を得ることができた。

**謝辞**：本研究を遂行するにあたり、平成 12 年度科学研究費（基盤研究(c)(2)）の補助を受けた。榎くいと石井恵三氏、江島晋氏より貴重な助言を頂いた。また、東京大学工学部船舶海洋工学科卒業生小玉浩平君に 3 次元位相を表示するプログラムを作成して頂いた。ここに記して謝意を表します。

## 参考文献

- 1) 大森博司, 鬼頭伸彰: 遺伝的アルゴリズムを用いたトラス構造の形態創出, 日本建築学会構造系論文集, No.520, pp.85-, 1999.6
- 2) 鈴木謙仁, 大森博司, 張奕: ESO 法による構造最適化問題の解析 (その 1: 応力を基準とした場合), 日本建築学会大会梗概集, B-1 分冊, pp.387-388, 1999
- 3) 張奕, 大森博司, 鈴木謙仁: ESO 法による構造最適化問題の解析 (その 2: 変位制限下における解析), 日本建築学会大会梗概集, B-1 分冊, pp.389-340, 1999

- 4) 本間俊雄, 登坂宣好, 角 広幸: 自律分散アプローチによる逆問題の計算法—自律分散有限要素法の提案と応用—, 日本建築学会構造系論文集 NO.526, pp.69-76, 1999.12
- 5) 本間俊雄, 登坂宣好: セル・オートマトンの節点近傍モデルを用いたトポロジー最適化, 計算工学講演会論文集, Vol.5, pp.441-444, 2000
- 6) K. Maute and E. Ramm: Adaptive Topology Optimization of Shell Structures, AIAA Journal, Vol.35, No.11, 1997
- 7) E. Ramm, K. Maute, S. Schwarz: Conceptual design by structural optimization. In: R. de Borst., N. Bicanic, G. Meckhe (eds) Conference Proceedings of EURO-C 1998, Badgastein, Austria, pp.879-896, Balkema, Rotterdam, 1998
- 8) 藤井大地, 松本慎也, 藤谷義信, 菊池昇: グランドストラクチャー法による骨組構造の位相最適化, 日本建築学会構造工学論文集, Vol.46B, pp.1-8, 2000
- 9) 藤井大地, 菊池昇: SLP 法を用いたトポロジー最適化における数値的不安定の改善, 日本建築学会構造系論文集, No.521, pp.65-72, 1999.7
- 10) D. Fujii, N. Kikuchi: Improvement of numerical instabilities in topology optimization using the SLP method, Structural Optimization, Vol.19, pp.113-121, 2000
- 11) 藤井大地, 菊池昇: 均質化法によるシェル構造の形状とトポロジーの同時最適化, 日本建築学会大会梗概集, B-1, pp.383-384, 1999
- 12) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣: ボクセル有限要素法を用いた構造の位相最適化, 日本計算工学会論文集, Vol.2, pp.87-94, 2000
- 13) K. Maute and E. Ramm: Adaptive topology optimization, Structural Optimization, Vol.10, pp.100-112, 1995
- 14) O. Sigmund and J. Petersson: Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, Structural Optimization, Vol.16, pp.68-75, 1998
- 15) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi: Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 16) K. Suzuki and N. Kikuchi: A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 17) Bendsøe, M. P., Optimal shape design as a material distribution problem, Struct. Optimiz., 1, 193-202, 1989
- 18) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N., The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, 309-336, 1991
- 19) Yang, R.J. and Chuang, C.H., Optimal topology design using linear programming, Computers & Structures, 52(2), 265-275, 1994
- 20) 関口美奈子, 菊池昇, 混合的な有限要素剛性マトリックスの導き方に関する一考察—Clough 1960 年の論文を中心として—, 計算工学講演会論文集, 4(1), pp.131-134, 1999
- 21) 鈴木克幸分担執筆, 計算力学ハンドブック (I 有限要素法構造編), 日本機械学会, pp.23-31, 1998

(2000 年 8 月 21 日原稿受理, 2000 年 12 月 14 日採用決定)

# CA-ESO 法による構造物の位相最適化 TOPOLOGY OPTIMIZATION OF STRUCTURES USING CA-ESO METHOD

藤井大地\*, 真鍋匡利\*\*  
*Daiji FUJII and Masatoshi MANABE*

Recently, many heuristic methods for topology optimization of structures have been proposed. However, the heuristic method has not been adopted by general-purpose software, because there are several problems in the computational efficiency and the reliability of the solutions. In this paper, a new heuristic method using cellular automaton (CA) and evolutionary structural optimization (ESO) is proposed for implementing to general-purpose software. In this method, the design domain is divided in same FEM elements (cells), and in the optimization process, the elements are deleted by extended ESO method, and the elements are generated by CA method. The performance of the present method is clarified by comparing with SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) method under the same FEM model and the same conditions. Several numerical examples are shown in order to demonstrate the computational efficiency and the reliability of the present method.

**Keywords:** Topology optimization, Heuristic method, CA method, ESO method, SIMP method, Structural Morphogenesis

位相最適化, 発見的手法, CA 法, ESO 法, SIMP 法, 構造形態創生

## 1. はじめに

境界形状だけでなく内部の穴の数や穴の形状まで最適化できる位相最適化手法は、機械部品の軽量化や建築構造の形態創生など幅広く応用が進んでいる。このような位相最適化手法は、大きく数理計画法にもとづく方法と発見的手法にもとづく方法の2種に分類される。数理計画法にもとづく方法としては、周期的なマイクロ構造の孔の大きさを設計変数として最適化する均質化法 (Homogenization Design Method)<sup>1),2)</sup>、要素の材料密度を設計変数として最適化する SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法<sup>3),4)</sup>、レベルセット関数の等位面を用いて最適化するレベルセット法 (Level Set Method)<sup>5)-7)</sup>などが代表的である。一方、発見的手法にもとづく方法としては、有限要素解析を繰返し、単に応力の低い要素を除去していく ESO (Evolutionary Structural Optimization) 法<sup>8)</sup>とこれに要素生成ルールを付加した双方向 ESO 法<sup>9),10)</sup>および拡張 ESO 法<sup>11)-13)</sup>、要素の生成・除去を対象要素とその周辺要素の応力状態によって行う CA (Cellular Automaton) 法<sup>14)-16)</sup>、応力状態により要素を複数のグループに分け、グループごとの生成・除去を遺伝的アルゴリズムで行う GA (Genetic Algorithm) 法<sup>17)-19)</sup>などが代表的である。

この内、数理計画法にもとづく方法は、汎用ソフトにも実装され、主に機械分野の部品設計などに広く利用されている。これに対して、発見的手法にもとづく方法は、一般にはあまり普及していないのが

現状である。この要因としては、計算効率、パラメータ設定の難易度、得られる解の信頼性・安定性などが考えられる。そこで、本研究では、汎用ソフトへの実装を視野に、計算効率と解の信頼性・安定性を兼ね備えた新たな発見的位相最適化手法を提案する。

本論文で提案する手法は、CA 法と拡張 ESO 法のそれぞれの利点を組み合わせたもので、以下 CA-ESO 法と呼ぶ。本手法では、要素除去については計算効率の良い拡張 ESO 法のルールを採用し、要素生成については対象要素の応力によって周辺要素を生成する CA 法のルールを採用する。本手法は、CA 法に比較して計算効率が良く、また、拡張 ESO 法に比較して応力等値線を用いないため、ソフトウェアへの実装が容易となる。さらに、本手法では感度解析を必要としないため、数理計画法にもとづく方法と同等の性能が保証されれば、感度解析が難しい問題にも拡張が容易となる。

本論文では、CA-ESO 法の計算効率や解の信頼性を検証するため、数理計画法にもとづく方法と可能な限り同じ条件下で比較を行う。数理計画法にもとづく方法としては、著者の一人が開発したフィルタリング機能を持つ SIMP 法<sup>20)</sup>を用いる。また、本論文に示す CA-ESO 法では、この SIMP 法と条件を合わせるため、同じ有限要素を用い、メッシュ分割等も同一とする。また、最適化の過程において有限要素のリメッシュは行わず、除去要素については材料密度を 0 に近い値にすることで解析を行う。

本論文の一部は文献(24)-30)で既に発表している。

\* 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

\*\* (株)木村建築設計事務所 修士(工学)

Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr. Eng.  
Staff Member, Kimura Architects and Engineers Office, M. Eng.

以下、本論文2章では、比較に用いる2次元構造を対象としたSIMP法による位相最適化手法を示す。3章では、CA-ESO法による位相最適化手法を示す。4章では、CA-ESO法とSIMP法の解析結果を比較することで、CA-ESO法の性能を明らかにする。5章では、以上のまとめを述べる。

### 2. SIMP法による2次元構造の位相最適化<sup>20)</sup>

2次元構造(面内変形)の応力解析には、4節点アイソパラメトリック要素を用いる。ただし、シアロックを避けるために選択低減積分法を用いる。

SIMP法(密度法)では、要素の剛性に比例する係数を要素密度と定義し、 $i$ 番目要素の剛性マトリクスが次式で表されるものとする。

$$\mathbf{k}_i = (\rho_i)^p \cdot \mathbf{k}_i^0 \quad 0 < \rho_i \leq 1 \quad (1)$$

ここに、 $\rho_i$ と $\mathbf{k}_i^0$ は $i$ 番目要素の要素密度と初期の要素剛性マトリクスを表し、 $p$ は要素密度をなるべく0または1に近づけるためのべき乗係数であり、ここでは $p=2$ としている。

SIMP法では、(1)式の要素密度 $\rho_i$ を設計変数として、次式の最適化問題を解く。

$$\begin{aligned} \min \quad & f_{obj}(\boldsymbol{\rho}) = C(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & m(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N \rho_i \leq \bar{m} \\ & \boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_N\} \quad 0 < \rho_i \leq 1, \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $C$ はコンプライアンス、 $\mathbf{d}, \mathbf{K}$ は節点変位ベクトルと全体剛性マトリクス、 $m$ は総密度、 $\bar{m}$ は総密度の制約値、 $N$ は要素総数である。

文献20)に示す方法では、0と1の間の密度(グレースケール)やチェッカーボード状の密度分布を防ぐために独自のフィルタリング手法を用いている。この場合、(2)式の目的関数 $f_{obj}$ は次式のように書き換えられる。

$$f_{obj}(\boldsymbol{\rho}) = C(\boldsymbol{\rho}) + w \cdot C^0 [1/G(\boldsymbol{\rho})] \quad (3)$$

ここに、 $w$ は重み係数、 $C^0$ は初期(均等密度)のコンプライアンス、 $G(\boldsymbol{\rho})$ は次式で定義される関数である。

$$G(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} [\rho_i \rho_j + (1-\rho_i)(1-\rho_j)] / \sum_{i=1}^N n_i \quad (4)$$

ただし、 $n_i$ は $i$ 番目要素と辺を共有する要素の数である。(4)式の $G$ は $0 \leq G \leq 1$ の範囲で、グレースケールやチェッカーボード状の密度分布が増えると値が小さくなる関数である。

目的関数を(3)式とした(2)式の最適化問題は、CONLIN法を用いた非線形計画法で解かれる。この場合、設計変数を逆数とする方が計算効率が良いなどのテクニックがあるが、詳しくは文献20)を参考にされたい。

### 3. CA-ESO法による位相最適化

2章に示した方法に対して、CA-ESO法では、各有限要素の応力を指標として要素の除去・生成を繰り返し、最終的に目的の位相を求める。この場合、SIMP法等の数理計画法と比較して、感度解析の必要がなく、感度解析が容易でない問題にも簡単に適用できるという利点がある。

ここでは、2章に示した方法となるべく条件を合わせるため、(1)式と同様の要素密度を設計変数とする。そして、最適化の過程でリメッシュは行わず、存在要素(または生成要素)の密度を1、除去要素の密度を0に近い値とすることによって目的の位相を求める。なお、本手法では、要素応力が除去・生成の指標となるため、剛性が小さくなりすぎて応力に誤差が生じないように除去要素の要素密度を $1/10^3$ とし、(1)式の $p$ は1として計算する。

#### 3.1 ESO法による要素の除去

CA-ESO法では、要素除去に関しては、拡張ESO法のルールを用いる。拡張ESO法<sup>11)</sup>では、各要素のVon Mises応力

$$\sigma_i^{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6\tau_{xy}^2} \quad (5)$$

を要素除去に関する指標とし、この応力が次式の閾値 $X_{cr}$ 以下になると要素が除去される(図1参照)。

$$X_{cr} = \sigma_m - \eta \cdot \phi \quad (6)$$

ただし、 $\sigma_m$ と $\phi$ は残存要素のVon Mises応力の平均値と偏差平均であり、次式から計算される。

$$\sigma_m = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} \sigma_i^{VM} \quad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_L} (\sigma_i^{VM} - \sigma_m)^2}{N_L}} \quad (7)$$

ここに、 $\sigma_i^{VM}$ は $i$ 番目要素のVon Mises応力、 $N_L$ は残存要素数(密度 $1/10^3$ 以外の要素数)である。また、(6)式の $\eta$ は要素の除去量を制御する制御変数である。

なお、(6)式の $X_{cr}$ は、応力の不均等性が高い場合は低い閾値となり、応力が平均値に均等化されてくると高い閾値となる。また、制御変数 $\eta$ が大きいと要素が除去されにくく、 $\eta$ が小さいと除去されやすくなる。

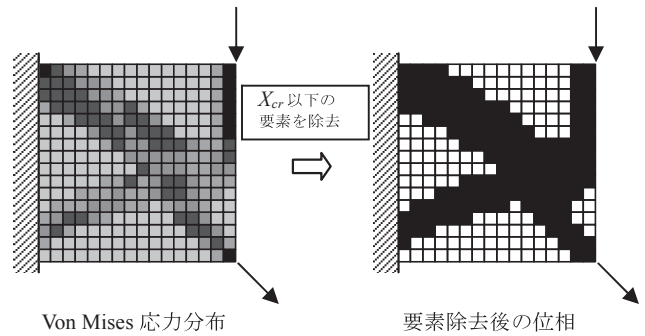


図1 ESO法による要素除去

#### 3.2 CA法による要素の生成

拡張ESO法では、要素の生成は応力等値線を用いることによって行うが、CA-ESO法では、要素の生成をCA法のルールに基づいて行う。

本論文では、 $i$ 番目要素のNeumann近傍(辺を共有する要素)に対して、次式の簡単なルールを採用する。

$$\rho_j = 1 \quad \text{if} \quad \sigma_j^{CA} \geq \sigma_m^{CA} \quad ; j=1, \dots, n_i \quad (8)$$

ただし、 $\sigma_m^{CA}$ は残存要素の応力平均値で(7)式の $\sigma_m$ と同様に計算される。また、 $n_i$ は(4)式で定義される辺を共有する要素数(ノイマン



近傍の要素数)である。すなわち、図2に示すように、 $i$ 番目の要素の Von Mises 応力が  $\sigma_m^{CA}$  以上であれば、すべての Neumann 近傍要素の密度が1になり、 $\sigma_m^{CA}$  未満であれば、元の状態が保たれる。

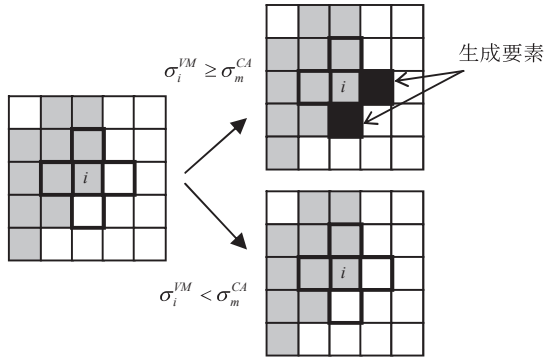


図2 CA法による要素生成

3.3 CA-ESO法の計算フロー

図3はCA-ESO法の計算フローを示したものである。図に示すように、本方法では、総密度  $m$  が与えた制約値  $\bar{m}$  より大きい場合は ESO 法による要素除去を行い、制約値以下になった場合は、CA 法による要素生成を行う。そして、各ステップで制約条件を  $0.95 < m/\bar{m} < 1.02$  の範囲で満たし、目的関数値(コンプライアンス値)が最小になる解  $\mathbf{p}$  を保存し、これを最終的に出力する。

以上の計算において、問題によっては同じ解が繰り返し現れ、解が収束しない場合がある。そこで、本手法では、以下の方法により、このような問題を回避する。

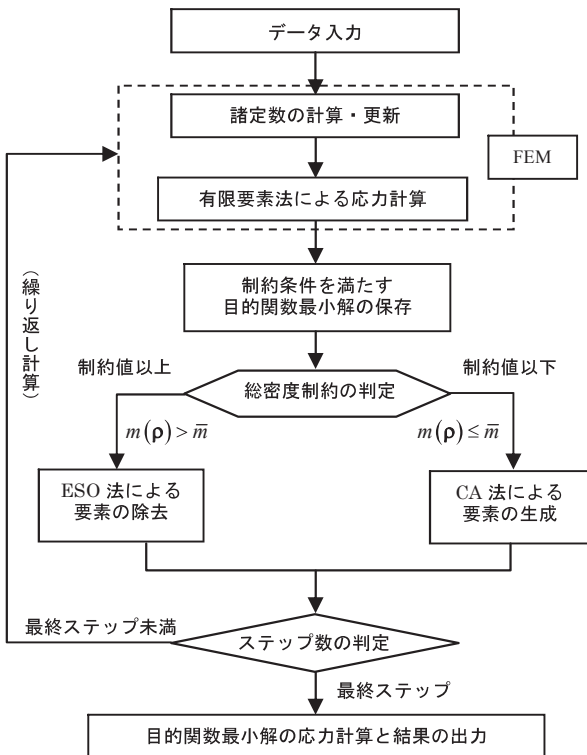


図3 CA-ESO法の計算フロー

- (a) CA 法において、応力平均値が変化せず、ステップが進んでも要素生成が行われない場合があるため、総密度  $m$  が制約値  $\bar{m}$  以下になる場合、各ステップで 1%ずつ応力平均値  $\sigma_m^{CA}$  の値を減少させる。ただし、総密度が制約値を超えた時点で元に戻し、再び、制約値以下になると同様な操作を加える。
- (b) (6)式の  $\eta$  が 1 未満に設定された場合、ステップが進んでも要素除去量が多く収束しない場合があるため、 $\eta < 1$  の場合、最初に CA 法による要素生成が行われた時点で  $\eta = 1$  に戻す。
- (c) CA 法と ESO 法を 1 ステップごとに繰り返し、解が収束しない場合があるため、このような繰り返しが生じた場合、 $\eta$  を最大 1.5 まで 0.1 刻みで増加させる。なお、1 ステップごとの繰り返しが解除されると逆に 0.1 刻みで  $\eta$  を減少させる。

以上の計算において、最適化に関する入力データは、繰り返し計算回数(ステップ数)、総密度制約値  $\bar{m}/m^0$  ( $m^0$  は初期総密度:設計対象要素の密度をすべて 1 とした場合の総密度)、(6)式の  $\eta$  のみである。このように、本手法の計算アルゴリズムは非常に簡単であるため、プログラムの実装も極めて容易である。

4. 解析例

本章では、2章に示した数値計画法にもとづく SIMP 法と3章に示した発見的的手法にもとづく CA-ESO 法による解を比較し、CA-ESO 法の有効性を検証する。

4.1 基本的な解析例

まず、既往の文献に掲載されている基本的な例題に対して、CA-ESO 法と SIMP 法の解の比較を行う。

図4は文献(21)に取り上げられている比較的要素数の少ない基本的な例題である。要素分割数は  $16 \times 16$ 、ヤング係数は 200GPa、ポアソン比は 0.3、板厚は 10mm である。図5は、CA-ESO 法と SIMP 法の解の密度分布を示している。ただし、総密度制約は  $\bar{m}/m^0 = 0.4$  として与え、ステップ数(繰り返し計算回数)は、CA-ESO 法 30、SIMP 法 40 としている。また、CA-ESO 法の(6)式の  $\eta$  は 1.0、SIMP 法の(3)式の  $w$  は 0 としている。また、図中の  $C/C^0$  はコンプライアンス比で、 $C^0$  は SIMP 法の(3)式に示される初期(均等密度)のコンプライアンスである。

なお、以下の解析例では、CA-ESO 法の解のコンプライアンス  $C$  は、SIMP 法と条件を合わせるため、除去要素の密度を  $1/10^6$  として計算し直している。また、SIMP 法の要素初期密度は  $\bar{m}/m^0$  とし、CA-ESO 法の要素初期密度は 1 としている。

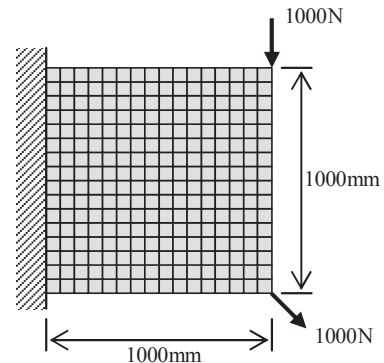
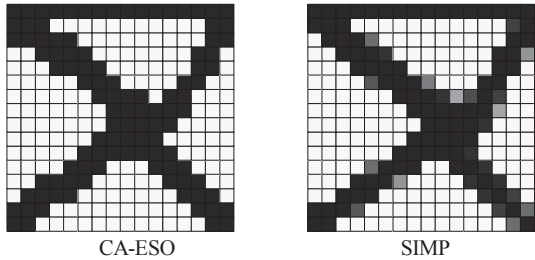


図4 解析例1

図より、SIMP 法では要素密度が完全には 0/1 にならないため、グレー密度の要素部分で CA-ESO 法との違いが見られるが、両者は非常に近い密度分布になっていることがわかる。



CA-ESO  $m/m^0 = 0.406, C/C^0 = 0.344$       SIMP  $m/m^0 = 0.400, C/C^0 = 0.341$

図 5 解析例 1 の解 ( $\bar{m}/m^0 = 0.4$ )

次に、図 6 は文献 14)に取り上げられている例題である。要素分割数は  $30 \times 20$ 、ヤング係数は 98GPa、ポアソン比は 0.3、板厚は 1mm である。図 7 は、CA-ESO 法と SIMP 法の解の密度分布を示している。ただし、総密度制約は  $\bar{m}/m^0 = 0.4$  とし、ステップ数は、CA-ESO 法 30、SIMP 法 40 とした。また、CA-ESO 法の  $\eta$  は 1.0、SIMP 法の  $w$  は 1.0 としている。図より、ほぼ同位相で類似した形状が得られていることがわかる。

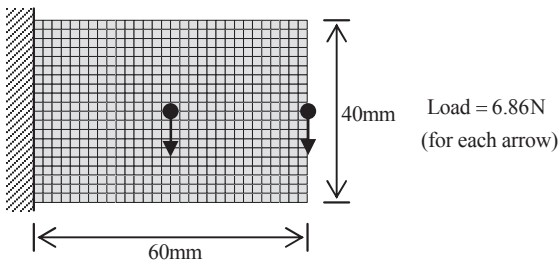
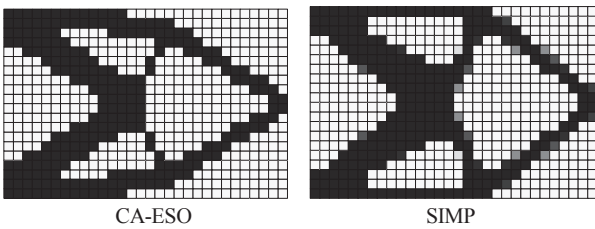


図 6 解析例 2



CA-ESO  $m/m^0 = 0.397, C/C^0 = 0.340$       SIMP  $m/m^0 = 0.400, C/C^0 = 0.343$

図 7 解析例 2 の解 ( $m/\bar{m} = 0.4$ )

次に、図 8 は、文献 16)に取り上げられている例題である。要素分割数は  $50 \times 25$ 、ヤング係数は 100GPa、ポアソン比は 0.3、板厚は 10mm である。図 9 は、CA-ESO 法と SIMP 法の解の密度分布を示している。ただし、総密度制約は  $\bar{m}/m^0 = 0.3$  とし、ステップ数は、CA-ESO 法 40、SIMP 法 40 とした。また、CA-ESO 法の  $\eta$  は 0.6、SIMP 法の  $w$  は 1.0 としている。図より、本例題でも、類似した形状の解が得られることがわかる。なお、この例題では、 $\eta$  を 0.7 以上にした場合、 $m/m^0$  が 0.3 になるまでの収束が遅く、得られた解のコンプライアンスも高かったため  $\eta = 0.6$  とした。

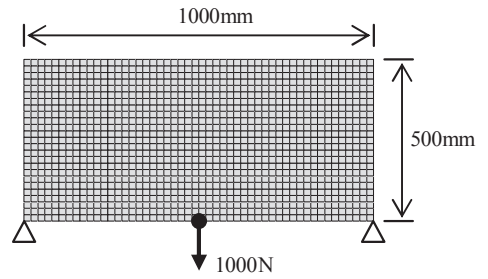
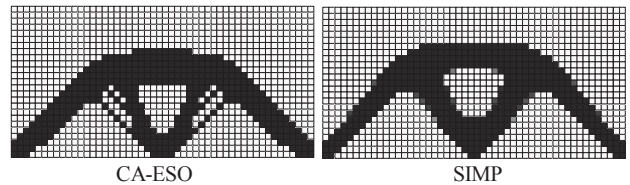


図 8 解析例 3



CA-ESO  $m/m^0 = 0.304, C/C^0 = 0.179$       SIMP  $m/m^0 = 0.300, C/C^0 = 0.181$

図 9 解析例 3 の解 ( $\bar{m}/m^0 = 0.3$ )

#### 4.2 詳細メッシュに対する解析例

次に、詳細メッシュの例題に対する解の比較を行う。

図 10 は、文献 16)等に取り上げられている例題である。要素分割数は  $160 \times 100$ 、ヤング係数は 207GPa、ポアソン比は 0.3、板厚は 1mm である。図 11,12 は、CA-ESO 法と SIMP 法の各ステップにおける密度分布の変化を示している。ただし、総密度制約は  $\bar{m}/m^0 = 0.3$  とし、CA-ESO 法の  $\eta$  は 0.9、SIMP 法の  $w$  は 1.0 としている。

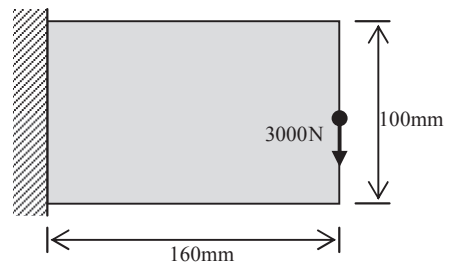


図 10 解析例 4

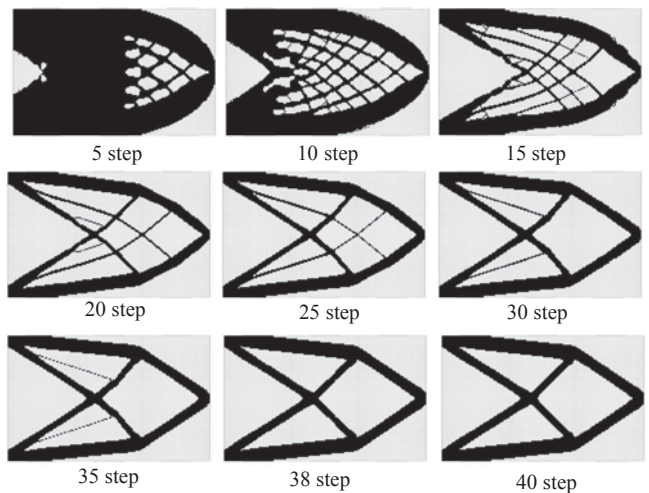


図 11 CA-ESO 法における各ステップの密度分布

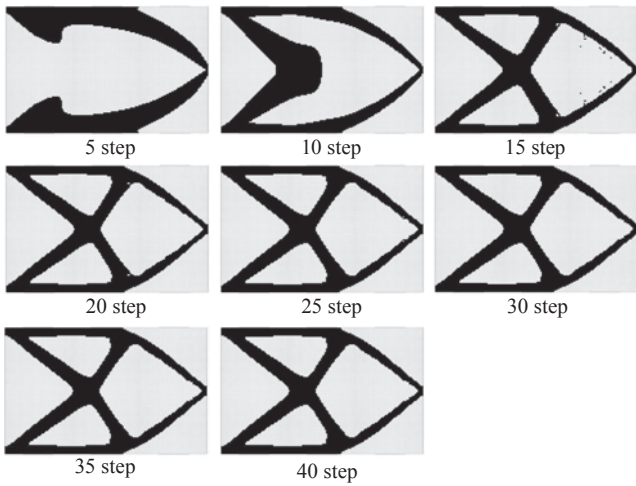


図 12 SIMP 法における各ステップの密度分布

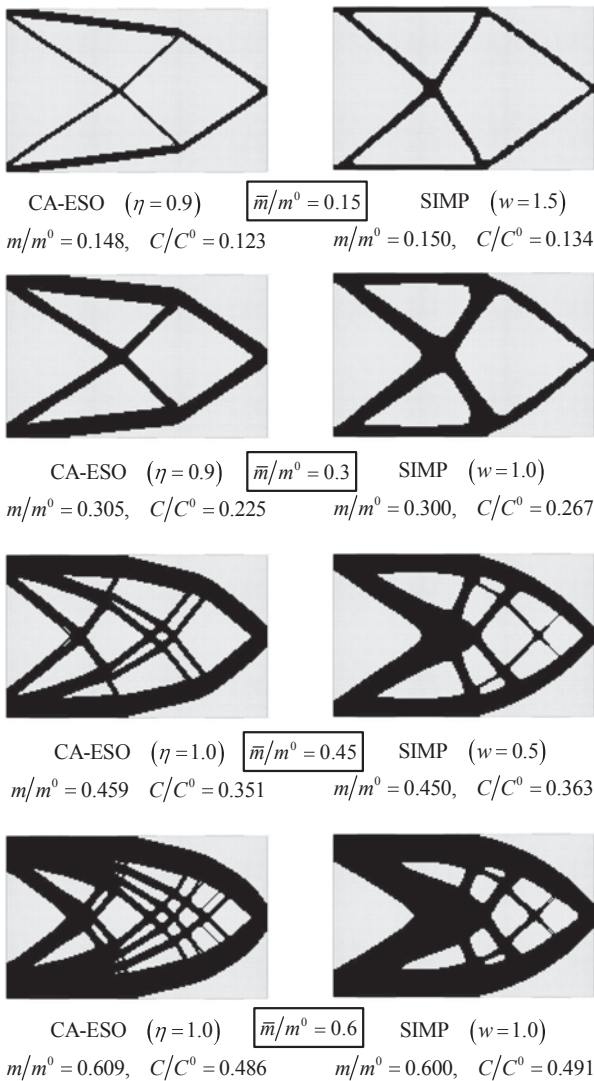


図 13 解析例 4 の解

図 11, 12 より, CA-ESO 法では, 初期段階の内部構造が線となって現れるのに対して, SIMP 法では面(薄板)となっていることがわかる. しかし, 最終的には, 形状は多少異なるが同位相の解が得られている. また, 収束に関しては SIMP 法の方が速いが, CA-ESO

法では, 途中ステップの位相も骨組形態として物理的に意味のあるものになっている. なお, CA-ESO 法では 38 ステップの解が制約条件を満足するコンプライアンス最小解となる.

図 13 は, 総密度制約  $\bar{m}/m^0$  を 0.15~0.6 と変化させた場合の CA-ESO 法と SIMP 法の解の密度分布を示している. ただし, CA-ESO 法の  $\eta$  と SIMP 法の  $w$  は図中に示している. また, CA-ESO 法と SIMP 法のステップ数は 40 としている. 図より,  $\bar{m}/m^0$  が大きくなると位相は多少異なるが, コンプライアンス比を見ると, CA-ESO 法の解のコンプライアンス比は SIMP 法と比較していずれも低く, より最適な解が得られていると考えられる.

図 14 は,  $\bar{m}/m^0$  が 0.3 と 0.45 の場合について, CA-ESO 法の  $\eta$  を変化させた場合の解の密度分布を示している. 図に示すように,  $\eta$  を小さくすることで, よりシンプルな形態を得ることができる. また,  $\bar{m}/m^0 = 0.3$  の場合は, コンプライアンス比はほぼ同じ値になっているため, 文献 22),23) のトラス・骨組の解から類推して, これらはいずれも最適解であると考えられる.

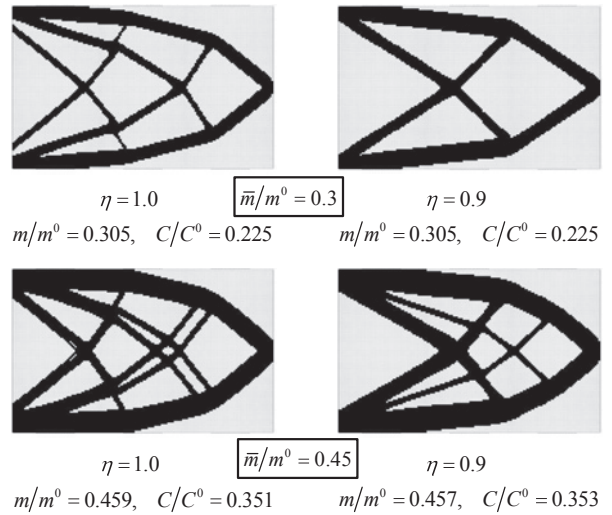


図 14  $\eta$  が解の密度分布に及ぼす影響

最後に, 図 15 は, 文献 16)等に取り上げられている MBB 梁の例題である. 要素分割数は  $240 \times 40$ , ヤング係数は 200GPa, ポアソン比は 0.3, 板厚は 1mm である.

図 16 は, SIMP 法の解と CA-ESO 法の  $\eta=1.0, 0.95$  の解との比較を示している. ただし, 総密度制約は  $\bar{m}/m^0 = 0.4$ , ステップ数は両解析とも 40 とした. 図に示すように, CA-ESO 法の解と SIMP 法の解は類似した位相が得られている. また, CA-ESO 法の  $\eta$  を小さくすることで, よりシンプルな位相を求めることが可能なこともわかる.

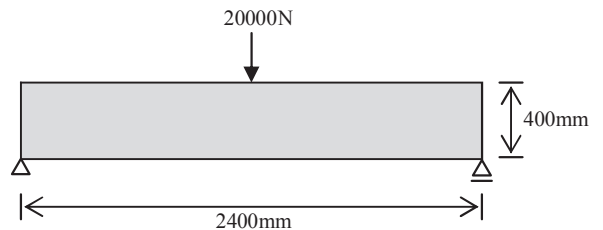
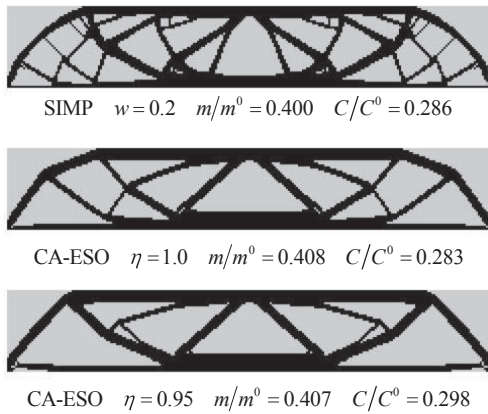


図 15 解析例 5

図 16 解析例 5 の解 ( $\bar{m}/m^0 = 0.4$ )

## 5. まとめ

本論文では、拡張 ESO 法と CA 法を組み合わせた発見的手法 CA-ESO 法を提案し、これを SIMP 法の解と比較することで、その有効性を検討した。その結果、本論文に示した CA-ESO 法では、基本的例題においても、詳細メッシュによる例題においても、SIMP 法と類似した位相が得られ、また、コンプライアンス値もほとんどの場合、CA-ESO 法の方が小さい値となった。計算効率においても、詳細メッシュの場合、SIMP 法に比較すると収束性はやや遅いが、40 ステップ程度で有効な解が得られ、また、SIMP 法に比較して、途中ステップの解にも物理的に意味のある骨組形態が現れることがわかった。また、パラメータ  $\eta$  に関しては、通常、0.9~1.0 で最適解が得られ、質量制約値に収束しない場合は、0.1 刻みで下げて最適値を探せば良いこと、また、 $\eta$  を 1 より小さくすることで、よりシンプルな形態を得ることができ、SIMP 法のフィルタリングに似た効果が得られることがわかった。

以上の結果、CA-ESO 法は、少なくとも剛性最大化問題に関しては、計算効率、解の安定性等からも、数値計画法にもとづく SIMP 法に劣らない手法であることがわかった。したがって、CA-ESO 法は、汎用ソフト等に実装することによって十分実用化が可能な手法であると結論づけられる。

また、本論文では、SIMP 法と比較するため、除去要素を実際には除かず解析を行ったが、CA-ESO 法は除去要素をリメッシュによって除くことも可能であるため、今後は、3 次元問題、粒子法への適用について検討していく予定である。

## 参考文献

- 1) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N. : Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 2) Suzuki, K. and Kikuchi, N. : A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 3) Bendsoe, M. P. : Optimal shape design as a material distribution problem, Structural Optimization, Vol.1, pp.193-202, 1989
- 4) Yang, R. J. and Chuang, C. H. : Optimal topology design using linear programming, Computers & Structures, Vol.52, No.2, pp.265-275, 1994
- 5) Sethian, J. A. and Wiegmann, A. : Structural boundary design via level-set and immersed interface methods, Journal of Computational Physics, Vol.163, No.2, pp.489-528, 2000

- 6) Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D. : A level Set Method for Structural Topology Optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192, No.1-2, pp.227-246, 2003
- 7) 山田崇恭, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 竹澤晃弘 : レベルセット法による形状表現を用いたフェーズフィールド法の考え方にに基づくトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 A 編, 75 巻, pp.550-558, 2009.5
- 8) Xie, Y. M., Steven, G. P. : Evolutionary Structural Optimization, Springer-Verlag, 1997
- 9) Young, V., Querin, O. M., Steven, G. P. and Xie, Y. M. : 3D and Multiple Load Case Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization (BESO), Structural Optimization, Vol.18, pp.183-192, 1999
- 10) Querin, O. M., Young, V., Steven, G. P. and Xie, Y. M. : Computational Efficiency and Validation of Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 189, pp.559-573, 2000
- 11) 大森博司, 崔昌禹 : 等値線を利用した拡張 ESO 法による構造形態の創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 539 号, pp.87-94, 2001.1
- 12) 大森博司, 崔昌禹 : 拡張 ESO 法による構造形態の創生—多目的適応型構造とシェル構造への適用—, 日本建築学会構造系論文集, 第 552 号, pp.109-116, 2002.2
- 13) 崔昌禹, 大森博司, 佐々木睦朗 : 拡張 ESO 法による構造形態の創生—三次元構造への拡張—, 日本建築学会構造系論文集, 第 576 号, pp.79-86, 2004.2
- 14) 伊能教夫, 下平真子, 小林弘樹 : 力学構造物を自己組織化するセル・オートマトン, 日本機械学会論文集 (A 編), 61 巻, 586 号, pp.272-278, 1995.6
- 15) 本間 俊雄, 登坂宣好, 角広幸 : 自律分散アプローチによる逆問題の計算法, 日本建築学会構造系論文集, 第 526 号, pp.69-76, 1999.12
- 16) 三井和男 : セルオートマトンによる構造システムの自律的生成と最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.555, pp.101-105, 2002.5
- 17) 長谷川浩志, 川面恵司 : GA 利用による機械構造物の位相最適化の一方法 (有限要素の除去および付加パラメータを染色体とする位相最適化法), 日本機械学会論文集 (A 編), 61 巻, 581 号, pp.183-190, 1995.1
- 18) 鶴田 靖, 長谷川浩志, 川面恵司 : GA 利用による機械構造物の位相最適化の一方法 (第 2 報, 有限要素除去・付加パラメータを染色体とする方法の収束性の検討), 日本機械学会論文集 (A 編), 63 巻, 605 号, pp.170-177, 1997.1
- 19) 鈴木雄作, 鶴田 靖, 川面恵司 : GA 利用による機械構造物の位相最適化の一方法 (第 3 報, 有限要素の除去・付加パラメータを用いた単一個体による確定的方法), 日本機械学会論文集 (A 編), 64 巻, 626 号, pp.49-54, 1998.10
- 20) 藤井大地 : Excel で簡単にシミュレーション! 建築デザインと最適構造—CD-ROM 付, 丸善, 2008.10
- 21) 小田十八, 徳升美紀子, 変動多数決ルールを用いた CA 法による構造最適化の研究, 日本機械学会論文集 (A 編), 72 巻 716 号, 2006.4
- 22) 高田豊文, 松岡貴士 : 体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジー最適化問題への線形計画法の適用, 日本建築学会構造系論文集, 第 598 号, pp.87-91, 2005.12
- 23) 藤井大地, 真鍋匡利, 高田豊文 : グランドストラクチャ法による建築構造の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 633 号, pp.1967-1973, 2008.11
- 24) 真鍋匡利, 藤井大地, 粒子法を用いた有限変形を伴う弾性体のトポロジー最適化, 計算工学講演会論文集, Vol.14, pp.75-78, 2009.5
- 25) 真鍋匡利, 藤井大地, 粒子法を用いた発見的手法に基づく有限変形を伴う弾性体のトポロジー最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集 構造 I, pp.349-350, 2009.8
- 26) 間野明人, 藤井大地, 真鍋匡利, CA-ESO 法による構造物の位相最適化に関する研究, 日本建築学会中国支部研究報告集, Vol.33, p.204, 2010.3
- 27) 間野明人, 藤井大地, 真鍋匡利, CA-ESO 法を用いた構造形態創生法の解の精度, コロキウム構造形態の解析と創生 2010, pp.161-166, 2010.10
- 28) 間野明人, 重實克哉, 藤井大地, 真鍋匡利, 形態創生における CA-ESO 法と数値計画法に基づく解法との比較, 日本建築学会中国支部研究報告集, Vol.34, p.212, 2011.3
- 29) 間野明人, 重實克哉, 藤井大地, 真鍋匡利, CA-ESO 法を用いた形態創生法の特長, コロキウム構造形態の解析と創生 2011, pp.15-20, 2011.10
- 30) 間野明人, 重實克哉, 藤井大地, 真鍋匡利, 形態創生における CA-ESO 法と数値計画法に基づく解法との比較—建築構造形態に関する検証, 日本建築学会中国支部研究報告集, Vol.35, p.209, 2012.3

(2013年3月7日原稿受理, 2013年5月23日採用決定)

# CA-ESO 法とボクセル有限要素法を用いた 3次元構造物の位相最適化

## TOPOLOGY OPTIMIZATION OF 3D STRUCTURES USING CA-ESO METHOD AND VOXEL FINITE ELEMENT METHOD

藤井大地\*, 岡部 諒\*\*, 真鍋匡利\*\*\*  
*Daiji FUJII, Ryo OKABE and Masatoshi MANABE*

Recently, topology optimization of three dimensional (3D) structures is paid attention again by the development of manufacturing technology using 3D printer. Therefore, in this paper, an efficient topology optimization method for 3D structures is proposed. In the proposed method, CA-ESO method is used for the topology optimization and the voxel finite element method is used for the stress analysis of 3D structures. In this method, the design domain is divided in same rectangular parallelepiped elements (voxels), and in the optimization process, elements with low stress are deleted by ESO (Evolutionary Structural Optimization) method, and peripheral elements of the element with high stress are generated by CA (Cellular Automaton) method. Also, in the voxel finite element method, the stress assumed element, CG solver, and element by element method are used. Several numerical examples are shown in order to demonstrate the effectiveness of the present method for 3D structures.

**Keywords:** Topology optimization, CA-ESO method, Voxel finite element method, Three dimensional structure, Structural Morphogenesis

位相最適化, CA-ESO 法, ボクセル有限要素法, 3次元構造, 構造形態創生

### 1. はじめに

近年, 解析技術や生産・製造技術等の発達により, 様々な形態の建築物が造られるようになってきている。また, 3D プリンタの普及により, より軽量で剛性の高い3次元構造形態を創生する技術の必要性が高まっている。位相最適化手法は, このようなニーズに応える形態創生手法の一つである。

位相最適化手法は, 大きく数理計画法にもとづく方法と発見的な手法にもとづく方法の2種に分類される。この内, 3次元問題を扱える実用化あるいは実用化されつつある方法として, 数理計画法では, 均質化法 (Homogenization Design Method)<sup>1-4)</sup>, SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法<sup>5-7)</sup>, レベルセット法 (Level Set Method)<sup>8-11)</sup>等が挙げられ, 発見的な手法では, ESO/BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) 法<sup>12-15)</sup>, 拡張 ESO 法<sup>16-17)</sup>等が挙げられる。一方, 著者ら<sup>18)</sup>は, CA (Cellular Automaton) 法と拡張 ESO 法を組み合わせた CA-ESO 法を提案し, 2次元の剛性最大化問題において, 数理計画法にもとづく SIMP 法と同等以上の性能を有することを示している。

ところで, BESO 法は, SIMP 法と非常に類似した方法で, SIMP 法が要素密度を連続関数として各ステップの密度の増減を求めるのに対して, BESO 法は各ステップの目標体積を定めて, 歪みエネルギー感度の低い要素を除去し, 感度の高い要素の周辺要素を付加す

る発見的な手法である。したがって, チェッカーボードを防ぐ方法や複雑な位相をよりシンプルにするフィルタリング法などは SIMP 法と同様の手法を用いている<sup>14)</sup>。これに対して, 拡張 ESO 法では, 各ステップで応力等値線を作成し, 応力平均値と偏差平均を指標とする閾値によって要素の除去と付加を行う。また, 各ステップでリメッシングを行うため, 境界形状が滑らかな位相が得られる特徴がある。一方, 著者らが提案している CA-ESO 法は, BESO 法と類似した方法ではあるが, 各ステップの要素除去に目標体積を定めない拡張 ESO 法のルールを採用している点と, BESO 法のように各ステップで要素除去と付加を同時に行うのではなく, どちらか一方のみを行うところに特徴がある。また, BESO 法で用いているチェッカーボードを防ぐ方法やフィルタリング法は用いなくても, SIMP 法と同様の位相を求めることができる<sup>18)</sup>。

本論文では, 文献 18)で提案した CA-ESO 法を3次元問題に拡張し, 独自のフィルタリング法を用いた SIMP 法<sup>19),20)</sup>との比較により, その有効性を検討する。ESO 法では, SIMP 法と比較して, 除去要素の密度を残す必要がないため, 特に3次元問題では, 計算効率を格段に上げられる可能性がある。しかしながら, ESO 法で除去要素の密度を完全に0にした場合, 島のような孤立した要素群が残ることがあり, この場合剛性マトリクスが特異となる。このような問題を回避する方法として, 連立一次方程式の解法として CG 法 (共役

\* 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

\*\* 近畿大学大学院 大学院生

\*\*\* ㈱木村建築設計事務所 修士(工学)

Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr. Eng.

Graduate Student, Graduate School, Kinki University

Staff Member, Kimura Architects and Engineers Office, M. Eng.

勾配法)等の間接法を用いることが考えられる。(ただし、文献21)に、要素密度を完全に0にした場合の問題点が指摘されているが、このような特殊な問題では除去要素に微小密度を残す必要がある。)

そこで、本論文では、文献18)で提案したCA-ESO法とHollister and Kikuchi<sup>22)</sup>によって提案されたボクセル (voxel) 有限要素法を組み合わせた3次元構造物の位相最適化手法を提案する。なお、筆頭著者は、SIMP法とボクセル有限要素法を組み合わせた方法<sup>19),23)</sup>をすでに提案しており、本論文に示す方法はこのSIMP法の部分をCA-ESO法に置き換えたものである。ボクセル有限要素法では、同形状の有限要素を用いるため要素剛性マトリクスの計算は1度行って保存しておくことが可能である点と、要素が規則正しく配置されているため各要素の節点番号情報を記憶する必要がない。また、本方法では、大規模連立一次方程式を解くために前処理付き共役勾配法<sup>24)</sup>を用い、Element-by-Element手法<sup>25)</sup>により、全体剛性マトリクスを組み立てることなく解を求めるため、数十万~数百万要素の解析が通常のパソコンで可能となる。

2. ボクセル有限要素法の概要

ボクセル有限要素法では、設計領域を包含する直方体領域 (図1) を考え、これを均等な直方体要素 (voxel) で分割する。そして、実際の設計領域はボクセルの材料密度の有無 (1/0) によって与える。

図1の直方体領域の各辺の長さを $L_x, L_y, L_z$ とし、各辺の有限要素分割数を $n_x, n_y, n_z$ とすると、直方体要素 (voxel 要素) の各辺の長さ $l_x, l_y, l_z$ は次式で定義される。

$$l_x = \frac{L_x}{n_x}, \quad l_y = \frac{L_y}{n_y}, \quad l_z = \frac{L_z}{n_z} \tag{1}$$

この時、直方体領域各辺の節点数は $(n_x + 1), (n_y + 1), (n_z + 1)$ であり、全節点数は $(n_x + 1) \times (n_y + 1) \times (n_z + 1)$ となる。

CA-ESO法では、各要素の von Mises 応力を要素生滅の指標に用いるため、本論文では、応力の解析精度が高い8節点応力仮定法要素<sup>19),26)</sup>を用いる。本要素は、要素剛性マトリクスの計算にやや時間を要するが、ボクセル有限要素法では、すべて同一形状の要素を用いるため、1度計算して保存しておけば良い (ただし、異種材料を用いる場合は材料数分計算して保存しておく必要がある)。

8節点応力仮定法要素の剛性マトリクスは次式で表される<sup>19),23)</sup>。

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{M}_B^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{M}_B \tag{2}$$

ここに、 $\mathbf{K}_e$ は $24 \times 24$ 、 $\mathbf{M}_S$ は $18 \times 18$ 、 $\mathbf{M}_B$ は $18 \times 24$ のマトリクスで、

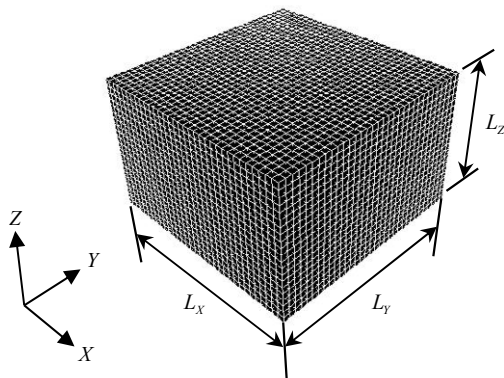


図1 ボクセル有限要素法の解析領域

$$\mathbf{M}_S = \int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}} \int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}} \int_{-\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}} \mathbf{N}_S^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S dx dy dz, \quad \mathbf{M}_B = \int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}} \int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}} \int_{-\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}} \mathbf{N}_S^T \mathbf{B} dx dy dz \tag{3}$$

と表される。ここで、 $\mathbf{N}_S$ は応力 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}]^T$ と未定係数ベクトル $\mathbf{c} = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ c_{21} \ c_{22} \ c_{23} \ c_{31} \ c_{32} \ c_{33} \ c_{41} \ c_{42} \ c_{51} \ c_{52} \ c_{61} \ c_{62}]^T$ を関係づけるマトリクス

$$\mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} 1 & y & z & yz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & x & zx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix}$$

である。ただし、 $x, y, z$ は要素中心を原点とする局所座標系である。また、 $\mathbf{D}$  ( $6 \times 6$ ) は弾性マトリクス、 $\mathbf{B}$  ( $6 \times 24$ ) は要素内変位 $\mathbf{u}$ を次式で仮定した場合の歪-変位関係マトリクスである。

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{N} \mathbf{d} \tag{4}$$

ここに、 $\mathbf{d} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_8 \ v_8 \ w_8]^T$ であり、 $\mathbf{N}$  ( $3 \times 24$ ) は形状関数マトリクス、 $N_1, \dots, N_8$ は線形の形状関数である。なお、未定係数ベクトル $\mathbf{c}$ は、応力から求められるひずみと変位から求められるひずみの適合条件 (積分方程式) により消去される。

(2)式の重ね合わせから作られる全体剛性方程式の解法には前処理付き共役勾配法<sup>24)</sup>を用いる。前処理マトリクスとしては全体剛性マトリクスの対角成分の逆数 (対角成分が0の場合1とする) を対角項とする対角マトリクスを用いる。また、反復計算においては要素剛性マトリクスと変位ベクトルのかけ算を要素ごとに行い、これをベクトルとして保存していくElement-by-Element<sup>25)</sup>法を用いる。

以上のCG法の反復計算によって得られた解 (変位ベクトル) から、各要素の応力は次式から計算される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_S \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{M}_B \mathbf{d} \tag{5}$$

計算効率を上げるためには、(2)式の要素剛性マトリクスの他に、(5)式の $\mathbf{N}_S \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{M}_B$ もあらかじめ計算して保存しておく必要がある。

3. SIMP法による3次元構造の位相最適化

SIMP法では、要素の剛性に比例する係数を要素密度と定義し、 $i$ 番目要素の剛性マトリクスが次式で表されるものとする。

$$\mathbf{k}_i = (\rho_i)^{pp} \cdot \mathbf{k}_{pi}^0 + (\rho_i)^{ps} \cdot \mathbf{k}_{si}^0 \quad 0 < \rho_i \leq 1 \tag{6}$$

ただし、 $\mathbf{k}_{pi}^0, \mathbf{k}_{si}^0$ は $i$ 番目要素の垂直歪エネルギー成分とせん断歪エネルギー成分からなる初期要素剛性マトリクスを表す。また、 $\rho_i$ は $i$ 番目要素の要素密度を表し、 $pp, ps$ は要素密度をなるべく0または1に近づけるためのべき乗係数である。ここで、要素剛性マトリクスを分離し、別々のべき乗係数を設定するのは、0と1の間の中間密度のせん断剛性により大きなペナルティを課すためである。

SIMP法では、(6)式の要素密度 $\rho_i$ を設計変数として、次式の最適化問題を解く。

$$\begin{aligned} \min \quad & f_{obj}(\boldsymbol{\rho}) = C(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & m(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N \rho_i \leq \bar{m} \\ & \boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_N\} \quad 0 < \rho_i \leq 1, \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \tag{7}$$

ここに、 $C$  はコンプライアンス、 $\mathbf{d}, \mathbf{K}$  は節点変位ベクトルと全体剛性マトリクス、 $m$  は総密度、 $\bar{m}$  は総密度の制約値、 $N$  は要素総数である。なお、ここでは  $\rho_i$  の下限値を  $1/10^3$  に設定している。

3次元問題の(7)式の解法は文献 19)に示しているが、ここではこれを文献 20)の方法に改良して用いる。文献 20)の方法では、(7)式の目的関数  $f_{obj}$  を次式のように書き換える。

$$f_{obj}(\mathbf{p}) = C(\mathbf{p}) + w \cdot C^0 [1/G(\mathbf{p})] \quad (8)$$

ここに、 $w$  は重み係数、 $C^0$  は初期 (均等密度) のコンプライアンス、 $G(\mathbf{p})$  は次式で定義されるフィルタリング関数である。

$$G(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} [\rho_i \rho_j + (1-\rho_i)(1-\rho_j)]}{\sum_{i=1}^N n_i} \quad (9)$$

ただし、 $n_i$  は  $i$  番目要素と面を共有する要素の数である。(9)式の  $G$  は  $0 \leq G \leq 1$  の範囲で、グレースケールやチェッカーボード状の密度分布が増えると値が小さくなる。目的関数を(8)式とした(7)式の最適化問題は、CONLIN 法を用いた非線形計画法で解かれる。

#### 4. CA-ESO 法による3次元構造の位相最適化

CA-ESO 法による位相最適化では、図 1 に示すような設計領域における各有限要素の応力を指標として要素密度の除去(0)・復活(1)を繰り返す、最終的に目的の位相 (構造形態) を求める。この場合、SIMP 法等の数値計画法にもとづく方法と比較して感度解析の必要がなく、また、除去要素の密度を完全に 0 にできるため、特に3次元問題では最適化が進むほど計算効率が良くなる。

ここでは、ボクセル解析のメリットを生かすため、最適化の過程でリメッシュ (節点の再番号付け) は行わず、存在要素 (または生成要素) の密度を 1、除去要素の密度を 0 とすることで各ステップの設計領域を定義する。そして、除去要素 (密度 0 の要素) は、Element-by-Element 法の計算から除外する。

##### 4.1 ESO 法による要素の除去

CA-ESO 法では、要素除去に関しては、拡張 ESO 法のルールを用いる。拡張 ESO 法<sup>16,17)</sup>では、各要素の von Mises 応力を要素除去に関する指標とし、この応力が閾値以下になると要素が除去される。すなわち、

$$\rho_i = 0 \quad \text{if} \quad \sigma_i^{VM} < X_{cr} \quad ; i=1, \dots, N_L \quad (10)$$

ここに、 $N_L$  は残存要素数、 $\rho_i$  は  $i$  番目要素の材料密度、 $\sigma_i^{VM}$  は  $i$  番目要素の von Mises 応力で、次式により計算される。

$$\sigma_i^{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\}} \quad (11)$$

また、(10)式の  $X_{cr}$  は閾値で、次式で定義される。

$$X_{cr} = \sigma_m - \eta \cdot \phi \quad (12)$$

ただし、 $\sigma_m$  と  $\phi$  は残存要素の von Mises 応力の平均値と偏差平均であり、次式から計算される。

$$\sigma_m = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} \sigma_i^{VM} \quad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_L} (\sigma_i^{VM} - \sigma_m)^2}{N_L}} \quad (13)$$

ここに、 $\eta$  は要素の除去量を制御する制御変数であり、 $\eta$  が大きいと要素が除去されにくく、 $\eta$  が小さいと除去されやすくなる。

#### 4.2 CA 法による要素の生成

CA-ESO 法では、要素の生成 (付加) を CA 法のルールにもとづいて行う。本論文では、 $i$  番目要素の Neumann 近傍要素 (面を共有する要素) に対して、次式の簡単なルールを採用する。

$$\rho_{s_j} = 1 \quad \text{if} \quad \sigma_i^{VM} \geq \sigma_m^{CA} \quad ; i=1, \dots, N_L, \quad j=1, \dots, n_i \quad (14)$$

ただし、 $\sigma_m^{CA}$  は残存要素の応力平均値で(13)式の  $\sigma_m$  と同様に計算される。また、 $s_j$  と  $n_i$  は  $i$  番目要素と面を共有する要素 (ノイマン近傍要素) の要素番号と要素数である。

#### 4.3 CA-ESO 法の計算フロー

図 2 は CA-ESO 法の計算フローを示したものである。図に示すように、本方法では、総密度  $m (= N_L)$  が与えた制約値  $\bar{m}$  より大きい場合は ESO 法による要素除去を行い、小さい場合は CA 法による要素生成を行う。そして、各ステップで制約条件を  $0.95 < m/\bar{m} < 1.05$  の範囲で満たし、(12)式の  $\sigma_m$  と  $\phi/\sigma_m$  が共に小さくなる解、すなわち次式の値が最小となる解を最適解として保存する<sup>18)</sup>。

$$f_{obj} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_m}{\sigma_m^0} \right)^2 + \left\{ \frac{\phi/\sigma_m}{(\phi/\sigma_m)^0} \right\}^2} \quad (15)$$

ただし、 $\sigma_m^0$  および  $(\phi/\sigma_m)^0$  は初期構造 (0 step) の値である。なお、制約条件を  $\pm 5\%$  緩和しているのは、CA-ESO 法では、総密度の増減を(12)式のパラメータ  $\eta$  のみで制御しているため、厳密に制約条件を満足する解が見つかりにくいためである。

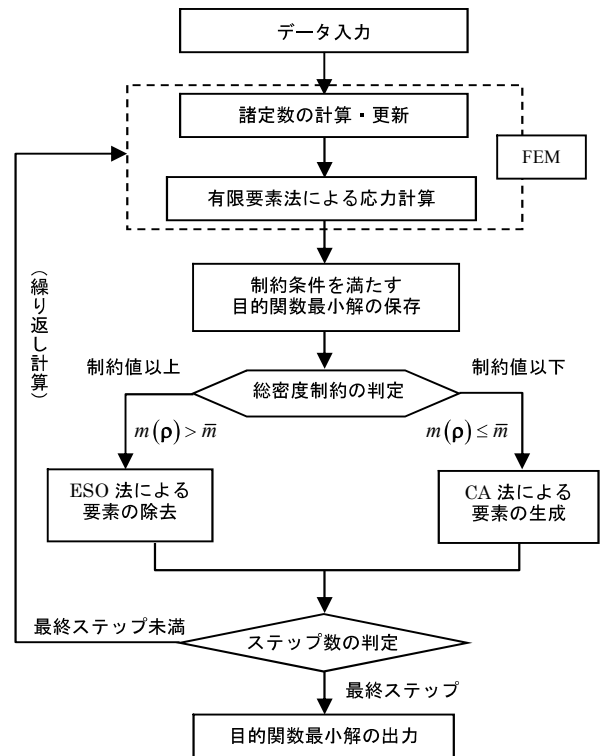


図 2 CA-ESO 法の計算フロー

以上の計算において、問題によっては同じ解が繰り返し現れたり、要素が除去されすぎて解が発散する場合があるため、プログラム内に以下の方法を組み込むことでこのような問題を回避する<sup>18)</sup>。

(a) CA 法において、応力平均値が変化せず、ステップが進んでも

要素生成が行われない場合があるため、総密度  $m$  が制約値  $\bar{m}$  以下になる場合、各ステップで 1%ずつ応力平均値  $\sigma_m^{CA}$  の値を減少させる。ただし、総密度が制約値を超えた時点で元に戻し、再び、制約値以下になると同様な操作を加える。

- (b) ESO 法による要素除去量が多く解が発散する場合、逆に ESO 法による要素除去量が少なく目的の総密度まで減少しない場合があるため、前ステップからの要素除去量が 30%を超えた場合は 30%以下、10%未満になる場合は 10%以上となるようにプログラム内で  $\eta$  を調整する。ただし、総密度が制約値の 1.2 倍以内になった場合は、除去量の上限を 10%、下限を 0%となるように  $\eta$  を調整する。なお、 $\eta$  の調整は 1/100 単位で行う。
- (c) ESO 法による要素除去量が多く、解の収束が遅くなる場合があるため、CA 法を経て ESO 法による要素除去を行う場合、まず、(12)式の  $\eta$  を 1.5 まで上昇させ、その後、ESO の要素除去が繰り返されるごとに  $\eta$  を 0.1 刻みで減少させる。ただし、 $\eta$  の下限値は初期データ値とし、CA 法を経るごとに  $\eta=1.5$  に戻す。
- (d) 総密度制約を満足する解を得やすくするために、CA 法を経て ESO 法による要素除去を行う場合、除去量の上限を 20%、下限を 5% (ただし、総密度が制約値の 1.2 倍以内になった場合は、除去量の上限を 3%、下限を 0%) となるように  $\eta$  を調整する。なお、 $\eta$  の調整は 1/100 単位で行う。

なお、(b)と(d)は、3次元解析に対して新たに加えたものである。以上の計算において、最適化に関する入力データは、繰返し計算回数(ステップ数)、総密度制約値  $\bar{m}/m^0$  ( $m^0$  は初期総密度:設計対象要素の密度をすべて 1 とした場合の総密度)、(12)式の  $\eta$  のみである。このように、本手法の計算アルゴリズムは非常に簡単であるため、プログラムの実装も極めて容易である。

### 5. 解析例

#### 5.1 基本的な例題

まず、文献 17)等に取り上げられている片持梁例題の解析を行う。図 3 は、設計領域および荷重条件・境界条件を示す。ただし、長さ  $L$ 、幅  $B$ 、高さ  $H$  の比は 1.6 : 0.4 : 1 とし、設計領域の要素分割数は  $80 \times 20 \times 50$  としている。また、応力集中を防ぐため、荷重は 9 節点に均等に与えている。また、総密度制約値  $\bar{m}/m^0$  は 0.2、最適化ステップ数は 50 とした。

図 4 は、総密度制約を  $0.95 < m/\bar{m} < 1.05$  の範囲で満たす解の側面図と透視図を示したものである。また、図 5 は、各ステップの総密度

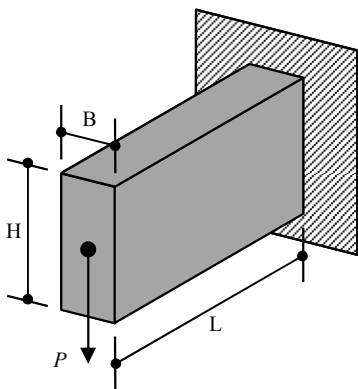


図 3 解析例 1

比と(15)式の目的関数の推移を示したものである(図の縦の点線は、制約条件を満たす目的関数最小解が得られたステップ)。ただし、(12)式の  $\eta$  は 0.7 としている。なお、図 4 中には、コンプライアンス比  $C/C^0$  ( $C^0$  は初期コンプライアンス) も示している。これらの図に示すように、ESO 法と CA 法の繰返しにより、目的関数および構造形態がより剛性の高いものに改善されて行くことがわかる。

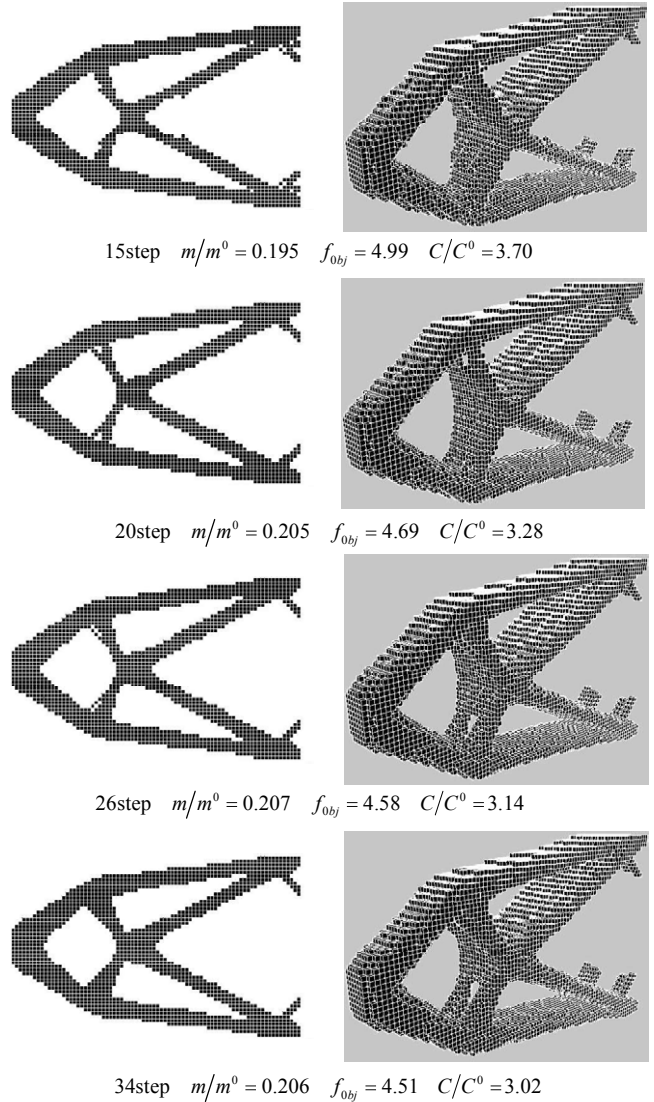


図 4 制約条件を満たす解の要素分布

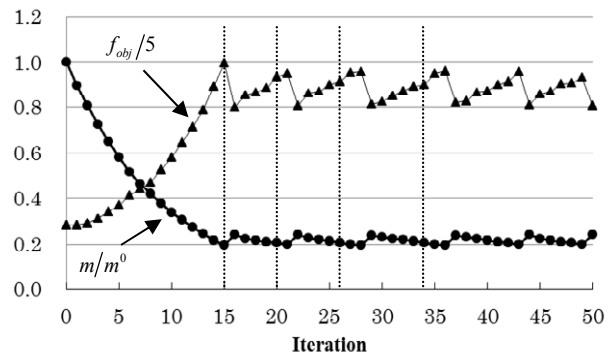


図 5 各ステップにおける総密度比 ( $m/m^0$ ) と目的関数  $f_{obj}$  の推移



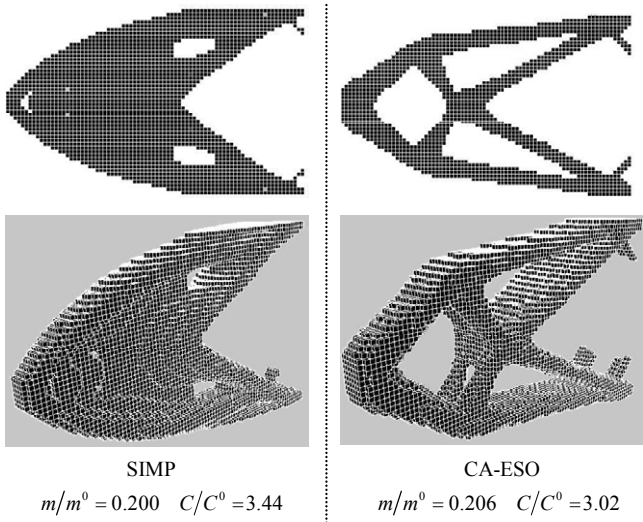


図6 SIMP法とCA-ESO法の解の比較

図6は、SIMP法の解とCA-ESOの解(図4の34stepの解)を比較したものである。ただし、SIMP法では、(6)式の $pp$ を2、 $ps$ を2.5(以下の解析例も同じ設定)、(8)式の $w$ を2.0とし、最適化ステップ数50として解析している。図より、SIMP法の解は、内部構造が板(面)となっているのに対し、CA-ESO法では骨組的な構造となっていることがわかる。また、コンプライアンス比も、CA-ESO法の解の方が小さくなっている。なお、SIMP法では、(8)式の $w$ の値をさらに増加させれば内部構造に穴を空けることもできるが、コンプライアンス比が高くなり局所解となる。

次に、文献23)に示される例題(図7)の解析を行う。解析は、対称性を利用して1/4領域で行い、要素分割数は、 $60 \times 60 \times 40$ の144000要素(1/4領域)としている。また、総密度制約値 $\bar{m}/m^0$ は0.05、最適化ステップ数は50としている。ただし、応力集中を避けるため、支持点の拘束は4節点で与えている。

図8は、CA-ESO法の最適解を示す。ただし、CA-ESO法の $\eta$ は0.2としている。また、図9は、各ステップの総密度比と(15)式の目的関数の推移を示したものである。この場合、総密度比制約を満足する解は、12、17、22、33、38、43、48ステップで得られ、48ステップの解が最適解となる。また、図10は、SIMP法とCA-ESO法の全領域の透視図を比較したものである。ただし、SIMP法では、(8)式の $w$ を0.5とし、最適化ステップ数50として解析している。

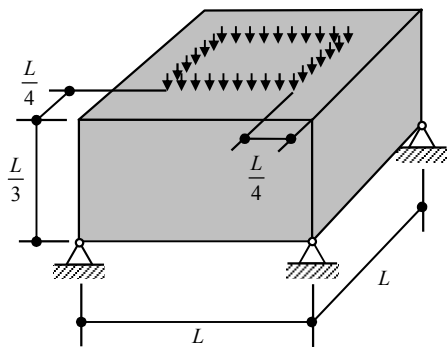


図7 解析例2

図10より、両解析共に同様な位相が得られているが、CA-ESO法の解ではSIMP法と比較してコンプライアンス比が低く、ヒトデを連想させるより自然な形態が得られていることがわかる。

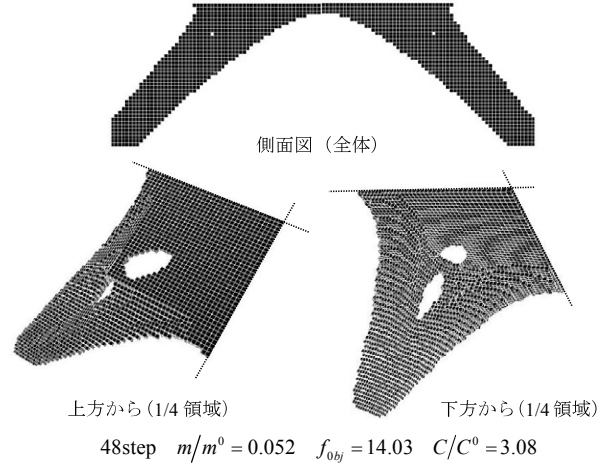


図8 解析例2の最適位相の比較

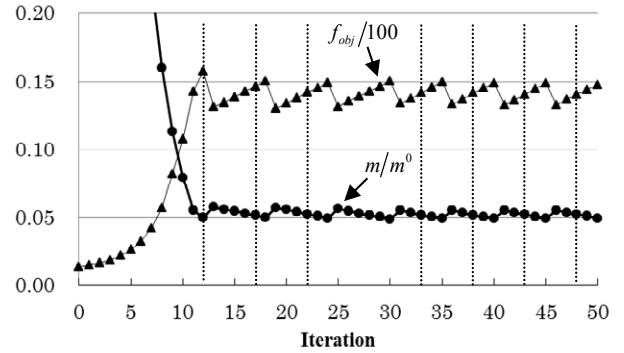


図9 各ステップにおける $m/m^0$ と $f_{obj}$ の推移

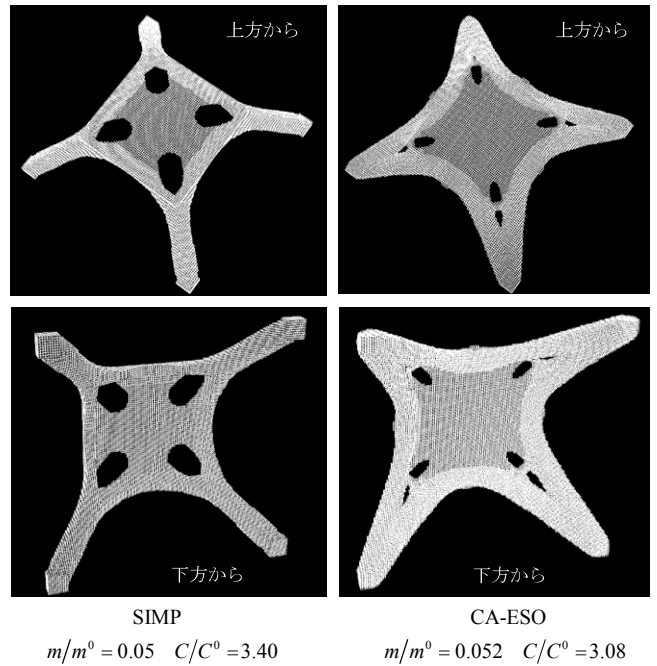


図10 SIMP法とCA-ESO法の解の比較

5.2 応用的な例題

次に応用例として、文献 17)に掲載されているイタリアフィレンツェ新駅コンペ案の構造形状決定に用いられた解析例を取り上げる。図 11 は、文献に示されている条件をもとに作成した設計領域である。解析は対称性を利用して 1/4 領域で行い、要素分割数は  $150 \times 42 \times 30$  の 189000 要素としている。ただし、長手方向中央の高さ 6m の空間と短手方向中央の  $2\text{m} \times 6\text{m}$  のスリット (通路) は密度 0 に固定し、また、分布荷重が加わる上面一層は密度 1 に固定する。また、総密度制約値  $\bar{m}/m^0$  は 0.1、最適化ステップ数は 100 とし、支持点は応力集中を避けるため 9 節点の正方形領域で固定する。

図 12 は、解析で得られた最適位相の側面図と透視図を示し、図 13 は、各ステップの総密度比と(15)式の目的関数の推移を示している。ただし、CA-ESO 法の  $\eta$  は 0.3 としている。図より、本解析結果は、文献 17)の結果とは多少異なるが、ボクセル解析においても要素分割を細かくすることで滑らかな形態が得られることがわかる。

図 14 は、SIMP 法と CA-ESO 法の全領域の透視図を比較したものである。ただし、SIMP 法では(8)式の  $w$  を 1.0 とし、最適化ステップ数 50 としている。図より、この場合も、CA-ESO 法の解の方がより低いコンプライアンス比となっており、SIMP 法に比較して樹木を連想させるより自然な形態となっていることがわかる。

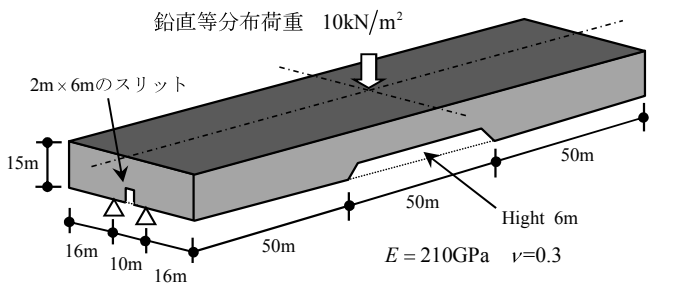
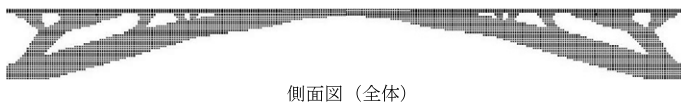
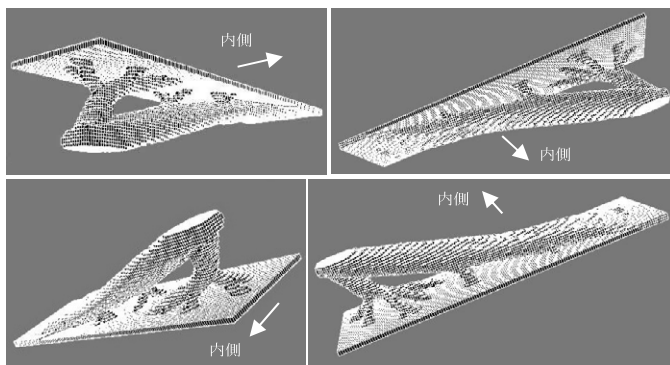


図 11 解析例 3



側面図 (全体)



透視図 (1/4領域)

73step  $m/m^0 = 0.105$   $f_{obj} = 5.64$   $C/C^0 = 2.55$

図 12 解析例 3 の最適位相

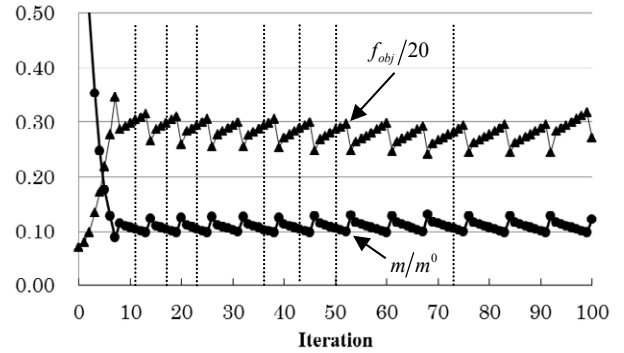
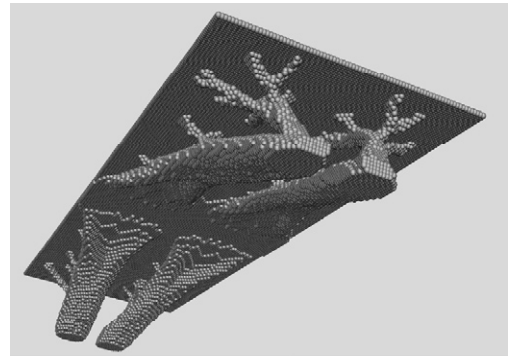
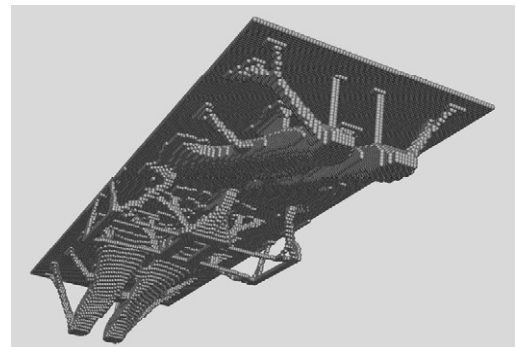


図 13 各ステップにおける  $m/m^0$  と  $f_{obj}$  の推移



CA-ESO  $m/m^0 = 0.105$   $C/C^0 = 2.55$



SIMP  $m/m^0 = 0.100$   $C/C^0 = 2.67$

図 14 SIMP 法と CA-ESO 法の解の比較

5.3 CA-ESO 法と SIMP 法の計算時間等の比較

最後に表 1 は、以上の 3 つの解析例の最適化ステップ数を 50 にした場合の計算時間を比較したものである。表より、CA-ESO 法の計算時間は SIMP 法に比較して短いことがわかる。これは、CA-ESO 法の場合、除去要素の応力計算を行わないためである。なお、以上の解析例では、両解析法ともに連立方程式の解法である CG 法において解が収束しない問題は生じていない。

表 1 計算時間の比較 (ステップ数 50)

|       | CA-ESO 法  | SIMP 法    |
|-------|-----------|-----------|
| 解析例 1 | 5 分       | 10 分      |
| 解析例 2 | 15 分      | 36 分      |
| 解析例 3 | 2 時間 14 分 | 5 時間 19 分 |

プロセッサ : Intel Core i5-3770CPU@3.6GHz メモリ : 4GB

ただし、CA-ESO 法では、解析例 3 において、50 ステップ以降にも目的関数がより最小となる解が見つかっており、解の収束性については SIMP 法に比較して一概に有利とは言えない。また、パラメータ設定の難易度については、SIMP 法の(8)式の  $w$  と CA-ESO 法の(12)式の  $\eta$  の設定難易度はほぼ同程度で、数回の試行錯誤で適切な解を見つけることができる。なお、これら二つのパラメータはどちらも複雑な位相をよりシンプルな位相にするために必要なものとなっている<sup>18)</sup>。

## 6. まとめ

本論文では、発見的手法である CA-ESO 法とボクセル (voxel) 有限要素法を組み合わせた 3 次元構造物の位相最適化手法を提案し、既往の文献に示される解析モデルで解析を行い、その有効性を検討した。その結果、以下のことが明らかになった。

- (1) 提案手法 (CA-ESO 法) では、最適化の過程で解析対象要素数が減少して行くため計算効率が良い。
- (2) 提案手法では、連立方程式の解法として反復解法 (前処理付共役勾配法) を用いているため、剛性マトリクスが特異となる場合も安定的に解が求まる。
- (3) 提案手法では、element by element 法により全体剛性マトリクスを構成せずに連立方程式を解くため、4GB のメモリで数十万要素の問題が容易に解析できる。
- (4) 提案手法では、ESO 法と CA 法の繰り返しの過程で最小解が更新 (改善) され、より剛性の高い解が得られる。
- (5) 提案手法では、フィルタリング等の特別な操作をしなくてもパラメータ  $\eta$  の設定でシンプルな形態が得られる。
- (6) 提案手法の解と SIMP 法の解を比較した結果、いずれの場合も CA-ESO 法の方がより剛性の高い解が得られ、より自然に近い形態 (ヒトデや樹木のような形態) となる。

ただし、以上の結果は、あくまで応力を指標とする剛性最大化問題に対して言えることで、他の最適化問題への適用性についてはさらに検証を行っていく必要がある。また、SIMP 法については、本論文に示すペナルティのかけ方およびフィルタリング法を用いた場合の結果であることを付記しておく。

## 参考文献

- 1) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N. : Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 2) Suzuki, K. and Kikuchi, N. : A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 3) Fernandes, J.M., Guedes, J.M., Rodrigues, H. : Topology optimization of three-dimensional linear elastic structures with a constraint on "perimeter", Computers and Structures, Vol.73, pp.583-594, 1999
- 4) Min, S., Nishiwaki, S., Kikuchi, N. : Unified topology design of static and vibrating structures using multiobjective optimization, Computers and Structures, Vol.75, pp.93-116, 2000
- 5) Bendsoe, M. P. : Optimal shape design as a material distribution problem, Structural Optimization, Vol.1, pp.193-202, 1989
- 6) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N. : The COC algorithm, Part II, Topological, geometrical and generalized shape optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, pp.309-336, 1991
- 7) Yang, R. J. and Chuang, C. H. : Optimal topology design using linear programming, Computers & Structures, Vol.52, No.2, pp.265-275, 1994
- 8) Sethian, J. A. and Wiegmann, A. : Structural boundary design via level-set and immersed interface methods, Journal of Computational Physics, Vol.163, No.2, pp.489-528, 2000
- 9) Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D. : A level Set Method for Structural Topology Optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192, No.1-2, pp.227-246, 2003
- 10) Takezawa, A., Nishiwaki, S., Kitamura M. : Shape and topology optimization based on the phase field method and sensitivity analysis, Journal of Computational Physics, Vol.229, pp.2697-2718, 2010
- 11) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., Takezawa, A. : A topology optimization method based on the level set method incorporation a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.199, pp.2876-2891, 2010
- 12) Xie, Y.M., Steven, G.P. : A simple evolutionary procedure for structural optimization, Computers and Structures Vol.49, pp.885-886, 1993
- 13) Young, V., Querin, O. M., Steven, G. P. and Xie, Y. M. : 3D and Multiple Load Case Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization (BESO), Structural Optimization, Vol.18, pp.183-192, 1999
- 14) Huang, X., Xie, Y.M. : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.43, pp.1039-1049, 2007
- 15) Huang, X., Xie, Y.M. : Evolutionary topology optimization of continuum structures including design-dependent self-weight loads, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.47, pp.942-948, 2011
- 16) 大森博司, 崔昌禹: 等値線を利用した拡張 ESO 法による構造形態の創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 539 号, pp.87-94, 2001.1
- 17) 崔昌禹, 大森博司, 佐々木睦朗: 拡張 ESO 法による構造形態の創生—三次元構造への拡張—, 日本建築学会構造系論文集, 第 576 号, pp.79-86, 2004.2
- 18) 藤井大地, 真鍋匡利: CA-ESO 法による構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.78, 第 691 号, pp.1569-1574, 2013.9
- 19) 藤井大地: パソコンで解く構造デザイン, 丸善, 2002
- 20) 藤井大地: 建築デザインと最適構造, 丸善, 2008
- 21) Zhou, M., Rozvany, G.I.N. : On the validity of ESO type methods in topology optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.21, pp.80-83, 2001
- 22) Hollister, S.J. and Kikuchi, N., Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, Biotechnology and Bioengineering, 43, No.7, pp.586-596, 1994
- 23) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣: ボクセル有限要素法を用いた構造物の位相最適化, 日本計算工学会論文集, Vol.2, pp.87-94, 2000
- 24) 鈴木克幸分担執筆, 計算力学ハンドブック (I 有限要素法構造編), 日本機械学会, pp.23-31, 1998
- 25) Wenget, J.M., Hughes, T.J.R. : Solution Algorithms for Nonlinear Transient Heat Conduction Analysis Employing Element-by- Element Iterative Strategies, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pp.711-815, 1985
- 26) 関口美奈子, 菊池昇, 混合的な有限要素剛性マトリクスの導き方に関する一考察—Clough 1960 年の論文を中心として—, 計算工学講演会論文集, Vol.4, No.1, pp.131-134, 1999

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF 3D STRUCTURES  
USING CA-ESO METHOD AND VOXEL FINITE ELEMENT METHOD*Daiji FUJII*<sup>\*</sup>, *Ryo OKABE*<sup>\*\*</sup> and *Masatoshi MANABE*<sup>\*\*\*</sup><sup>\*</sup> Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr. Eng.<sup>\*\*</sup> Graduate Student, Graduate School, Kinki University<sup>\*\*\*</sup> Staff Member, Kimura Architects and Engineers Office, M. Eng.

Recently, topology optimization of three dimensional (3D) structures is paid attention again by the development of manufacturing technology using 3D printer. Therefore, in this paper, an efficient topology optimization method for 3D structures is proposed.

In the proposed method, CA-ESO method is used for the topology optimization and the voxel finite element method is used for the stress analysis of 3D structures. In this method, the design domain is divided in same rectangular parallelepiped elements (voxels) (Fig.1), and in the optimization process, elements with low stress are deleted by ESO (Evolutionary Structural Optimization) method, and peripheral elements of the element with high stress are generated by CA (Cellular Automaton) method (Fig.2). Also, in the voxel finite element method, the stress assumed element, CG solver, and element by element method are used. Several numerical examples are shown in order to demonstrate the effectiveness of the present method for 3D structures.

The results of the analysis of the numerical examples (Fig.3~Fig.14) show that because the total number of elements are reduced in the optimization process, the computational efficiency of the proposed method (CA-ESO) is better than SIMP method (Table 1). Also, because the iteration method (CG solver) is used for solving the simultaneous equations, the optimum solutions can be obtained stably. Furthermore, because the element by element method is used for CG solver, huge memory of computer for the global stiffness equation can be saved.

The comparison of CA-ESO method and SIMP method (Fig.6, Fig.10, Fig.14) show that the compliances of the optimum solutions of CA-ESO method are lower than that of SIMP method in all numerical examples. Also, the topologies of CA-ESO method are more natural than that of SIMP method. Therefore, it can be seen that CA-ESO method is more useful for the architectural design than SIMP method.

(2014年2月10日原稿受理, 2014年6月2日採用決定)

## 改良型 ESO 法を用いた 3 次元構造物の位相最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF 3D STRUCTURES  
USING IMPROVED ESO METHOD

新内洋平\*, 松本慎也\*\*, 藤井大地\*\*\*

Yohei NIUCHI, Shinya MATSUMOTO and Daiji FUJII

In this paper, an improved ESO (Evolutionary Structural Optimization) method for the topology optimization of 3D structures is proposed. In the proposed method, the idea of BESO method and the idea of extended ESO method are combined. In this method, the design domain is divided in same eight-node brick elements (voxels), and in the optimization process, for solid element, it will be removed if the strain energy is less than the threshold value. This threshold value is obtained from the equation proposed in extended ESO. This equation consists of the mean value of sensitivity number and the average deviation of sensitivity number with a control parameter. In the proposed method, the evolutionary volume ratio (reduction ratio) is given as input data, and this control parameter is determined automatically in the program so as to satisfy the given reduction ratio approximately. Several numerical examples are shown in order to demonstrate the effectiveness of the proposed method for 3D structures.

**Keywords:** Topology optimization, ESO method, Voxel finite element method, Three dimensional structure, Computational Morphogenesis

位相最適化, ESO 法, ボクセル有限要素法, 3次元構造, 構造形態創生

## 1. はじめに

近年, 解析技術や生産・製造技術等の発達により, 様々な形態の建築物が造られるようになってきている。また, 3D プリンタの普及により, より軽量で剛性の高い 3 次元構造形態を創生する技術の必要性が高まっている。位相最適化手法は, このようなニーズに応える形態創生手法の一つである。

位相最適化手法は, 大きく数理計画法にもとづく方法と発見的的手法にもとづく方法の 2 種に分類される。3 次元解析が可能な実用的手法としては, 数理計画法では, 均質化法<sup>1)</sup>, SIMP 法<sup>12)</sup>, レベルセット法<sup>3,4)</sup>等が挙げられ, 発見的手法では, ESO 法<sup>5)</sup>, BESO 法<sup>6,7)</sup>, 拡張 ESO 法<sup>8,9)</sup>等が挙げられる。一方, 著者藤井らは, CA 法と拡張 ESO 法を組み合わせた CA-ESO 法<sup>10,11)</sup>を提案し, 2 次元および 3 次元の剛性最大化問題において, 数理計画法にもとづく SIMP 法と同等以上の性能を有することを示している。

発見的手法の内, BESO 法<sup>6,7)</sup>は, SIMP 法と類似した方法で, SIMP 法が要素密度を連続関数として各ステップの密度の増減を求めるのに対して, BESO 法は各ステップの目標体積を定めて, 歪みエネルギー感度の低い要素を除去し, 感度の高い要素を復活させる。また, BESO 法では, 要素感度を節点感度に置き換え, 要素の除去・復活の指標に用いる要素感度を各要素の影響半径内の節点感度から重み付き平均により計算する方法を用いている。このような方法で, 格

子メッシュで見られるチェッカーボード状の密度分布を防ぐとともに, 除去要素の感度も影響半径内の節点感度から計算できるようにしている。なお, 要素感度を節点感度に置き換える方法は, 松井, 寺田<sup>12)</sup>によって提案され, SIMP 法による汎用ソフトにも用いられている。これに対して, 拡張 ESO 法<sup>8,9)</sup>は, 各ステップで応力等値線を作成し, 応力平均と偏差平均を指標とする閾値によって要素の除去と付加を行う。また, 各ステップでリメッシングを行うため, 境界形状が滑らかな位相が得られる特徴がある。一方, 著者藤井らが提案している CA-ESO 法<sup>10,11)</sup>は, BESO 法と類似した方法ではあるが, 各ステップの要素除去に目標体積を定めない拡張 ESO 法のルールを採用している点と, BESO 法のように各ステップで要素除去と復活を同時に行うのではなく, どちらか一方のみを行うところに特徴がある。

以上の発見的手法を SIMP 法と比較すると, SIMP 法では, 除去要素の密度を完全に 0 にすることができないために, 除去要素が増えなくても計算負荷が変わらないのに対して, 発見的手法では, 除去要素が増えるにしたがって計算負荷が軽くなる利点がある。しかしながら, BESO 法では各ステップの体積減少率を 1%程度にするため, 目標体積に達するまでに計算時間を要し, CA-ESO 法では目標体積には速く達するが, その後の CA 法と ESO 法の繰り返しで計算時間を要する可能性がある。3 次元問題においては, 要素数が膨大になるた

\* 近畿大学大学院 システム工学研究科 大学院生  
\*\* 近畿大学工学部 准教授・博士(工学)  
\*\*\* 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

Grad. Stud., Graduate School of Systems Engineering, Kinki University  
Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.  
Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.

め計算時間は重要な問題で、特に自重問題では、除去過程で孤立要素（節点が連続しない要素）が生じやすく、除去要素に微小密度を与えないと連立方程式（間接法）の解が収束しないため、SIMP法よりも計算効率が悪くなる場合がある。一方、格子メッシュを用いない拡張ESO法では、このような問題は生じないが、四面体要素でリメッシングを行うために、要素数が膨大になると異形メッシュの修正等が必要となり、計算負荷が増大する可能性がある。

以上のような問題を解決するために、本論文では、CA-ESO法やBESO法よりも計算効率が良く、しかもパラメータ設定が容易で、より確実に優良解が求まる手法を提案する。本手法は、CA法を用いずにESO法のみで収束解を得る改良型ESO法で、以下ではIESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) 法と呼ぶ。

本方法では、拡張ESO法で用いられている感度（敏感数）の平均値と偏差平均を指標とする閾値を用いるが、要素感度として von Mises 応力の代わりに BESO法と同様のひずみエネルギー感度を用いる。また、von Mises 応力の代わりにひずみエネルギー感度を用いると、閾値を制御するパラメータの設定が非常に難しくなるため、このパラメータを入力データとして与える代わりに、各ステップの要素除去率を入力データとして与え、プログラム内で、その要素除去率を近似的に満足するパラメータを自動計算する。また、本方法では、要素除去率は、設計対象とする残存要素数に適用するため、各ステップの体積減少率は BESO法のように一定ではなく、ステップが進むにしたがって小さくなる。また、要素除去率も10%前後で与えるため、収束が速く、通常の問題では30ステップ程度で収束解が得られる。ただし、本手法で与える除去率はあくまで指標であり、各ステップの実際の除去率は閾値によって定まる。

本論文では、以上のように非常にシンプルで収束の速い IESO法で、十分実用に耐えうる優良解が得られることを示す。なお、本論文で用いる有限要素解析法は、文献11)に示した8節点応力仮定法要素を用いたボクセル有限要素法である。したがって、有限要素解析の定式化は本論文では割愛する。

2. 有限要素解析法の概要

本論文に用いる位相最適化手法では、設計領域を包含する直方体領域（図1）を考え、これを均等な直方体要素（voxel）で分割する。そして、実際の設計領域はボクセルの材料密度の有無（1/0）によって与える。この時、図1の直方体領域の各辺の長さを  $L_x, L_y, L_z$  とし、各辺の有限要素分割数を  $n_x, n_y, n_z$  とすると、直方体要素（voxel要素）の各辺の長さ  $l_x, l_y, l_z$  は次式で定義される。

$$l_x = \frac{L_x}{n_x}, \quad l_y = \frac{L_y}{n_y}, \quad l_z = \frac{L_z}{n_z} \tag{1}$$

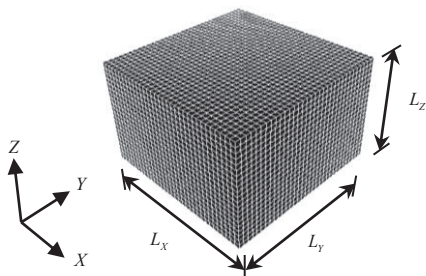


図1 ボクセル有限要素法の解析領域

有限要素は8節点応力仮定法要素とし、全体剛性方程式の解法には前処理付き共役勾配法を用いる<sup>11,13)</sup>。また、反復計算においては要素剛性マトリクスと変位ベクトルのかけ算を要素ごとに行い、これをベクトルとして保存していく Element-by-Element 法<sup>14)</sup>を用いる（文献13）5章等を参照）。

3. IESO法による3次元構造の位相最適化

提案手法（IESO法）による位相最適化では、ボクセル解析のメリットを生かすため、最適化の過程でリメッシュ（節点の再番号付け）は行わず、存在要素の密度を1、除去要素の密度を0とすることで各ステップの設計領域を定義する。そして、除去要素（密度0の要素）は、Element-by-Element法の計算から除外する。ただし、除去要素に微小密度を設定する場合（自重問題等）は除外しない。

3.1 ひずみエネルギー感度の計算法

要素のひずみエネルギー感度の計算については、BESO法で示されている方法を採用する。この方法では、まず、SIMP法と同様に、要素の剛性に比例する係数を要素密度と定義し、 $i$ 番目要素の剛性マトリクス  $\mathbf{k}_i$  が次式で表されるものとする。

$$\mathbf{k}_i = \rho_i \mathbf{K}_i \quad 0 \leq \rho_i \leq 1 \tag{2}$$

ただし、 $\rho_i$  は  $i$ 番目要素の要素密度を表し、 $\mathbf{K}_i$  は  $i$ 番目要素の初期要素剛性マトリクスを表す。ただし、ここでは、SIMP法のように密度  $\rho_i$  にべき乗のペナルティは課さない。

また、最適化問題も、SIMP法と同様、質量制約下でのコンプライアンスの最小化とする。

$$\begin{aligned} \min f_{obj}(\boldsymbol{\rho}) &= C(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to } m(\boldsymbol{\rho}) &= \sum_{i=1}^N \rho_i = \bar{m} \\ \boldsymbol{\rho} &= \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_N\} \quad 0 \leq \rho_i \leq 1, \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \tag{3}$$

ここに、 $C$  はコンプライアンス、 $\mathbf{d}, \mathbf{K}$  は節点変位ベクトルと全体剛性マトリクス、 $m$  は総密度、 $\bar{m}$  は総密度の制約値、 $N$  は要素総数である。このとき、コンプライアンス  $C$  の設計変数  $\rho_i$  に関する感度は次式により計算される<sup>13,15)</sup>。

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = -\mathbf{d}_i^T \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \rho_i} \mathbf{d}_i = -\mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \tag{4}$$

したがって、ESO法<sup>5)</sup>では、次式の値を要素のひずみエネルギー感度（敏感数）として、これを要素除去の指標に用いている。

$$\alpha_i^e = (1/2) \mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \tag{5}$$

一方、BESO法<sup>6,7)</sup>では、チェッカーボード状の密度分布を防ぐため、まず、(5)式の感度から次式により節点の感度を求める。

$$\alpha_j^n = \left( \sum_{i=1}^{M^e} V_i \alpha_i^e \right) / \sum_{i=1}^{M^e} V_i \tag{6}$$

ここに、 $\alpha_j^n$  は  $j$ 番目節点のひずみエネルギー感度、 $M^e$  は  $j$ 番目節点に繋がる要素数、 $V_i$  は  $j$ 番目節点に繋がる  $i$ 番目要素の体積を表す。ただし、ボクセル有限要素法では、要素体積は均一であるため、実際には次式で計算される。

$$\alpha_j^n = \left( \sum_{i=1}^{M^e} \alpha_i^e \right) / M^e \tag{7}$$

さらに、(7)式から要素の除去・復活の指標に用いる要素のひずみエネルギー感度は次式により計算される。

$$\alpha_i = \left( \frac{\sum_{j=1}^{M^n} w(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^{M^n} w(r_{ij})} \right) \quad (8)$$

ここに、 $\alpha_i$  は  $i$  番目要素のひずみエネルギー感度、 $M^n$  は  $i$  番目要素の要素中心から影響半径  $r_{\min}$  の球体内に含まれる節点数、 $r_{ij}$  は  $i$  番目要素の中心から  $j$  番目節点までの距離、 $w(r_{ij})$  は要素中心からの距離に比例する重みで、次式で定義される。

$$w(r_{ij}) = r_{\min} - r_{ij} \quad (j=1,2,\dots,M^n) \quad (9)$$

なお、BESO 法では、除去要素の急激な感度低下を防ぐために、現更新ステップの感度と 1 つ前の更新ステップの感度の平均値をとり、最終的に次式により要素の感度を評価している。

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^{(k)} + \alpha_i^{(k-1)}}{2} \quad (10)$$

BESO 法では、以上の感度計算法により、残存要素、除去要素両方の感度を求めている。しかしながら、本論文で提案する IESO 法では除去要素の復活は行わないため、除去要素の感度計算は必要ない。したがって、(10)式の平均化は用いず、(8)式によりひずみエネルギー感度を求める。

### 3.2 要素除去の方法

IESO 法では、要素除去に関しては、拡張 ESO 法<sup>8,9)</sup>のルールを用いる。ただし、本手法では、要素除去の指標として、各要素の von Mises 応力の代わりに、(8)式のひずみエネルギー感度を用いる。したがって、要素除去のルールは次式となる。

$$\rho_i = 0 \quad \text{if} \quad \alpha_i < X_{cr} \quad ; i=1,\dots,N_L \quad (11)$$

ここに、 $N_L$  は残存要素数、 $X_{cr}$  は閾値で、次式で定義される。

$$X_{cr} = \alpha_{av} - \eta \cdot \phi \quad (12)$$

ただし、 $\alpha_{av}$  と  $\phi$  は残存要素のひずみエネルギー感度の平均値と偏差平均であり、次式から計算される。

$$\alpha_{av} = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} \alpha_i \quad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_L} (\alpha_i - \alpha_{av})^2}{N_L}} \quad (13)$$

ここに、 $\eta$  は要素の除去量を制御する制御変数であり、 $\eta$  が大きいと要素が除去されにくく、 $\eta$  が小さいと除去されやすくなる。

しかしながら、ひずみエネルギー感度の場合、von Mises 応力と比較して、(12)式の  $\eta$  の与え方が難しく、 $\eta$  の微妙な変化で除去量が大きく変化する可能性がある。そこで、IESO 法では、BESO 法と同様に各ステップの要素除去率を与え、この除去率を近似的に満たす  $\eta$  をプログラム内で自動計算することを考える。

まず入力データとして与える除去率を  $\lambda$  とすると、第  $k$  ステップの除去要素数  $N_R^{(k)}$  は、次式で計算される。

$$N_R^{(k)} = \begin{cases} \lambda N_L^{(k-1)} & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} \geq \bar{N}_L \\ N_L^{(k-1)} - \bar{N}_L & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} < \bar{N}_L \end{cases} \quad (14)$$

ここに、 $N_L^{(k-1)}$  は  $(k-1)$  ステップの残存要素数、 $\bar{N}_L$  は残存要素数の制約値 (下限値) で、密度  $\rho_i$  が 0 と 1 の場合は(3)式の質量制約  $\bar{m}$  と一致する。

次に、(11)式で除去される要素数が、(14)式の  $N_R^{(k)}$  になる  $\eta^{(k)}$  を求めることになるが、あまり厳密に求めると(11)式を使う意味が無くなってしまいます。したがって、ここでは、次に示す計算フローによって、プログラム内で  $\eta^{(k)}$  を自動計算し、(14)式の  $N_R^{(k)}$  に近くなる  $\eta^{(k)}$

をプログラム内で近似的に求める。すなわち、 $\eta^{(k)}$  が 1 以上の場合、要素は非常に除去されにくいので、 $\eta^{(k)}$  の初期値を 1.5 とし、 $\eta^{(k)}$  を 1.5 から徐々に小さくしていくことで、要素除去数が  $N_R^{(k)}$  に近くなる  $\eta^{(k)}$  を探索する。以下は本プログラムで用いている計算フローで、小数点第 3 位までの精度で  $\eta^{(k)}$  を探索している。

- ①  $\eta^{(k)}$  の初期値を 1 とする。また、③のべき乗数  $p$  の初期値を 1、繰り返し数  $n$  の初期値を 0 とする。
- ② (12)式の  $\eta$  を  $\eta^{(k)}$  とし、(11)式により  $\rho_i = 0$  となる除去要素数  $\tilde{N}_R$  を求める。
- ③  $\tilde{N}_R < N_R^{(k)}$  なら、 $n = n + 1$ 、 $\eta^{(k)} = 1 - (0.1)^p \times n$  として②に戻る。  
 $\tilde{N}_R \geq N_R^{(k)}$  なら、 $\eta^{(k)} = 1 - (0.1)^p \times (n - 1)$ 、 $p = p + 1$ 、 $n = 0$  として②に戻る。ただし、 $p \geq 4$  かつ  $\tilde{N}_R < 3N_R^{(k)}$  ならば④に進む。
- ④  $\tilde{N}_R$  を確定し、要素除去を行う。

以上の計算フローでは、まず、 $p=1$  とし  $\eta^{(k)}$  を 0.1 ずつ減少させ  $\tilde{N}_R$  が  $N_R^{(k)}$  を超えると 1 ステップ戻し、次に  $p=2$  とし  $\eta^{(k)}$  を 0.01 ずつ減少させ  $\tilde{N}_R$  が  $N_R^{(k)}$  を超えると 1 ステップ戻し、さらに  $p=3$  とし  $\eta^{(k)}$  を 0.001 ずつ減少させ  $\tilde{N}_R$  が  $N_R^{(k)}$  を超えると 1 ステップ戻し、最後に  $\tilde{N}_R < 3N_R^{(k)}$  であれば  $\eta^{(k)}$  を確定し、要素除去を行う。ただし、 $\tilde{N}_R \geq 3N_R^{(k)}$  の場合は、 $\tilde{N}_R < 3N_R^{(k)}$  になるまで  $p$  をさらに増やす。なお、フローには示していないが、 $N_R^{(k)} = N_L^{(k-1)} - \bar{N}_L$  となる最終ステップでは、 $N_L$  が  $\bar{N}_L$  とほぼ一致するように  $p=5$  まで計算している。

### 3.3 IESO 法の計算フロー

図 2 は IESO 法の計算フローを示したものである。本解析に必要な入力データとしては、有限要素解析に必要なデータとして、設計領域の大きさ ( $L_x, L_y, L_z$ )、分割数 ( $n_x, n_y, n_z$ )、ヤング係数、ポアソン比、境界条件、荷重条件がある。また、最適化計算に必要なデータとして、影響半径  $r_{\min}$  (実際には、 $r_{\min} = b_r \cdot l_x$  として (1)式の  $l_x$  の倍数  $b_r$  (影響半径倍率) で与える)、残存要素数の下限値  $\bar{N}_L$  (実際には、目標体積比  $\bar{V}_r = \bar{N}_L / (n_x \cdot n_y \cdot n_z)$  で与える)、除去率  $\lambda$  がある。また、設計領域内に空間や固定スラブ等を設定する場合は、設計対象から除外する要素の番号・密度情報 (0/1) を入力する必要がある。

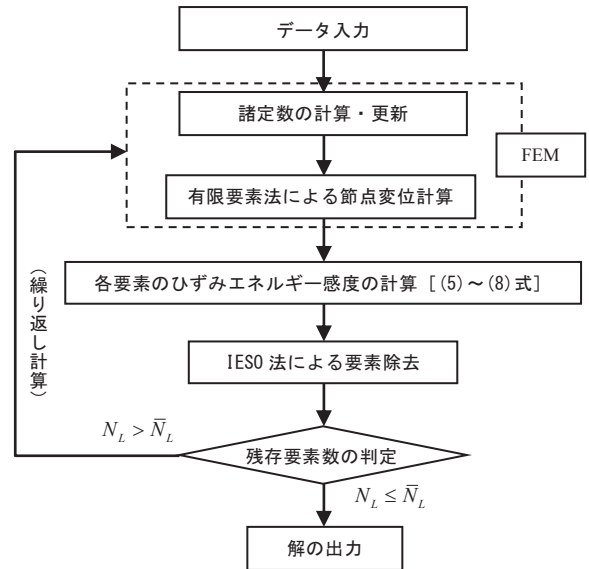


図 2 IESO 法の計算フロー

4. 解析例

まず、文献 9)等で取り上げられている片持梁例題の解析を行う。図 3 は、設計領域および荷重条件・境界条件を示す。ただし、長さ  $L$ 、幅  $B$ 、高さ  $H$  の比は  $1.6 : 0.4 : 1$  とし、設計領域の要素分割数は  $80 \times 20 \times 50$  としている。また、応力集中を防ぐため、荷重は 9 節点に均等に与えている。

図 4 は、目標体積比  $\bar{V}_r = 0.2$  とした場合の IESO 法の収束解を示す。図中には、収束ステップ数、目標体積比  $\bar{V}_r$ 、除去率  $\lambda$ 、影響半径倍率  $b_r$ 、収束解のコンプライアンス比  $C/C^0$  ( $C^0$  は初期コンプライアンス) も示している。(a)は標準解 (妥当と思われる解)、(b)は影響半径倍率の影響を見たもの、(c)は除去率の影響を見たものである。また、図 5 は、図 4(a)の各ステップの体積比  $V_r = N_L / (n_x \cdot n_y \cdot n_z)$  とコンプライアンス比  $C/C^0$  の推移を示したものである。また、図 6 は、文献 11)において同様の解析により得られた SIMP 法と CA-ESO の解を示したものである。ただし、SIMP 法、CA-ESO 法では、50 回の最適化繰り返し計算を行っている。

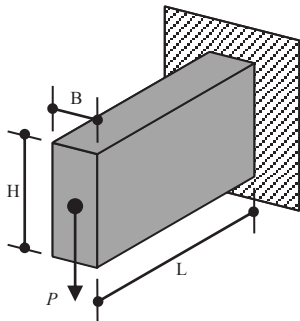


図 3 解析例 1

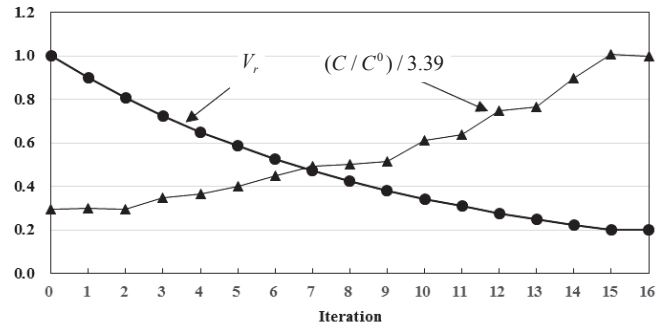


図 5 各ステップにおける体積比とコンプライアンス比の推移

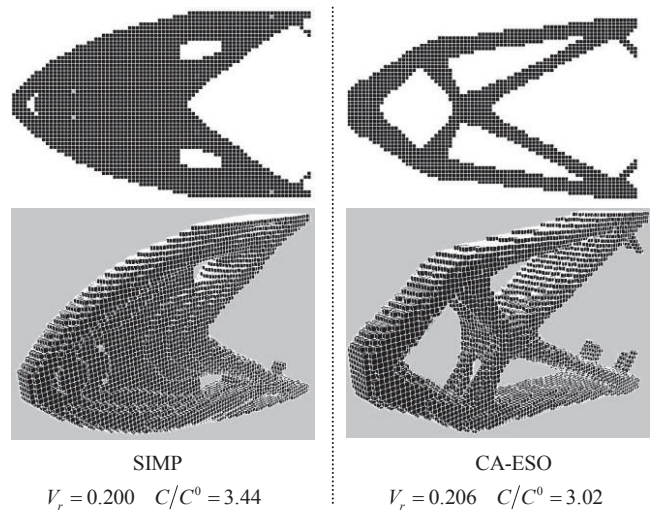
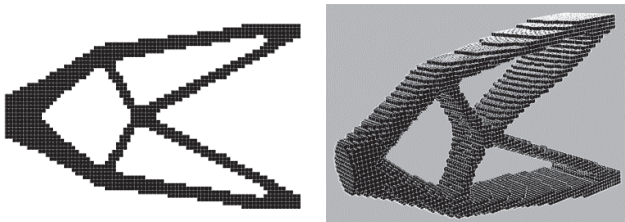
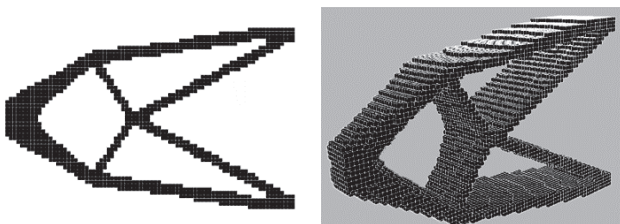


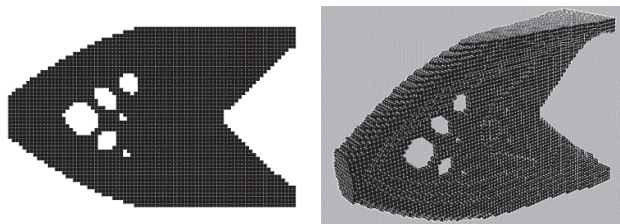
図 6 SIMP 法と CA-ESO 法の解<sup>11)</sup>



(a) 16step  $V_r = 0.2$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $b_r = 3$ ,  $C/C^0 = 3.39$



(b) 16step  $V_r = 0.2$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $b_r = 1$ ,  $C/C^0 = 3.42$



(c) 146step  $V_r = 0.2$ ,  $\lambda = 0.01$ ,  $b_r = 3$ ,  $C/C^0 = 2.93$

図 4 解析例 1 の収束解

以上の結果より、IESO 法では、除去率  $\lambda$  を 0.1、影響半径倍率  $b_r$  を 3 とすることで、解のコンプライアンス比は、SIMP 法とほぼ同等で、CA-ESO 法とほぼ同様の位相が、わずかに 16 ステップの計算で得られることがわかる。また、図 4 の (a) と (b) の比較により、影響半径倍率 1 と 3 ではほぼ同様の形態となり、影響半径の影響はあまり無いこと、(a) と (c) の比較では、除去率  $\lambda$  を 0.01 と小さくすると、コンプライアンス比は小さくなるが、SIMP 法と同様に面的な形態が得られ、収束も遅くなることがわかる。

次に、文献 16)に示される例題 (図 7) の解析を行う。解析は、対称性を利用して 1/4 領域で行い、要素分割数は、 $60 \times 60 \times 40$  の 144000 要素 (1/4 領域) としている。ただし、応力集中を避けるため、支持点の拘束は 4 節点で与えている。

図 8 は、目標体積比  $\bar{V}_r = 0.05$  とした場合の IESO 法の収束解を示す。図中には、収束ステップ数、目標体積比  $\bar{V}_r$ 、除去率  $\lambda$ 、影響半径倍率  $b_r$ 、収束解のコンプライアンス比  $C/C^0$  も示している。(a)は標準解、(b)は影響半径倍率の影響を見たもの、(c)は除去率の影響を見たものである。また、図 9 は、図 8(a)の各ステップの体積比  $V_r$  とコンプライアンス比  $C/C^0$  の推移を示したものである。また、図 10 は、文献 11)において同様の解析により得られた SIMP 法と CA-ESO の解を示したものである。ただし、SIMP 法、CA-ESO 法では、50 回の最適化繰り返し計算を行っている。

以上の結果より、IESO 法では、除去率  $\lambda$  を 0.1、影響半径倍率  $b_r$



を3とすることで、解のコンプライアンス比は SIMP 法と CA-ESO 法のほぼ中間で、CA-ESO 法および SIMP 法と類似の位相が、わずか22ステップの計算で得られることがわかる。

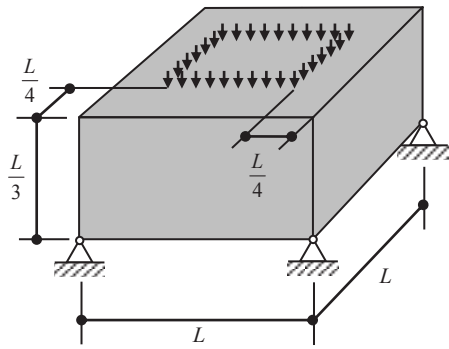


図7 解析例2

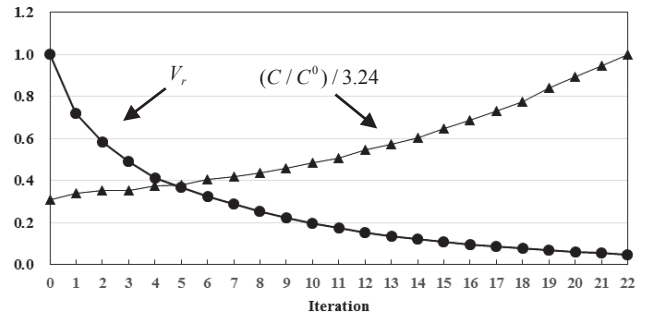
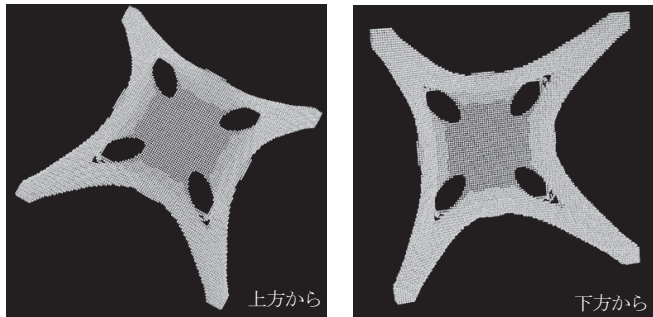
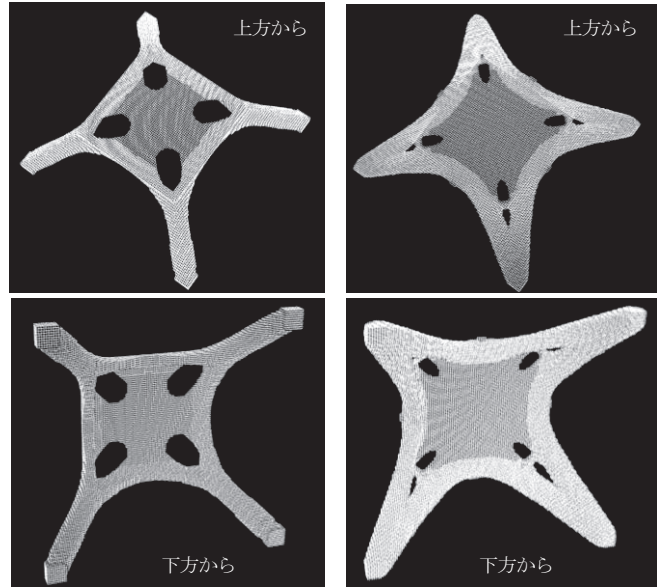


図9 各ステップにおける体積比とコンプライアンス比の推移



(a) 22step  $V_r=0.05$ ,  $\lambda=0.1$ ,  $b_r=3$ ,  $C/C^0=3.24$



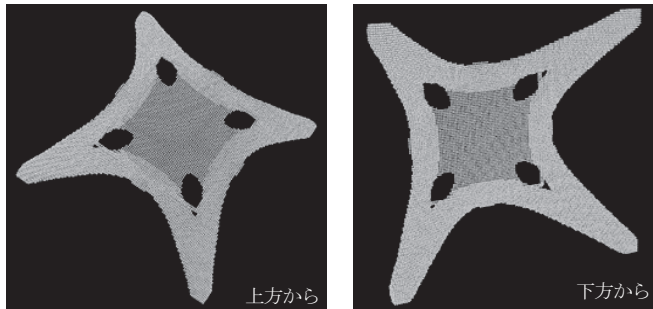
SIMP ( $V_r=0.05$   $C/C^0=3.40$ ) CA-ESO ( $V_r=0.052$   $C/C^0=3.08$ )

図10 SIMP 法と CA-ESO 法の解<sup>11)</sup>

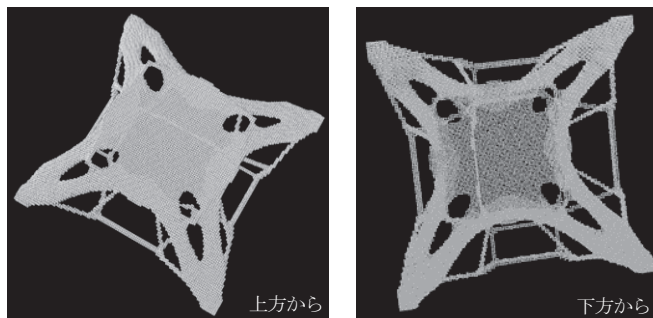
また、図8の(a)と(b)の比較により、影響半径1と3ではほぼ同様の形態となり、影響半径の影響はあまり無いこと、(a)と(c)の比較では、除去率 $\lambda$ を0.01と小さくすると、細い部材が残り、コンプライアンス比もあまり良くないことがわかる。

最後に、文献9)に掲載されているイタリアフィレンツェ新駅コンペ案の構造形状決定に用いられた解析例を取り上げる。図11は、文献に示されている条件をもとに作成した設計領域である。解析は対称性を利用して1/4領域で行い、要素分割数は $150 \times 42 \times 30$ の189000要素としている。ただし、応力集中を避けるため、支持点の拘束は9節点の正方形領域で与えている。

図12は、目標体積比 $\bar{V}_r=0.116$ とした場合の収束解を示す。なお、文献11)では、目標体積比を設計対象要素数(設計固定要素を除く要素数)に対して与えていたため、本解析ではこれと条件を合わせるように目標体積比を定めている。図中には、収束ステップ数、目標体積比 $\bar{V}_r$ 、除去率 $\lambda$ 、影響半径倍率 $b_r$ 、収束解のコンプライアンス比 $C/C^0$ も示している。(a)は標準解、(b)は影響半径倍率の影響を見たもの、(c)は除去率の影響を見たものである。また、図13は、図12(a)の各ステップの体積比 $V_r$ とコンプライアンス比の推移を示したものである。ここで、初期の $V_r$ が1にならないのは密度0の設計除外要素があるためである。



(b) 23step  $V_r=0.05$ ,  $\lambda=0.1$ ,  $b_r=1$ ,  $C/C^0=3.22$



(c) 188step  $V_r=0.05$ ,  $\lambda=0.01$ ,  $b_r=3$ ,  $C/C^0=3.31$

図8 解析例2の収束解

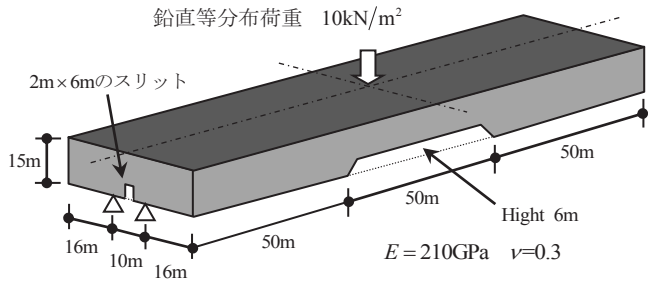


図 11 解析例 3

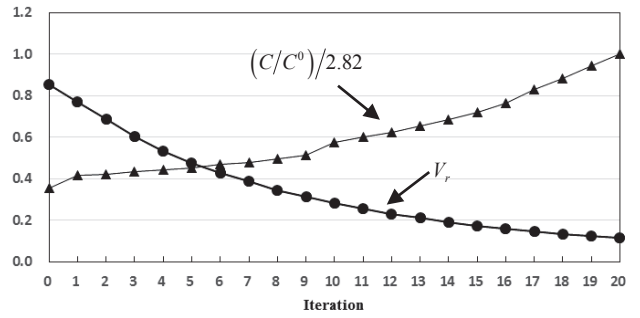
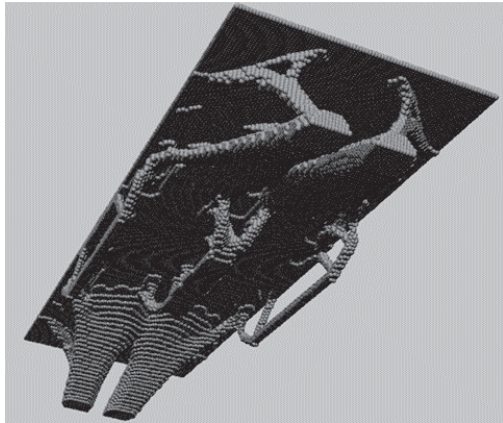
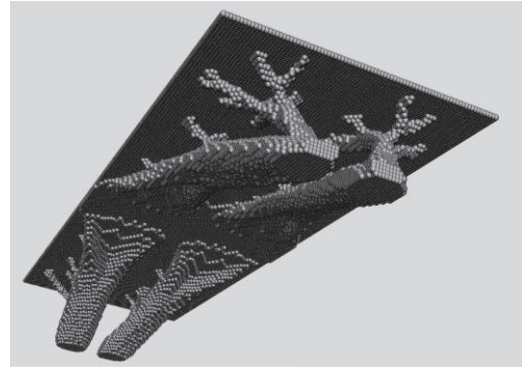


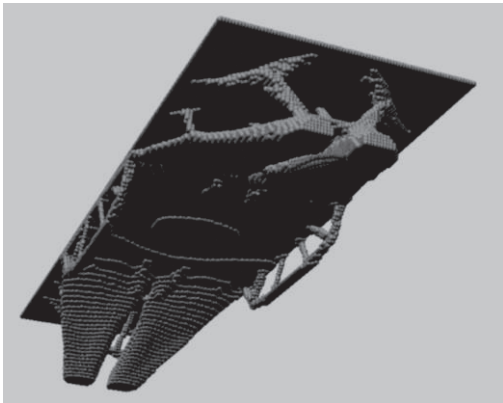
図 13 各ステップにおける体積比とコンプライアンス比の推移



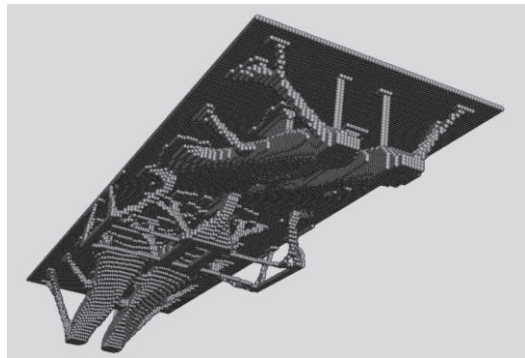
(a) 20step  $V_r = 0.116$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $b_r = 3$ ,  $C/C^0 = 2.82$



CA-ESO  
 $V_r = 0.122$   $C/C^0 = 2.55$

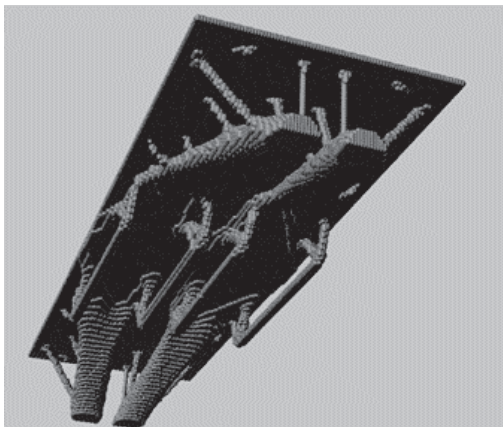


(b) 20step  $V_r = 0.116$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $b_r = 1$ ,  $C/C^0 = 2.98$



SIMP  
 $V_r = 0.116$   $C/C^0 = 2.67$

図 14 SIMP 法と CA-ESO 法の解<sup>11)</sup>



(c) 154step  $V_r = 0.116$ ,  $\lambda = 0.01$ ,  $b_r = 3$ ,  $C/C^0 = 2.73$

図 12 解析例 3 の収束解

また、図 14 は、文献 11)で同様の解析により得られた SIMP 法と CA-ESO 法の解（全領域の透視図）を示したものである。ただし、SIMP 法では 50 回、CA-ESO 法では 100 回の最適化繰り返し計算を行っている。

以上の結果より、IESO 法では、除去率  $\lambda$  を 0.1、影響半径倍率  $b_r$  を 3 とすることで、解のコンプライアンス比は、SIMP 法よりもやや高いが、CA-ESO 法と SIMP 法の間中間的な位相が、わずか 20 ステップの計算で得られることがわかる。また、図 12 の(a)と(b)の比較により、影響半径 1 と 3 では中間部の形態がやや異なり、 $b_r = 1$  の方が、ややコンプライアンス比が高くなること、(a)と(c)の比較では、除去率  $\lambda$  を 0.01 と小さくすると、コンプライアンス比はやや小さくなるが、SIMP 法に近いやや複雑な形態になることがわかる。

## 5. 計算時間の比較

表1は、IESO法、CA-ESO法、SIMP法の3つの解析例に対する計算時間を比較したものである。ただし、CA-ESO法の最適化繰り返し計算回数は、解析例1と2が50、解析例3が100、SIMP法はすべて50である。表より、IESO法の各解析例の(a)、(b)の計算時間は、CA-ESO法、SIMP法に比較して非常に短いことがわかる。これは、IESOの最適化過程の収束が速いことと、CA-ESO法と同様に除去要素の計算負荷が無いためである。なお、解析例1については、CA-ESO法とSIMP法の差があまりないのは、SIMP法においては途中からほとんど形が変化しないため、連立方程式の反復回数が少なくなり、計算速度が速まったためである。

また、パラメータ設定の難易度についても、IESO法のパラメータである影響半径倍率 $b_r$ と除去率 $\lambda$ は、3解析例とも3と0.1で、ほぼ実用的な解が求まり、事前解析の必要がほとんどない。CA-ESO法では、(12)式の最適な $\eta$ を見つけるために、また、SIMP法では、フィルタリング法<sup>13),15)</sup>の最適なパラメータを見つけるために少なからず事前解析が必要となるため、これは計算効率上大きなメリットとなる。

表1 計算時間の比較

|              | 解析例1             | 解析例2             | 解析例3                |
|--------------|------------------|------------------|---------------------|
| IESO法<br>(a) | 2.5分<br>(16step) | 11分<br>(22step)  | 1時間26分<br>(20step)  |
| IESO法<br>(b) | 4分<br>(16step)   | 18分<br>(23step)  | 1時間55分<br>(20step)  |
| IESO法<br>(c) | 5分<br>(146step)  | 31分<br>(188step) | 7時間35分<br>(154step) |
| CA-ESO法      | 5分<br>(50step)   | 22分<br>(50step)  | 5時間36分<br>(100step) |
| SIMP法        | 7分<br>(50step)   | 33分<br>(50step)  | 4時間25分<br>(50step)  |

プロセッサ：Intel Core i7-4700MQCPU@2.40GHz メモリ：8GB

## 6. まとめ

本論文では、BESO法と拡張ESO法のアイデアを組み合わせた改良型ESO法(IESO法)を提案し、その有効性を検討した。その結果、以下のことが明らかになった。

- (1) 提案手法(IESO法)では、影響半径倍率 $b_r=3$ 、要素除去率 $\lambda=0.1$ に設定することで、3つの解析例すべてで、CA-ESO法、SIMP法とほぼ同等の位相が求まる。このため、パラメータ設定が容易であり、パラメータ設定のための事前解析をほとんど行わずで済む。
- (2) 提案手法では、CA-ESO法、SIMP法と比較して最適化のための繰り返し計算回数が少なく、非常に計算効率が良い。
- (3) 提案手法で得られる位相はシンプルであり、コンプライアンス値はCA-ESO法との比較では5%~12%増、SIMP法との比較では-4%~6%増の範囲に収まるため、建築構造のデザインのヒン

トとして用いるには、十分有効な解が得られていると考えられる。

以上より、IESO法は、従来の方法と比較して非常に計算効率の良い方法と言える。

なお、本提案手法は設計初期の計画段階で用いることを想定しているため、多様な空間設定、多様な荷重・境界条件のもとでの多様な解の提示が要求されると考えられる。このような場合、厳密な解の精度よりも、位相のシンプルさや計算効率の良さが威力を発揮するものと思われる。また、厳密な解の精度が要求される場合は、IESO法の $\lambda=0.1$ の収束解からCA法で5%程度要素を付加し、そこから $\lambda=0.01$ としてIESO法で削れば、より洗練された解が得られることも付記しておく。

今後は、この計算効率の良さを生かすため、自重問題、地震力を受ける建築物等の解析を行う予定である。

## 参考文献

- 1) Bendsoe, M. P. : Optimization of Structural Topology, Shape, and Material, Springer, 1995
- 2) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N. : The COC algorithm, Part II, Topological, geometrical and generalized shape optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, pp.309-336, 1991
- 3) Sethian, J. A. and Wiegmann, A. : Structural boundary design via level-set and immersed interface methods, Journal of Computational Physics, Vol.163, No.2, pp.489-528, 2000
- 4) Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D. : A level Set Method for Structural Topology Optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192, No.1-2, pp.227-246, 2003
- 5) Xie, Y.M., Steven, G.P. : Evolutionary Structural Optimization, Springer, 1997
- 6) Huang, X., Xie, Y.M. : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.43, pp.1039-1049, 2007
- 7) Huang, X., Xie, Y.M. : Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications, Wiley, 2010
- 8) 大森博司, 崔昌禹:等値線を利用した拡張ESO法による構造形態の創生, 日本建築学会構造系論文集, 第539号, pp.87-94, 2001.1
- 9) 崔昌禹, 大森博司, 佐々木睦朗:拡張ESO法による構造形態の創生—三次元構造への拡張—, 日本建築学会構造系論文集, 第576号, pp.79-86, 2004.2
- 10) 藤井大地, 真鍋匡利: CA-ESO法による構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.78, 第691号, pp.1569-1574, 2013.9
- 11) 藤井大地, 岡部 諒, 真鍋匡利, CA-ESO法とボクセル有限要素法を用いた3次元構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.79, No.703, pp.1279-1286, 2014.9
- 12) 松井和己, 寺田賢二郎:連続的材料分布の節点補間によるトポロジー最適化手法, 日本機械学会論文集 (A編), Vol.69, No.684, 2003.8
- 13) 藤井大地:パソコンで解く構造デザイン, 丸善, 2002
- 14) Hollister, S.J. and Kikuchi, N., Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, Biotechnology and Bioengineering, 43, No.7, pp.586-596, 1994
- 15) 藤井大地:建築デザインと最適構造, 丸善, 2008
- 16) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣:ボクセル有限要素法を用いた構造物の位相最適化, 日本計算工学会論文集, Vol.2, pp.87-94, 2000

# TOPOLOGY OPTIMIZATION OF 3D STRUCTURES USING IMPROVED ESO METHOD

*Yohei NIIUCHI*<sup>\*</sup>, *Shinya MATSUMOTO*<sup>\*\*</sup> and *Daiji FUJII*<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Grad. Stud., Graduate School of Systems Engineering, Kinki University

<sup>\*\*</sup> Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.

<sup>\*\*\*</sup> Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.

In this paper, an improved ESO (Evolutionary Structural Optimization) method for the topology optimization of 3D structures is proposed. In the proposed method, the idea of BESO method<sup>6,7)</sup> and the idea of extended ESO method<sup>8,9)</sup> are combined. In this method, the design domain is divided in same eight-node brick elements (voxels)<sup>14)</sup>, and in the optimization process, for solid element, it will be removed if the strain energy is less than the threshold value. This threshold value is obtained from the equation proposed in extended ESO<sup>8,9)</sup>. This equation consists of the mean value of sensitivity number and the average deviation of sensitivity number with a control parameter. In the proposed method, the evolutionary volume ratio (reduction ratio) is given as input data, and this control parameter is determined automatically in the program so as to satisfy the given reduction ratio approximately.

Three numerical examples have been shown in order to demonstrate the effectiveness of the proposed method for 3D structures. It was found from the results that the proposed method had the following advantages.

- (1) The parameters of optimization process are less than BESO, CA-ESO, and SIMP method. There are only two parameters, that is the evolutionary volume ratio (reduction ratio) and the scale parameter  $r_{\min}$  in the filter scheme. Therefore, it is not necessary to do the preliminary analysis for setting the parameters. In the three examples shown in this paper, the evolutionary volume ratio  $\lambda$  is all 0.1, and the scale parameter  $r_{\min}$  is all  $2l_x$  ( $l_x$ : element's length of X direction).
- (2) The number of steps in the optimization process is very small compared with BESO, CA-ESO and SIMP method. The number of steps is 16 in example 1 (refer to Fig.5), 22 in example 2 (refer to Fig.9), and 20 in example 3 (refer to Fig.13). Therefore, the computational efficiency is much better than the other methods.
- (3) Simple designs can be obtained by the proposed method. The topologies and compliance ratios by the proposed method are similar to ones obtained by SIMP and CA-ESO method. Please refer to Fig.4 and Fig.6 for example 1, refer to Fig.8 and Fig.10 for example 2, and refer to Fig.12 and Fig.14 for example 3.

It can be seen that though the proposed method is one directional method which does not have additional process of elements, the resultant topologies have sufficient performance to give a hint to the architectural design.

(2015年10月8日原稿受理, 2016年2月17日採用決定)

# IESO 法を用いた建築構造の形態創生

鉛直荷重と地震荷重に抵抗する建物の自然形態

## COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF BUILDING STRUCTURES USING IESO METHOD

Natural shape of buildings which resist vertical and seismic load

新内洋平\*1, 松本慎也\*2, 藤井大地\*3

Yohei NIIUCHI, Shinya MATSUMOTO and Daiji FUJII

Biomimetic technology (biomimetics) has recently attracted a great deal of attention in engineering field. Also, in architecture field, as represented by shell structure, biomimetics has been used for a long time. In recent years, the buildings which floors are supported by the structure such as trees or seaweeds have been built (Tod's Omotesando Building, Sendai Mediatheque). On the other hand, it is conceivable that the topology optimization can be used for biomimetics in architecture field, because it has been observed that the shape obtained by the topology optimization is relatively close to the natural form. Therefore, in this paper, several numerical examples of computational morphogenesis of building structures using IESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) method are shown in order to verify the application possibility of the proposed method to the biomimetics.

**Keywords :** Topology optimization, ESO method, Voxel finite element method, Computational Morphogenesis, Biomimetics

位相最適化, ESO 法, ボクセル有限要素法, 構造形態創生, パイオミメティクス

### 1. はじめに

近年, NC 加工, 折板技術, 付加製造等の製造技術の革新によりこれまでない自由な形態の部品や製品を創り出すことが可能になりつつある. このような技術革新は建築分野にも波及しており, TOD'S 表参道ビルや仙台メディアテークのように, 樹木や海藻が床を支えるような新しい形態の建築物が建造されるようになった. このような流れの中で, パイオミメティクスと呼ばれる, 生体の持つ優れた機能や形状を模倣し, 工学分野に応用する技術が注目されている. 一方, 工学分野で発展してきた位相最適化手法は, 骨や樹木などの自然形態を模倣できる技術でもあり<sup>1,2)</sup>, これを建築構造デザインに応用した例も見られる<sup>3)</sup>. したがって, 今後, このような位相最適化手法を建築分野のパイオミメティクスに応用することも考えられる.

位相最適化手法は, 数理計画法にもとづく方法と発見的的手法にもとづく方法の大きく2種に分類される<sup>3)</sup>. また, 勾配情報を利用するかしないかの観点にもとづいた本間の分類法<sup>4)</sup>によれば, 図1のように分類される. 一方, 著者藤井らは, 単純繰返し計算法として CA 法と拡張 ESO 法を組み合わせた CA-ESO 法<sup>18,19)</sup>を提案し, 2次元および3次元の剛性最大化問題において, 数理計画法にもとづく

SIMP 法と同等以上の性能を有することを示している. さらに, BESO 法<sup>10,11)</sup>, 拡張 ESO 法<sup>12,13)</sup>, CA-ESO 法<sup>18,19)</sup>の利点を組み合わせ, 初期の ESO 法<sup>9)</sup>を改良した IESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) 法<sup>3)</sup>を提案し, SIMP 法および CA-ESO 法に比較して計算効率がよく, また SIMP 法に比較してより自然に近い形態を創生できることを示している.

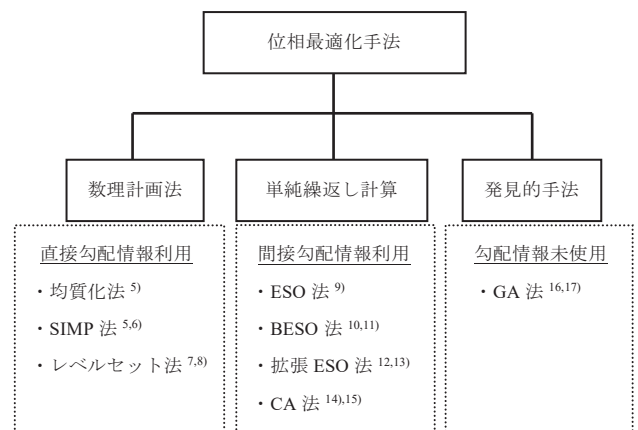


図1 位相最適化手法の分類

\*1 近畿大学大学院システム工学研究科 大学院生  
 \*2 近畿大学工学部 准教授・博士(工学)  
 \*3 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

Grad. Stud., Graduate School of Systems Engineering, Kindai University  
 Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr.Eng.  
 Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr.Eng.

一方、バイオミメティクスを建築分野に応用した最近の研究としては、葉の形態を屋根構造に応用した研究<sup>20)</sup>、樹木の形態を建築骨組柱に応用した研究<sup>21-23)</sup>、生物の繊維構造を建築デザインに応用した研究<sup>24)</sup>、植物コーンの吸湿性を建築デザインに応用した研究<sup>25)</sup>などがある。また、位相最適化手法を用いて、建築物の構造形態を創生した研究としては、2次元の拡張 ESO 法を用いてビルのファサードデザインを創生した研究<sup>26)</sup>、ソリッド要素を用いた SIMP 法で、高層ビルや超高層ビルのファサードデザインを創生した研究<sup>27)</sup>などがある。また、バイオミメティクスの形態創生として、佐々木ら<sup>21,13)</sup>は、フィレンツェ新駅コンペ案で、3次元の拡張 ESO 法を用いて松のような樹木が枝をうねらせて屋根スラブを持ち上げているような形態を創生し、建築デザインに応用している。しかしながら、このような形態創生例は未だ少なく、特に樹木がスラブを支えるような自然形態の創生例では、地震力等の水平力を考慮した解析例が示されるに至っていない。

そこで本研究では、進化的位相最適化手法である IESO 法を用いて、地震力を受ける床スラブを樹木が支えるような構造形態を創生し、IESO 法の構造形態の創生に対する有効性を検討するとともに、このような手法を用いたバイオミメティクスの建築デザインへの応用の可能性を検討する。

なお、文献 3) に示した IESO 法では、CA-ESO 法とほぼ同様の形態が求まるものの、コンプライアンス値に関してはやや劣る結果となっていた。そこで、本論文では、領域体積の 5%~10% 程度の粗い除去率で得られた IESO 法の収束解に対して、CA 法で 5% 程度要素を付加し、そこから IESO 法で 1% 程度の除去率で削るアルゴリズム付加する。本論文では、この仕上過程の追加により、コンプライアンス値が改善されることを示す。

## 2. IESO 法の概要<sup>3)</sup>

本論文に用いる位相最適化手法では、設計領域を包含する直方体領域（各辺の長さ： $L_x, L_y, L_z$ ）を考え、これを均等な直方体要素（voxel）で分割する（各辺の有限要素分割数： $n_x, n_y, n_z$ ）。そして、実際の設計領域はボクセルの材料密度の有無（1/0）によって与える。この時、直方体要素（voxel 要素）の各辺の長さ  $l_x, l_y, l_z$  は、 $l_x = L_x/n_x$ 、 $l_y = L_y/n_y$ 、 $l_z = L_z/n_z$  となる。

有限要素は 8 節点応力仮定法要素とし、全体剛性方程式の解法には前処理付き共役勾配法を用いる<sup>18)</sup>。また、反復計算においては要素剛性マトリクスと変位ベクトルのかけ算を要素ごとに行い、これをベクトルとして保存していくことで、全体剛性マトリクスのメモリを節約し、大規模計算を可能にする<sup>28)</sup>。また、IESO 法による位相最適化では、ボクセル解析のメリットを生かすため、最適化の過程でリメッシュは行わず、存在要素の密度を 1、除去要素の密度を 0 とすることで各ステップの設計領域を定義する。

IESO 法では、要素除去に関しては、拡張 ESO 法<sup>12,13)</sup>のルールを用いる。ただし、本手法では、要素除去の指標として、前論文<sup>3)</sup>に示す BESO 法<sup>10,11)</sup>で用いられているひずみエネルギー感度を用いる。したがって、要素除去のルールは次式となる。

$$\rho_i = 0 \quad \text{if} \quad \alpha_i < X_{cr} \quad ; i = 1, \dots, N_L \quad (1)$$

ここに、 $\rho_i$ 、 $\alpha_i$  は  $i$  番目要素の密度（0 or 1）とひずみエネルギー感度<sup>14)</sup>、 $N_L$  は残存要素数、 $X_{cr}$  は閾値で、次式で定義される。

$$X_{cr} = \alpha_{av} - \eta \cdot \phi \quad (2)$$

ただし、 $\alpha_{av}$  と  $\phi$  は残存要素のひずみエネルギー感度の平均値と偏差平均であり、次式から計算される。

$$\alpha_{av} = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} \alpha_i \quad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_L} (\alpha_i - \alpha_{av})^2}{N_L}} \quad (3)$$

ここに、 $\eta$  は要素の除去量を制御する制御変数であり、 $\eta$  が大きいと要素が除去されにくく、 $\eta$  が小さいと除去されやすくなる。ただし、IESO 法では、BESO 法と同様に各ステップの要素除去率を与え、この除去率を近似的に満たす  $\eta$  をプログラム内で自動計算する。

まず入力データとして与える除去率を  $\lambda$  とすると、第  $k$  ステップの除去要素数  $N_R^{(k)}$  は、次式で計算される。

$$N_R^{(k)} = \begin{cases} \lambda N_L^{(k-1)} & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} \geq \bar{N}_L \\ N_L^{(k-1)} - \bar{N}_L & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} < \bar{N}_L \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 $N_L^{(k-1)}$  は  $(k-1)$  ステップの残存要素数、 $\bar{N}_L$  は残存要素数の制約値（下限値）である。次に、(1)式で除去される要素数が、(4)式の  $N_R^{(k)}$  に近くなる  $\eta^{(k)}$  を以下の計算フローで求める。

- ①  $\eta^{(k)}$  の初期値を 1.5、③で用いるべき乗数  $p$  の初期値を 1 に設定する。
- ② (2)式の  $\eta$  を  $\eta^{(k)}$  とし、残存要素を対象として(1)式により  $\rho_i = 0$  となる除去要素数  $\tilde{N}_R$  を求める。
- ③  $\tilde{N}_R < N_R^{(k)}$  なら、 $\eta^{(k)} = \eta^{(k)} - (0.1)^p$  とし②に戻る。  
 $\tilde{N}_R \geq N_R^{(k)}$  なら、 $\eta^{(k)} = \eta^{(k)} + (0.1)^p$ 、 $p = p + 1$  とし②に戻る。  
 ただし、 $p \geq 4$  かつ  $\tilde{N}_R < 3N_R^{(k)}$  ならば④に進む。
- ④  $\tilde{N}_R$  を確定し、要素除去を行う。

以上をプログラムにすると図 2 のようになる。ただし、本プログラムは、Fortran77 で記述している。

```

C --- ①
   etk = 1.5
   p = 1
   ! etk : η(k)
   ! p : p (integer)
C --- ②
100 Xcr = alphav - etk*phi
   NRT = 0
   ! Xcr = αav - η · φ
   ! NRT : NR(k)
   do i = 1, nel
   ! nel : nx × ny × nz
   if( ro(i).lt.0.1 ) go to 200
   ! ro : ρi (except ρi = 0)
   if( alph(i).lt.Xcr ) then
   ! alph(i) : αi Eq.(1)
     NRT = NRT + 1
   ! NRT : NR(k)
   end if
200 end do
C --- ③
   if( NRT.le.NRk ) then
   ! NRk : NR(k)
     etk = etk - (0.1)**p
     ! η(k)} = η(k)} - (0.1)p
   else
     etk = etk + (0.1)**p
     ! η(k)} = η(k)} + (0.1)p
     p = p + 1
     if( p.ge.4.and.NRT.le.NRk*3 ) go to 1000
   end if
   go to 100
C --- ④
1000 continue
    
```

図 2  $\eta^{(k)}$  の計算プログラム例

本解析に必要な入力データとしては、有限要素解析に必要なデータとして、設計領域の大きさ ( $L_x, L_y, L_z$ )、分割数 ( $n_x, n_y, n_z$ )、ヤング係数、ポアソン比、境界条件、荷重条件がある。また、最適化計算に必要なデータ<sup>3)</sup>として、感度計算における影響半径  $r_{min}$ （実際に

は、 $r_{\min} = b_r \cdot l_x$  として  $l_x$  の倍数  $b_r$  (影響半径倍率) で与える、残存要素数の下限値  $\bar{N}_L$  (実際には、目標体積比  $\bar{V}_r = \bar{N}_L / (n_x \cdot n_y \cdot n_z)$  で与える)、除去率  $\lambda$  (全要素数に対する 1 ステップの除去要素数の比) がある。また、設計領域内に空間や固定スラブ等を設定する場合は、設計対象から除外する要素の番号・密度情報 (0/1) を入力する必要がある。

### 3. 仕上アルゴリズムの追加とその有効性

文献3)では、除去率  $\lambda$  を 0.1、影響半径倍率  $b_r$  を 3 にすることで、IESO 法の解は、ほぼ SIMP 法、CA-ESO 法と同等の解が求まることが示されている。しかしながら、IESO 法の解は、コンプライアンス値に関しては CA-ESO 法に比較してやや劣る結果となっていた。そこでここでは、除去率  $\lambda$  が 0.05~0.1 程度で得られた解のコンプライアンス値を改善するアルゴリズムを付加する。ただし、この追加アルゴリズム (以下、仕上アルゴリズムと呼ぶ) は、IESO 法で得られた解の仕上を行うもので、IESO 法の計算効率の良さを阻害するものではない。

この追加アルゴリズムは、まず、IESO 法の収束解を読み込み、この解から CA 法のルールにもとづいて全要素の 5%程度の要素を付加する。具体的には、影響半径倍率  $b_r$  を 1 として各要素のひずみエネルギー感度を計算し、その感度が大きいものから順に、その要素の Neumann 近傍要素 (面を共有する要素) を復活させる。そして、付加要素数が与えた上限値 (5%程度) を超えた時点で付加を終了する。次に、以上の要素が付加された解に対して、再び IESO 法で目的の要素数まで要素を除去する。ただし、今度は、除去率を 0.01 程度度として、少しずつ要素を除去していく。

以上の追加アルゴリズムの有効性を検討するため、前論文<sup>3)</sup>にも掲載しているイタリアフィレンツェ新駅コンペ案の構造形状決定に用いられた解析例<sup>13)</sup>を取り上げる。図3は、文献13)に示されている条件をもとに作成した設計領域を示す。解析は対称性を利用して1/4領域で行い、要素分割数は150×42×30としている。また、支持点の拘束は9節点の正方形領域で与えている。

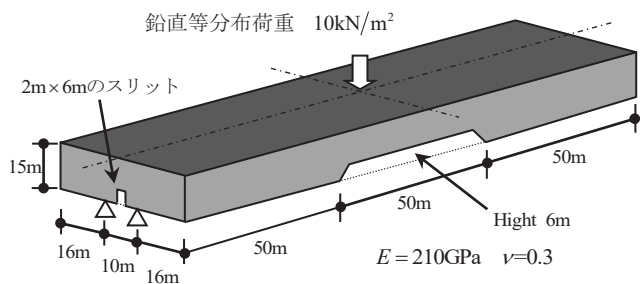
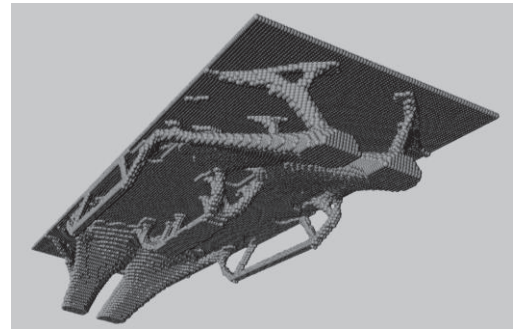


図3 解析モデル1

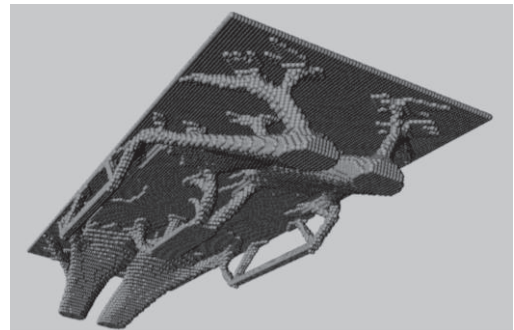
図4は、目標体積比  $\bar{V}_r = 0.116$  とした場合の IESO 法の収束解<sup>3)</sup>を示す。図中には、収束ステップ数、目標体積比  $\bar{V}_r$ 、除去率  $\lambda$ 、影響半径倍率  $b_r$ 、収束解のコンプライアンス比  $C/C^0$  ( $C^0$  は初期のコンプライアンス) を示している。図5は、図4の解に対して CA 法で 5%要素を付加し、再び IESO 法で除去率  $\lambda = 0.01$  として、収束解を求めたものである。ただし、影響半径倍率は  $b_r = 1$  としている。また、図6は、CA-ESO 法の解<sup>18)</sup>を示す (ちなみに、SIMP 法の  $C/C^0$

は 2.67 となる<sup>19)</sup>。さらに、図7、8は、初期解析と仕上アルゴリズム解析の各ステップの体積比  $V_r (= N_L / (n_x \cdot n_y \cdot n_z))$  とコンプライアンス比の推移を示す。



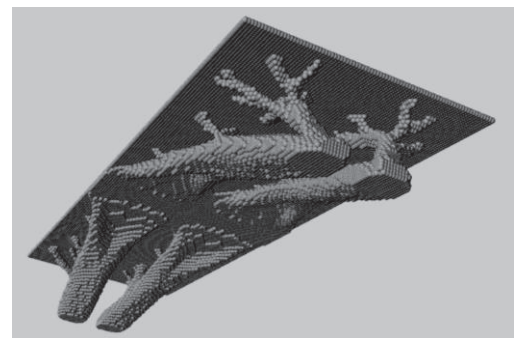
20step,  $\bar{V}_r = 0.116$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $b_r = 3$ ,  $C/C^0 = 2.82$

図4 IESO 法による解析例1の解<sup>3)</sup>



41step,  $\bar{V}_r = 0.116$ ,  $\lambda = 0.01$ ,  $b_r = 1$ ,  $C/C^0 = 2.46$

図5 解析例1の仕上アルゴリズム適用後の解



CA-ESO  $V_r = 0.122$   $C/C^0 = 2.55$

図6 CA-ESO 法の解<sup>18)</sup>

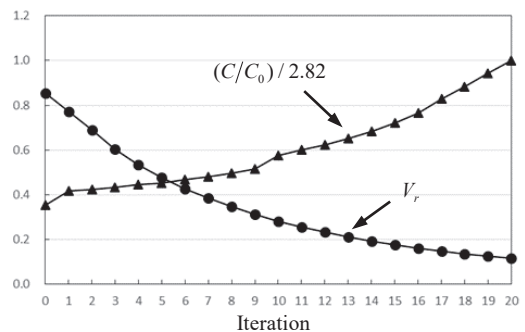


図7 体積比とコンプライアンス比の推移 (初期解析)

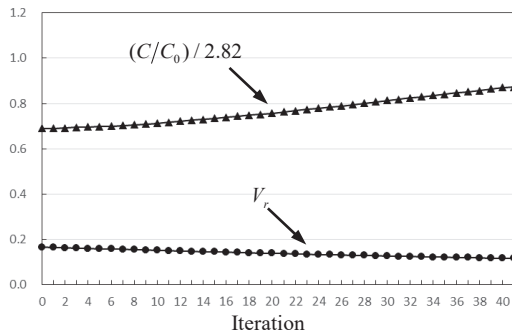


図8 体積比とコンプライアンス比の推移（仕上解析）

図4と図5を比較すると、形態（位相）に大きな変化はないが、コンプライアンス比が大きく改善され、図6に示すCA-ESO法の解よりも良くなっていることがわかる。また、図8より、仕上過程では、図7に比較してコンプライアンス比の上昇勾配が小さく、これによりコンプライアンス比が改善されていることがわかる。

#### 4. 建築構造の形態創生例

次に、建築構造の形態創生例として、様々な柱脚の支持点から地震力を受ける上面スラブを支える構造形態の創生を試みる。

図9は、解析モデルの設計領域を示す。領域のボクセル要素分割数は $77 \times 125 \times 25$ である。上面スラブ（Z方向1要素分）は非設計対象とし、最上面の全節点に鉛直等分布荷重とその0.2倍のX,Y2方向（正負双方向）の水平荷重（地震力）を加える。

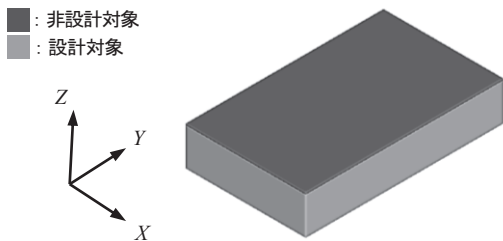
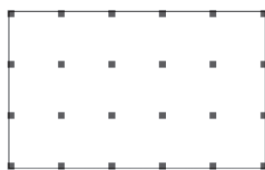


図9 解析モデル2



柱脚の支持点配置(Case1)

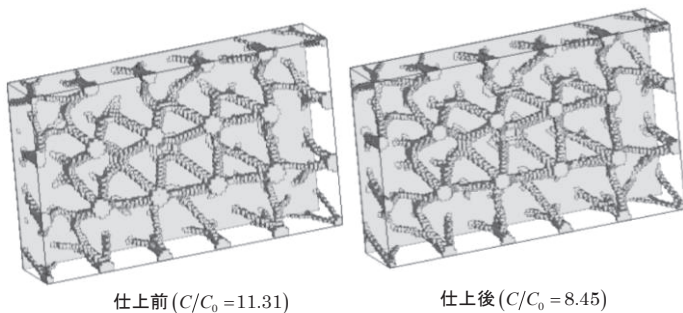
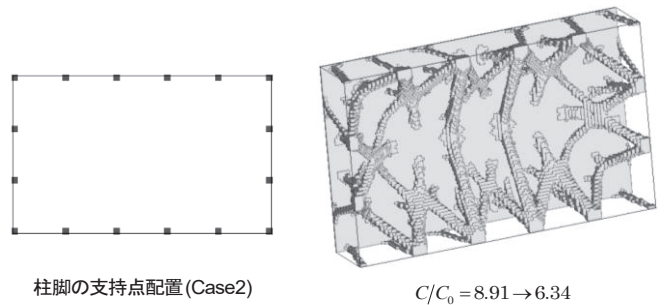
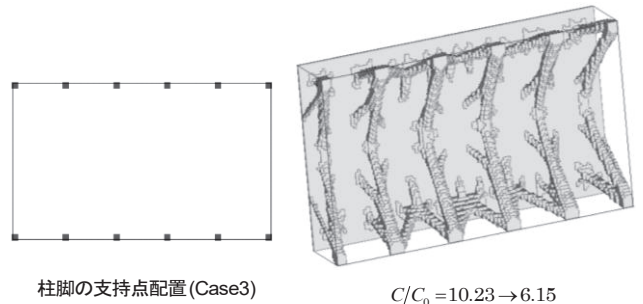


図10 支持点配置（Case1）に対する形態創生結果



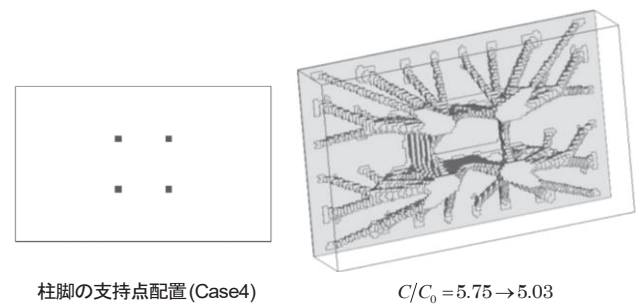
柱脚の支持点配置(Case2)

図11 支持点配置（Case2）に対する形態創生結果



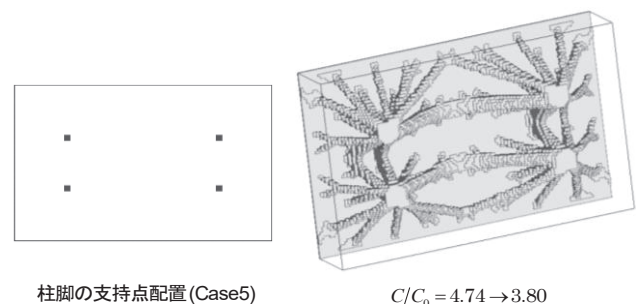
柱脚の支持点配置(Case3)

図12 支持点配置（Case3）に対する形態創生結果



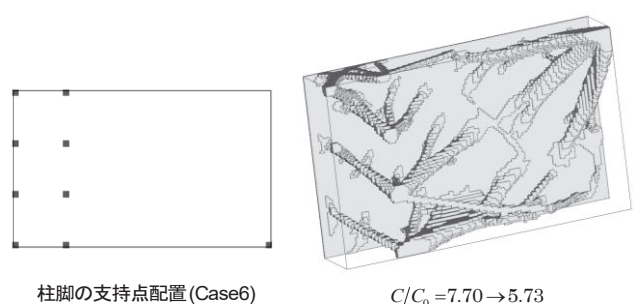
柱脚の支持点配置(Case4)

図13 支持点配置（Case4）に対する形態創生結果



柱脚の支持点配置(Case5)

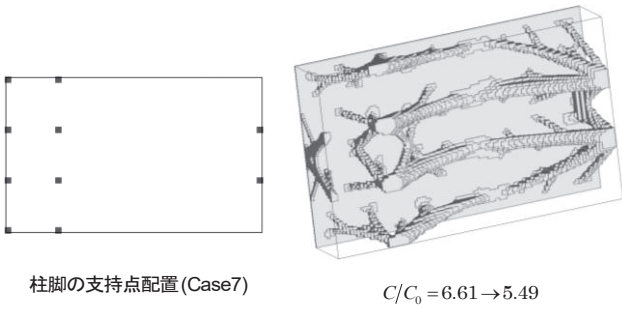
図14 支持点配置（Case5）に対する形態創生結果



柱脚の支持点配置(Case6)

図15 支持点配置（Case6）に対する形態創生結果





柱脚の支持点配置(Case7)

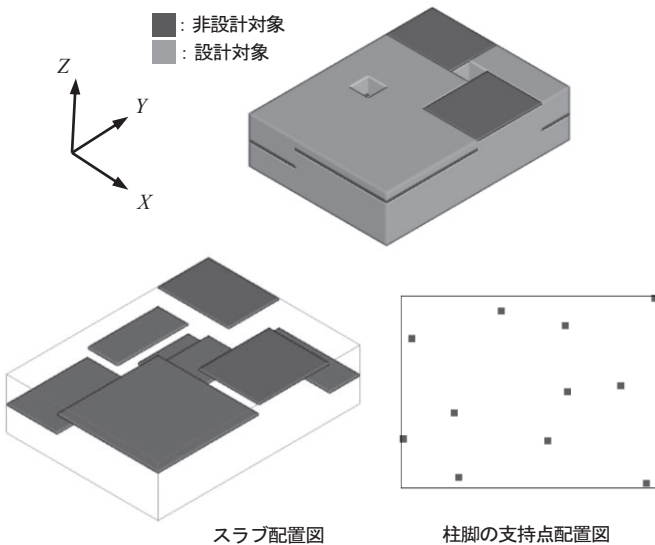
$C/C_0 = 6.61 \rightarrow 5.49$

図 16 支持点配置 (Case7) に対する形態創生結果

図 10～図 16 は、図中に示す柱脚の支持点配置に対する IESO 法による形態創生結果を示している。なお、各支持点は、応力集中を避けるため 4 節点の拘束としている。図 10 には、 $\bar{\nu}_r = 0.1$ 、 $\lambda = 0.05$ 、 $b_r = 3$  として解析を行った結果と、その結果に仕上アルゴリズムを適用した結果を示している。ただし、仕上アルゴリズムでは、CA 法による要素付加 5%、IESO 法の  $\lambda = 0.01$ 、 $b_r = 1$  として解析を行っている。図に示すように、仕上アルゴリズムを適用することにより、コンプライアンスの改善は見られるが、見た目の形態にはほとんど変化はない。したがって、図 11～図 16 では、仕上前後のコンプライアンス比 (仕上前→仕上後) と仕上後の形態のみを示している。ただし、解析条件は、支持点配置以外は図 10 の解析と同一である。

図 10～図 16 に示されるように、IESO 法で得られた形態は、いずれも滑らかで有機的な形態であり、また、樹木の枝分かれを想起させる形態となっている。また、仕上アルゴリズムの適用により、コンプライアンス比が大きく改善されていることがわかる。

次に、図 17 は、複数の高さの異なるスラブを、平面計画を考慮した柱脚支持点から支える構造を創生する例題を示す。図には、解析モデルの設計領域、スラブ配置、柱脚の支持点配置を示す。ただし、設計領域のボクセル要素分割数は  $90 \times 120 \times 30$  とし、スラブ (Z 方向 1 要素分) 部分は非設計対象とし、スラブ上面の全節点に鉛直等分布荷重とその 0.2 倍の X, Y 2 方向 (正負双方向) の水平荷重 (地震力) を加える。



スラブ配置図

柱脚の支持点配置図

図 17 解析モデル 3

図 18 は、 $\bar{\nu}_r = 0.1$ 、 $\lambda = 0.05$ 、 $b_r = 3$  として解析を行い、その結果に仕上アルゴリズムを適用した結果を示している。ただし、仕上アルゴリズムでは、CA 法による要素付加 5%、IESO 法の  $\lambda = 0.01$ 、 $b_r = 1$  として解析を行っている。また、本解析例のコンプライアンス比  $C/C_0$  は、仕上前が 4.15、仕上後が 3.40 となったが、見た目の形態にはほとんど変化がなかったため、仕上後の形態のみを示している。図 18 に示されるように、このような複雑な例題に対しても、複数のスラブを合理的にリンクする構造形態が創生され、やはり樹木の分枝を想起させる有機的な構造形態となる。

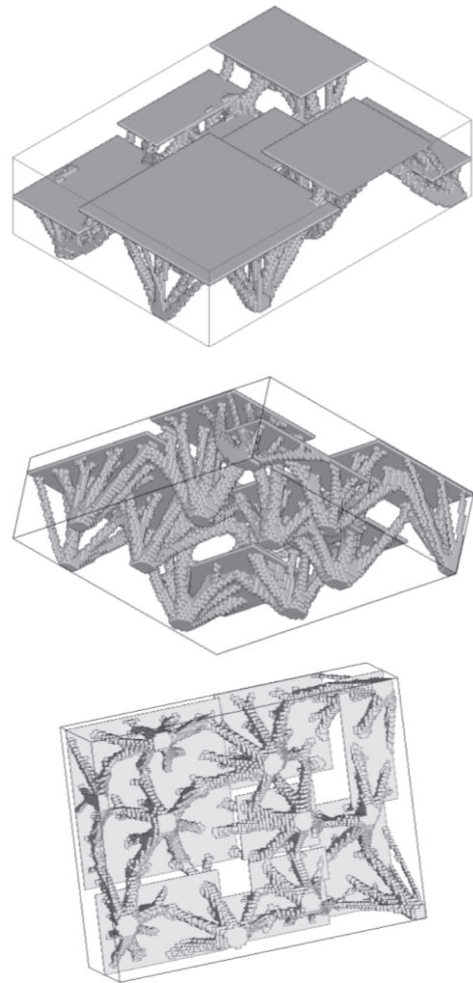


図 18 形態創生結果 (仕上アルゴリズム適用後)

### 5. まとめ

本研究では、進化的位相最適化手法である IESO 法を用いて、地震力を受けるスラブを樹木が支えるような構造形態を創生し、IESO 法の建築構造形態の創生に対する有効性を検討するとともに、このような手法を用いたバイオミメティクスの建築デザインへの応用の可能性を検討した。その結果、以下のことが明らかになった。

- (1) IESO 法の解に仕上アルゴリズムを適用することで、形態をほとんど変化させずにコンプライアンス値 (剛性) を大幅に改善できることがわかった。これにより、IESO 法の収束解は、SIMP 法や CA-ESO 法の解に劣らないことが確認できた。

(2) 地震力を受ける単一スラブを支える構造形態の創生例により、柱脚の支持点の位置や数の変化に適応して、樹木が枝を張るような有機的な構造形態が創生されることがわかった。

(3) 地震力を受ける複数スラブを支える構造形態の創生例により、スラブ配置と1階柱脚の支持点を定めることにより、樹木が枝を張ってそれぞれの床を合理的に支えるような有機的な構造形態が創生されることがわかった。

以上より、IESO法は、地震力を受けるスラブ構造を支える自然に近い形態を容易に創生することができ、建築分野のバイオミメティクスツールの一つとして応用できるのではないかと考えられる。

## 謝辞

本論文を作成するにあたり、近畿大学工学部建築学科卒業生の安楽優希さん（現（株）オムニ設計）に協力を得た。また、4章の解析例のモデル作成および結果の表示には、（株）くいんと VOXELCON を利用している。その際、（株）くいんと石井恵三氏、月野誠氏、英山寛之氏に、研究室で開発したソフトとのデータリンクについて技術協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

## 参考文献

- 有尾一郎，中沢正利：竹節の形態組織構造から学ぶ軽量最適化構造の創造設計，第22回バイオエンジニアリング講演会講演論文集，p.396, 2010.1
- 佐々木睦朗：FLUX STRUCTURE，TOTO 出版，2005
- 新内洋平，松本慎也，藤井大地：改良型 ESO 法を用いた 3 次元構造物の位相最適化，日本建築学会構造系論文集，Vol. 81，No.723，pp.851-858，2016.5
- 本間俊雄：構造形態の創生と最適化技術，「最適設計」の過去・現在・未来，2015 年度日本建築学会大会（関東）構造部門（応用力学）パネルディスカッション資料，pp.25-34，2015.9
- Bendsoe, M. P. : Optimization of Structural Topology, Shape, and Material, Springer, 1995
- Zhou, M. and Rozvany, G.I.N. : The COC algorithm, Part II, Topological, geometrical and generalized shape optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, pp.309-336, 1991
- Sethian, J. A. and Wiegmann, A. : Structural boundary design via level-set and immersed interface methods, Journal of Computational Physics, Vol.163, No.2, pp.489-528, 2000
- Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D. : A level Set Method for Structural Topology Optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192, No.1-2, pp.227-246, 2003
- Xie, Y.M., Steven, G.P. : Evolutionary Structural Optimization, Springer, 1997
- Huang, X., Xie, Y.M. : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.43, pp.1039-1049, 2007
- Huang, X., Xie, Y.M. : Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications, Wiley, 2010
- 大森博司，崔昌禹：等値線を利用した拡張 ESO 法による構造形態の創生，日本建築学会構造系論文集，第 539 号，pp.87-94，2001.1
- 崔昌禹，大森博司，佐々木睦朗：拡張 ESO 法による構造形態の創生—三次元構造への拡張—，日本建築学会構造系論文集，第 576 号，pp.79-86，2004.2
- 伊能教夫，下平真子，小林弘樹：力学構造物を自己組織化するセル・オートマトン，日本機械学会論文集（A 編），61 巻，586 号，pp.272-278，1995.6
- 三井和夫：セルオートマトンによる構造システムの自律生成と最適化，日本建築学会構造系論文集，第 555 号，pp.101-105，2002.5
- 長谷川浩史，川面恵司：GA 利用による機械構造物の位相最適化の一方法（有限要素の除去および付加パラメータを染色体とする位相最適化法），日本機械学会論文集，第 581 号，pp.183-190，1995.1
- Wang, S.Y. and Tai K. : Structural topology design optimization using Genetic Algorithms with a bit-array representation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 194, pp.3749-3770, 2005
- 藤井大地，真鍋匡利：CA-ESO 法による構造物の位相最適化，日本建築学会構造系論文集，Vol.78，第 691 号，pp.1569-1574，2013.9
- 藤井大地，岡部諒，真鍋匡利：CA-ESO 法とボクセル有限要素法を用いた 3 次元構造物の位相最適化，日本建築学会構造系論文集，Vol.79，No.703，pp.1279-1286，2014.9
- 平野 薫，アラン・バーデン：葉の形態と脈系パターンを利用した屋根構造物への応用に関する基礎的研究，日本建築学会関東支部研究報告集，pp.169-172，2006
- 染谷早紀，高島英幸：樹木状骨組柱の形態創生手法に関する提案，日本建築学会大会学術講演梗概集，構造I，pp.817-818，2012.9
- 染谷早紀，高島英幸：樹木状骨組柱の形態創生手法に関する提案（その 2:モデルの構造挙動の分析），日本建築学会大会学術講演梗概集，構造I，pp.939-940，2013.8
- 今澤和貴，佐々木睦朗：L-System による形状表現に関する研究—樹木ラーメン構造の構造形態創生—，日本建築学会大会学術講演梗概集，構造I，pp.941-942，2013.8
- Reichert, S., Schwinna, T., Magnab, R, Waimerb, F., Knippers, J., Menges, A. : Fibrous structures: An integrative approach to design computation, simulation and fabrication for lightweight, glass and carbon fibre composite structures in architecture based on biomimetic design principles, Computer-Aided Design, Vol.52, pp.27-39, 2014
- Reichert, S., Menges, A., Correa, D. : Meteorosensitive architecture: Biomimetic building skins based on materially embedded and hygroscopically enabled responsiveness, Computer-Aided Design, Vol.60, pp.50-69, 2015
- 大森博司，風袋宏幸，飯嶋俊比古，武藤 厚，長谷川泰稔：構造形態創生法によるオフィスビルの設計，日本建築学会技術報告集，第 20 号，pp.72-82，2004.12
- Beghini, L. L., Beghini, A., Katz, N., Baker, W. F., Paulino, G. H. : Connecting architecture and engineering through structural topology optimization, Engineering Structures, Vol.59, pp.716-726, 2014
- 藤井大地：パソコンで解く構造デザイン，丸善，2002

# COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF BUILDING STRUCTURES USING IESO METHOD

Natural shape of buildings which resist vertical and seismic load

*Yohei NIIUCHI*<sup>\*1</sup>, *Shinya MATSUMOTO*<sup>\*2</sup> and *Daiji FUJII*<sup>\*3</sup>

<sup>\*1</sup> Grad. Stud., Graduate School of Systems Engineering, Kindai University

<sup>\*2</sup> Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr.Eng.

<sup>\*3</sup> Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr.Eng.

Biomimetic technology (biomimetics) has recently attracted a great deal of attention in engineering field. Also, in architecture field, as represented by shell structure, biomimetics has been used for a long time. In recent years, the buildings which floors are supported by the structure such as trees or seaweeds have been built (Tod's Omotesando Building, Sendai Mediatheque). On the other hand, it is conceivable that the topology optimization can be used for biomimetics in architecture field, because it has been observed that the shape obtained by the topology optimization is relatively close to the natural form. Therefore, in this paper, several numerical examples of computational morphogenesis of building structures using IESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) method<sup>9</sup> are shown in order to verify the application possibility of the proposed method to the biomimetics.

In IESO method, the design domain is divided in same eight-node brick elements (voxels), and in the optimization process, for solid element, it will be removed if the sensitivity number<sup>10</sup> is less than the threshold value. This threshold value is obtained from the equation proposed in extended ESO<sup>12,13</sup>. This equation consists of the mean value of sensitivity number and the average deviation of sensitivity number with a control parameter. In the proposed method, the evolutionary volume ratio (reduction ratio) is given as an input data, and this control parameter is determined automatically in the program so as to satisfy the given reduction ratio approximately. Furthermore, in this paper, finishing algorithm is added to IESO. In this algorithm, first, the converged solution obtained by IESO is input, and then, the elements about 5% of the total elements of design domain are added according to the rule of CA method. Specifically, in order from the element which the sensitivity number is the greatest, the elements of the von Neumann neighborhood are added, and if the number of additional elements is greater than 5% of the total elements of design domain, this program is ended. Finally, the calculation of IESO is executed again with the smaller reduction ratio than the initial analysis (about 1/5~1/10).

Several numerical examples have been shown in order to demonstrate the effectiveness of the proposed method, and the effectiveness for the application to the biomimetics. By the numerical example which is used for design competition for a new train station for Florence (Fig.3), it is shown that natural and simple topology can be obtained by IESO (Fig.4), and it is also shown that if the finishing algorithm is added to IESO, the compliance of the solution obtained by IESO is less than CA-ESO (Fig.5~8). (It was shown in the previous paper<sup>9</sup> that the compliance of the solution obtained by SIMP is greater than CA-ESO.) In the next numerical examples, the structural morphologies which support the single or multi flat slab from various base support points is generated using IESO (Fig.9~18). From these examples, it is shown that the structural morphologies like natural trees can be generated by IESO.

It is concluded from these examples that IESO is one method which can be used for applying biomimetics to the building design.

(2016年6月8日原稿受理, 2016年10月17日採用決定)

## IESO 法を用いた建築構造の形態創生

ファサードデザインへの応用

COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF BUILDING STRUCTURES  
USING IESO METHOD

Application to façade design

丸山瑞樹\*<sup>1</sup>, 松本慎也\*<sup>2</sup>, 藤井大地\*<sup>3</sup>

Mizuki MARUYAMA, Shinya MATSUMOTO and Daiji FUJII

In this paper, we focus on façade design of buildings used prefabricated walls, and we propose a method to design the prefabricated wall using topology optimization method. In this method, artificial design elements are added to the topology optimization method. In this paper, 2-axis symmetry and continuous pattern are adopted as the artificial design elements. Improved ESO (IESO) method is used for the topology optimization method. IESO method is improvement of initial ESO method, and in this method, benefits of BESO, Extended ESO, and CA-ESO methods are combined. In this paper, several numerical examples of computational morphogenesis of prefabricated walls are shown in order to verify the application possibility of the proposed method to the façade design of buildings used prefabricated walls.

**Keywords :** Topology optimization, ESO method, Computational Morphogenesis, Prefabrication, Façade design

位相最適化, ESO 法, 構造形態創生, プレファブリケーション, ファサードデザイン

## 1. はじめに

近年、製造技術の革新により、建築分野においても、大型の3Dプリンタを用いて建築物や建築物の構成部材を製造する試みが始まっている<sup>1)</sup>。今後、このような技術が発展すれば、様々な形態の建築物が建設される可能性がある。一方、力学的に合理性のある構造形態を創生する方法として、位相(トポロジー)最適化手法(ソフトウェア)が普及しつつある。位相最適化手法はデジタルファブリケーション技術との親和性が高く、新しい形態の建築物や建築物の構成部材を開発するのに適している。

本研究<sup>2,3)</sup>では、位相最適化手法の一つであるIESO法<sup>2,3)</sup>を用いて建築構造形態の創生を試みているが、本手法で得られた建築物の構造形態をそのまま3Dプリンタで製造するにはもう少し技術発展が必要である。しかし、建築物の構成部材であれば、位相最適化手法を用いて創生した形態を3DプリンタやNC加工等で製造することは技術的に可能になってきている。そこで、本論文では、プレファブ工法による建築物のファサードデザインに着目し、位相最適化手法を用いて、力学的合理性と美しさを兼ね備えたプレファブ壁式構造建築物のユニット壁のデザインを創生することを試みる。

既往の研究で位相最適化手法を用いて建築物のファサード形態を

創生したものとして、大森、風袋ら<sup>4)</sup>の研究が挙げられる。大森、風袋らは、拡張ESO法を用いて建築物のファサードの構造形態を創生し、これを元に実際に建築物を設計し建築している。また、Beghiniら<sup>5)</sup>は、位相最適化手法を建築物の構造デザインに適用することにより構造的合理性とデザインを両立できることを示している。しかし、実際の建築物のファサードデザインに位相最適化手法が適用された例は未だ少ないのが現状である<sup>6)</sup>。

一般に、建築構造の位相最適化では、樹木が枝を張るような自然な形態が創生されるが<sup>3)</sup>、これが「美」という観点からどのように評価されるかが問題である。また、建築物のファサードデザインでは、周囲の建築物のファサードとのマッチングも重要な要素となる。四角い箱に四角い窓といった人工的なビル群の中では、自然の樹木のような形態はむしろ違和感を生じさせる場合もある。したがって、位相最適化手法で得られた形態を実際の建築物に適用するには、何らかの意匠設計者の意図を反映させる必要がある。そこで、本論文では、位相最適化手法で得られる形態にあえて人工的なデザイン要素を付与する方法を提案する。本論文では、この人工的なデザイン要素の例として2軸対称と連続パターンを取り上げる。

本論文で用いる位相最適化手法は、BESO法<sup>7)</sup>、拡張ESO法<sup>8)</sup>、

\*<sup>1</sup> 近畿大学大学院システム工学研究科 大学院生

\*<sup>2</sup> 近畿大学工学部 准教授・博士(工学)

\*<sup>3</sup> 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

Grad. Student, Graduate School of Systems Engineering, Kindai University  
Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr. Eng.  
Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr. Eng.

CA-ESO 法<sup>9)</sup>の利点を組み合わせ、初期の ESO 法<sup>10)</sup>を改良した IESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) 法<sup>2,3)</sup>である。本論文では、本手法に 2 軸対称条件と連続パターン条件を付与する方法を提案し、プレファブ壁式構造建築物のユニット壁の形態創生により、その有効性を検討する。

2. IESO 法の概要

本論文に用いる位相最適化手法では、設計領域を包含する直方体領域 (各辺の長さ:  $L_x, L_y, L_z$ ) を考え、これを均等な直方体要素 (voxel) で分割する (各辺の有限要素分割数:  $n_x, n_y, n_z$ )。そして、実際の設計領域はボクセルの材料密度の有無 (1/0) によって与える。この時、直方体要素 (voxel 要素) の各辺の長さ  $l_x, l_y, l_z$  は、 $l_x = L_x/n_x, l_y = L_y/n_y, l_z = L_z/n_z$  となる。

ボクセルを用いた応力解析の方法 (voxel 有限要素法) は、文献 9) に示すものにしたがうものとする。また、IESO 法による位相最適化では、ボクセル解析のメリットを生かすため、最適化の過程でリメッシュは行わず、存在要素の密度を 1、除去要素の密度を 0 とすることで各ステップの設計領域を定義する。

IESO 法では、要素除去に関しては、拡張 ESO 法<sup>8)</sup>のルールを用いる。ただし、要素除去の指標として BESO 法<sup>7)</sup>で用いられているひずみエネルギー感度を用いる。したがって、要素除去のルールは次式となる。

$$\rho_i = 0 \quad \text{if } \alpha_i < X_{cr} \quad ; i=1, \dots, N_L \quad (1)$$

ここに、 $\rho_i$ 、 $\alpha_i$  は要素  $i$  の密度 (0 or 1) とひずみエネルギー感度、 $N_L$  は残存要素数、 $X_{cr}$  は閾値で、次式で定義される。

$$X_{cr} = \alpha_{av} - \eta \cdot \phi \quad (2)$$

ただし、 $\alpha_{av}$  と  $\phi$  は残存要素のひずみエネルギー感度の平均値と偏差平均であり、次式から計算される。

$$\alpha_{av} = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} \alpha_i \quad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_L} (\alpha_i - \alpha_{av})^2}{N_L}} \quad (3)$$

ここに、 $\eta$  は要素の除去量を制御する制御変数であり、 $\eta$  が大きいと要素が除去されにくく、 $\eta$  が小さいと除去されやすくなる。

IESO 法では、BESO 法と同様に各ステップの要素除去率を与える。この除去率を  $\lambda$  とすると、第  $k$  ステップの除去要素数  $N_R^{(k)}$  は、次式で計算される。

$$N_R^{(k)} = \begin{cases} \lambda N_L^{(k-1)} & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} \geq \bar{N}_L \\ N_L^{(k-1)} - \bar{N}_L & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} < \bar{N}_L \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 $N_L^{(k-1)}$  は  $(k-1)$  ステップの残存要素数、 $\bar{N}_L$  は残存要素数の制約値 (下限値) である。そして、(1)式で除去される要素数が、(4)式の  $N_R^{(k)}$  に近くなる  $\eta^{(k)}$  (第  $k$  ステップ(2)式の  $\eta$ ) をプログラム内で自動計算する<sup>3)</sup>。

一方、(1)式の  $\alpha_i$  は、次のように求められる<sup>2,7)</sup>。まず、次式により要素のひずみエネルギー感度  $\alpha_i^e$  が計算される。

$$\alpha_i^e = (1/2) \mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \quad (5)$$

ただし、 $\mathbf{K}_i, \mathbf{d}_i$  は要素  $i$  の剛性マトリクスと節点変位ベクトルを表す。次に次式により節点  $j$  の感度が計算される。

$$\alpha_j^n = \left( \sum_{i=1}^{M^n} \alpha_i^e \right) / M^e \quad (6)$$

ここに、 $\alpha_j^n$  は節点  $j$  のひずみエネルギー感度、 $M^e$  は節点  $j$  に繋がる要素数を表す。そして、(1)式の  $\alpha_i$  は次式から計算される。

$$\alpha_i = \left( \sum_{j=1}^{M^n} w(r_{ij}) \alpha_j^n \right) / \sum_{i=1}^{M^n} w(r_{ij}) \quad (7)$$

ただし、 $M^n$  は要素  $i$  の要素中心から影響半径  $r_{min}$  の球体内に含まれる節点数、 $r_{ij}$  は要素  $i$  の中心から節点  $j$  までの距離、 $w(r_{ij})$  は要素中心からの距離に比例する重みで、次式で定義される。

$$w(r_{ij}) = r_{min} - r_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, M^n) \quad (8)$$

以上の解析では、有限要素解析に必要なデータとして、設計領域の大きさ ( $L_x, L_y, L_z$ )、分割数 ( $n_x, n_y, n_z$ )、ヤング係数、ポアソン比、境界条件、荷重条件がある。また、最適化計算に必要なデータとして、(8)式の影響半径  $r_{min}$  (実際には、 $r_{min} = b_r \cdot l_x$  として  $l_x$  の倍数  $b_r$  (影響半径倍率) で与える)、(4)式の残存要素数の下限値  $\bar{N}_L$  (実際には、目標体積比  $\bar{V}_r = \bar{N}_L / (n_x \cdot n_y \cdot n_z)$  で与える)、除去率  $\lambda$  (全要素数に対する 1 ステップの除去要素数の比) がある。また、設計領域内に空間や固定領域を設定する場合は、設計対象から除外する要素の番号・密度情報 (0/1) を入力する必要がある。

3. 人工的デザイン要素の付与方法と計算アルゴリズムの改良

3.1 人工的デザイン要素の付与方法

次に、ボクセル有限要素法を用いた IESO 法に 2 軸対称条件と連続パターン条件を付与する方法を示す。

Fig.1 は、例として、64 個のボクセルに対して、2 軸対称条件と連続パターン条件を付与する場合の要素番号と特性番号 (丸数字) を示す。また、Fig.2 はこれに対応した設計変数番号を示す。なお、要素番号と特性番号は入力データとして与えられ、設計変数番号はプログラムで自動的に割り当てられる。

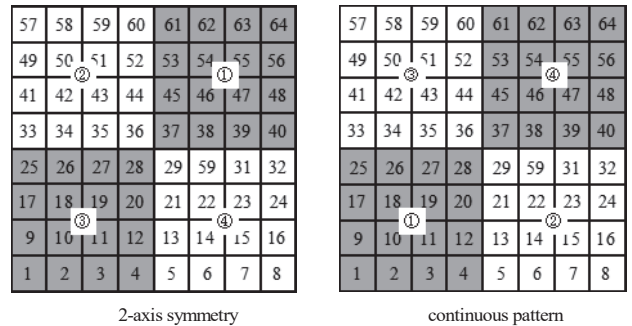


Fig. 1 Number of element and number of property

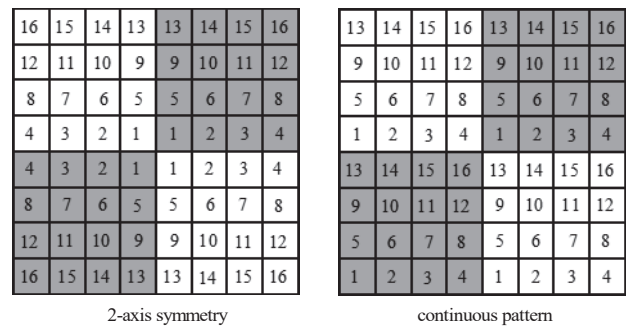


Fig. 2 Number of design variable

この場合、(1)式の  $\alpha_i$  はすべての要素 ( $i=1\sim 64$ ) について計算され、次に各設計変数に対するひずみエネルギー感度を次式から計算する。

$$e_q = \sum_{k=1}^{n_p} \alpha_{f(q,k)} \quad (q=1, \dots, N_{dgv}) \quad (9)$$

ここに、 $e_q$  は設計変数  $q$  に対するひずみエネルギー感度、 $n_p$  は特性数で、Fig.1 では両条件共 4 で与えられる。また  $f(q,k)$  は設計変数番号と特性番号から要素番号を得る関数で、たとえば、Fig.1 の 2 軸対称条件で  $q=1$  の場合は次のようになり

$$f(1,1)=37, f(1,2)=36, f(1,3)=28, f(1,4)=29$$

Fig.1 の連続パターン条件で  $q=1$  の場合は次のようになる。

$$f(1,1)=1, f(1,2)=5, f(1,3)=33, f(1,4)=37$$

また、(9)式の  $N_{dgv}$  は設計変数の総数を表し、Fig.2 の場合 16 となる。

したがって、(1)式は次のように書き換えられる。

$$\rho_i = 0 \quad \text{if} \quad e_{g(i)} < X_{cr}^e \quad ; i=1, \dots, N_L \quad (10)$$

ここに、 $g(i)$  は、要素番号  $i$  から設計変数番号を得る関数で、例えば、Fig.1 の 2 軸対称条件の場合は次のようになり

$$g(1)=16, g(2)=15, g(3)=14, g(4)=13, \dots$$

Fig.1 の連続パターン条件の場合は次のようになる。

$$g(1)=1, g(2)=2, g(3)=3, g(4)=4, \dots$$

また、(10)式の  $X_{cr}^e$  は、 $e_q$  に関する閾値で次式から計算される。

$$X_{cr}^e = e_{av} - \eta \cdot \phi^e \quad (11)$$

ここに、

$$e_{av} = \frac{1}{N_{dgv}} \sum_{q=1}^{N_{dgv}} e_q \quad \phi^e = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{N_{dgv}} (e_q - e_{av})^2}{N_{dgv}}} \quad (12)$$

なお、 $\eta$  の計算法については、2 章と同じである。

### 3.2 計算アルゴリズムの改良

前論文<sup>3)</sup>では、境界線長さが短いシンプルな位相形態を求める方法として、(4)式の除去率  $\lambda$  を比較的大きめ ( $\lambda=0.05\sim 0.1$ ) に設定し、やや荒削り状態で得られる収束解に対して、仕上アルゴリズムを適用する方法を示している。これは、3次元問題においては、要素数が膨大になるため、計算効率を改善するための処理でもある。しかしながら、本論文で扱う問題は2次元問題であるため、要素数はそこまで膨大とはならない。そこで、本論文では、除去率  $\lambda$  を BESO 法<sup>7)</sup>と同様に 0.01 程度に小さく設定し、(8)式の影響半径  $r_{min}$  を調整することで、境界線長さが短い位相形態を求めることを試みる。

ただし、除去率を小さくしても収束形態に孤立要素等が残る場合があるため、本論文では、前論文の仕上アルゴリズムを少し改良して最終形態を求める。すなわち、本論文で用いる仕上アルゴリズムでは、まず、IESO 法の収束解を読み込み、CA 法の考え方<sup>9)</sup>にもとづき、(10)式の  $e_{g(i)}$  が(12)式の  $e_{av}$  より大きくなる要素に対して、該当要素と面を共有するすべての要素 (Neumann 近傍要素) の密度を 1 にすることで要素付加を行う (前論文のように目標付加率を定めた付加は行わない)。次に、再度 IESO 法で、除去率を 0.01、影響半径倍率  $b_r$  を 1 として解析を行い、仕上げを行う。

また、影響半径に関しては、前論文<sup>3)</sup>では、影響半径倍率  $b_r$  を 3 程度としていたが、本論文ではさらに大きな倍率も試みる。

## 4. 解析例

### 4.1 設計領域と解析条件

以上の手法を用いてユニット壁の形態創生を試みる。Fig.3 は、解析モデルの設計領域と荷重および境界条件を示す。なお、解析は線形弾性範囲で行うため、寸法、材料定数の大きさは得られる位相に影響しない。Fig.3 に示す設計領域のボクセル分割数は  $240 \times 150 \times 2$  とし、境界条件は、すべての節点の面外変位を拘束、底面のすべての節点を完全拘束としている。なお、面外方向の分割は 1 でもよいが、本論文ではプリプロセッサの制約上 2 としている。また、荷重条件は、上面のすべての節点に鉛直荷重と双方向の水平荷重 (地震力) を与え、水平荷重の大きさは、鉛直荷重 1.0 に対して 0.2 と 1.0 にした場合の解析を行っている。また、最適化の条件としては、目標体積比  $\bar{v}_r$  を 0.6、除去率  $\lambda$  を 0.01 とする。

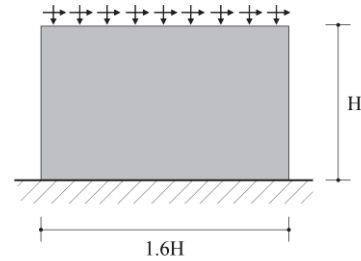


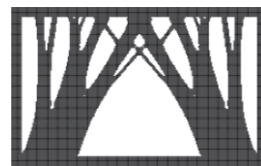
Fig.3 Design domain and conditions of numerical example

### 4.2 人工的デザイン要素を付与しない場合

Fig.4 は、以下の解析例との比較に用いるものとして、人工的デザイン要素を付与しない場合の設計領域と解析結果を示す。図中には影響半径倍率  $b_r$ 、残存要素の体積比  $V_r$ 、およびコンプライアンス  $C$  と全要素の密度を 1 とした場合の初期コンプライアンス  $C^{02}, C^{10}$  との比を示している。ただし、 $C^{02}$  は水平荷重の比が 0.2、 $C^{10}$  は 1.0 の初期コンプライアンス値を示す。なお、ユニット壁同士の接合を考慮して外枠部分は設計固定としている。



Design domain (black elements : non-eliminate)



$b_r = 3, V_r = 0.593, C/C^{02} = 2.43$

Horizontal load: 0.2



$b_r = 3, V_r = 0.596, C/C^{10} = 2.33$

Horizontal load: 1.0

Fig.4 Results of analysis without artificial design element

### 4.3 2 軸対称条件を付与した場合

Fig.5 は、2 軸対称条件を付与した場合の解析結果を示す。また、図中には、3.2 節に示す仕上アルゴリズム適用前 (上段) と適用後 (下段) の結果を示している。また、図中には影響半径倍率  $b_r$ 、残存要

素の体積比  $V_r$ , コンプライアンス比を示している。また、影響半径倍率  $b_r$  は 3 とした場合と 10 とした場合の結果を示している。これらの図より、仕上アルゴリズムの適用により剛性に寄与しない要素が消え、コンプライアンス比も改善されることがわかる。また、 $b_r=3$  の場合は、境界線長さが長い複雑な形態となるが、 $b_r=10$  にすることで、境界線長さが短いシンプルな形態が得られている。このように、除去率  $\lambda$  を 0.01 と小さくしても、影響半径倍率を大きくすることで、境界線長さが短いシンプルな形態を得ることが可能であることがわかる。また、Fig.4 の結果と比較すると、コンプライアンス比はやや高くなるが、よりバランスのとれた形態となっている。

がある。これは、残存要素の体積比  $V_r$  が目標体積比  $\bar{V}_r (=0.6)$  を下回るためである。これは、パターン連続の場合、仕上によって応力が均等化され、感度の平均値 ((12)式の  $e_{av}$ ) より大きくなる要素が少なくなるためと考えられる。また、この場合も影響半径倍率  $b_r$  を 10 にすることで、境界線長さが短いシンプルな形態が得られている。また、Fig.4 の結果と比較すると、Fig.6 では、Fig.4 の形態を圧縮したような形態が並ぶことがわかる。これは、パターンのアスペクト比が全体のアスペクト比と同じであるためと考えられる。しかし、いずれの形態も、Fig.4 の結果と比較すると、コンプライアンス比はやや高くなるが、よりバランスのとれた形態となっている。

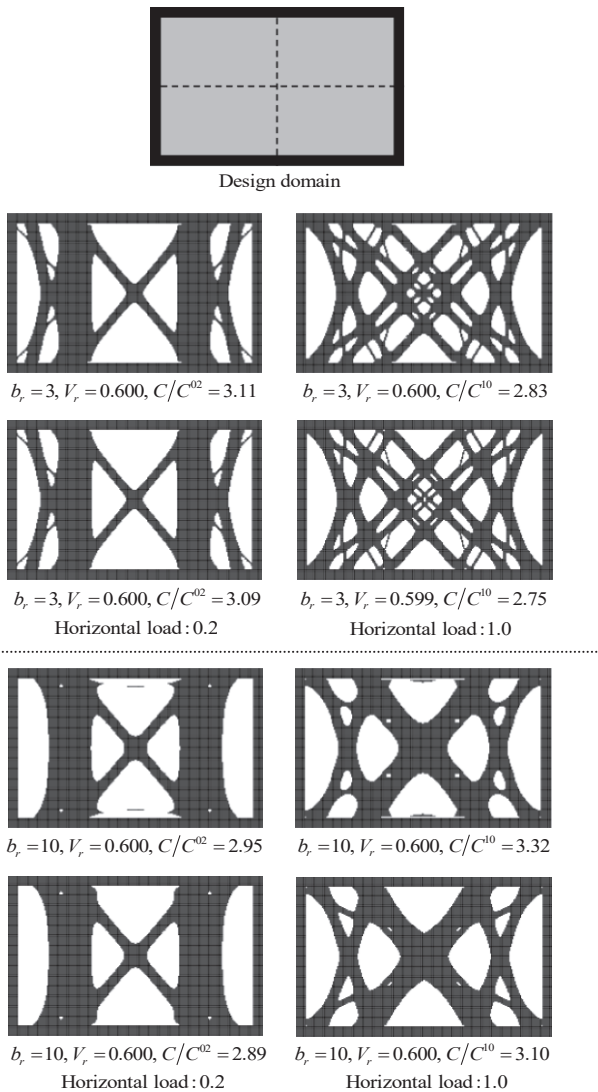


Fig.5 Results of analysis with 2-axis symmetry condition

4.4 4連続パターン条件を付与した場合

Fig.6 は、縦横 2 分割の連続パターン条件を付与した場合の解析結果を示す。図には、仕上アルゴリズム適用前 (上段) と適用後 (下段) の結果を示している。図中には影響半径倍率  $b_r$ , 残存要素の体積比  $V_r$ , コンプライアンス比を示している。この場合も、影響半径倍率  $b_r$  は 3 と 10 の結果を示している。これらの図より、仕上アルゴリズム適用の効果が現れていることがわかる。ただし、仕上後のコンプライアンス比は仕上前と比較して必ずしも低くならない場合

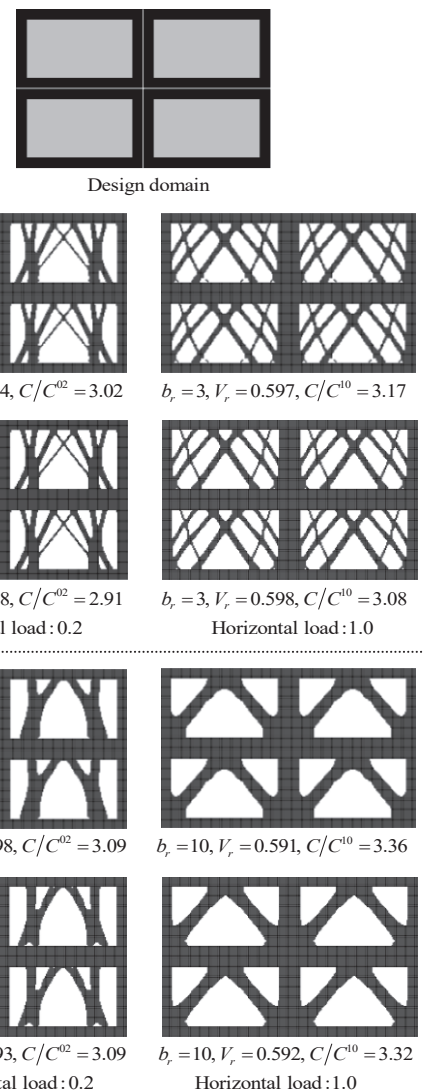


Fig.6 Results of analysis with 4-continuous pattern condition

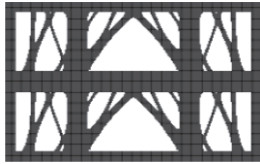
4.5 2連続パターン条件を付与した場合

Fig.7,8 は、パターンのアスペクト比を変えるため、縦方向に 2 分割、横方向に 2 分割の連続パターン条件を付与した場合の解析結果を示す。ただし、図には、仕上アルゴリズム適用後の結果のみを示している。図に示すように、この場合は、Fig.4 とは異なる形態が得られている。また、この場合も影響半径倍率  $b_r$  を 10 にすることで、境界線長さが短いシンプルな形態が得られている。これらの図より、いずれの場合も、Fig.4 の結果と比較してコンプライアンス比はやや

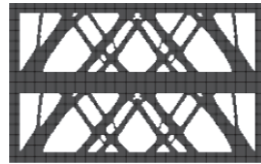
高くなるが、パターンが連続することで壁のデザインとしてはよりバランスのとれたものとなっていることがわかる。



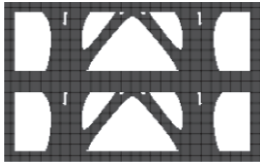
Design domain



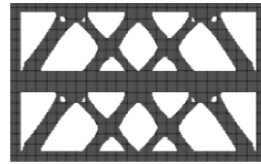
$b_r = 3, V_r = 0.599, C/C^{0.2} = 3.71$   
Horizontal load: 0.2



$b_r = 3, V_r = 0.599, C/C^{1.0} = 2.85$   
Horizontal load: 1.0



$b_r = 10, V_r = 0.599, C/C^{0.2} = 3.57$   
Horizontal load: 0.2

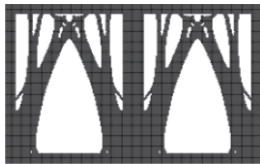


$b_r = 10, V_r = 0.569, C/C^{1.0} = 3.05$   
Horizontal load: 1.0

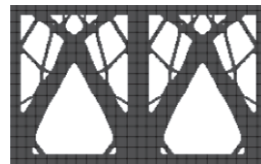
Fig.7 Results of analysis with 2-continuous pattern condition



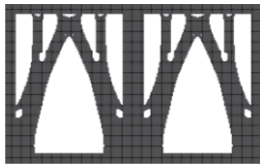
Design domain



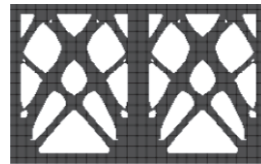
$b_r = 3, V_r = 0.597, C/C^{0.2} = 2.44$   
Horizontal load: 0.2



$b_r = 3, V_r = 0.599, C/C^{1.0} = 2.80$   
Horizontal load: 1.0



$b_r = 10, V_r = 0.574, C/C^{0.2} = 2.58$   
Horizontal load: 0.2



$b_r = 10, V_r = 0.599, C/C^{1.0} = 2.71$   
Horizontal load: 1.0

Fig.8 Results of analysis with 2-continuous pattern condition

#### 4.6 ファサードイメージ

Fig.9～Fig.16は、Fig.5～Fig.8の $b_r=10$ の結果をもとに、9層6スパン建築物のファサードのイメージ図を作成し、これを都会のビル郡の中に配置してみたものである。ただし、Fig.5～Fig.8の $b_r=10$ の結果に現れる細かい穴は塗り潰して表現している。これらの図より、2軸対称条件や連続パターン条件を付与することにより、街の中の建築としても、調和していることがわかる。

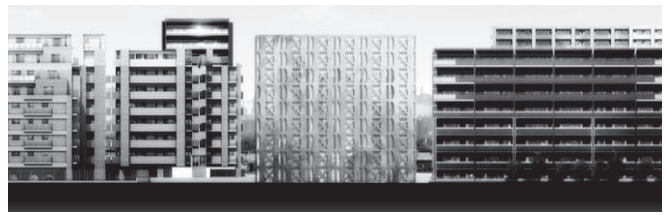


Fig.9 Façade design based on the result of HL:0.2 in Fig.5

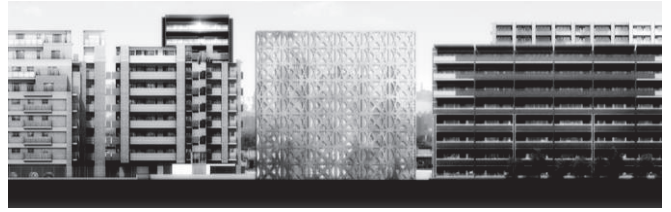


Fig.10 Façade design based on the result of HL:1.0 in Fig.5



Fig.11 Façade design based on the result of HL:0.2 in Fig.6

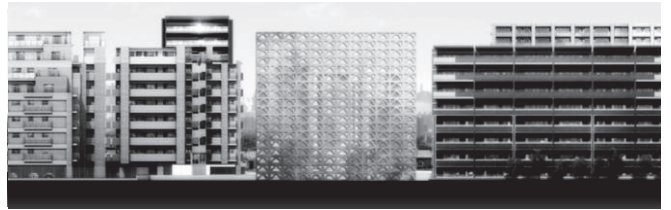


Fig.12 Façade design based on the result of HL:1.0 in Fig.6

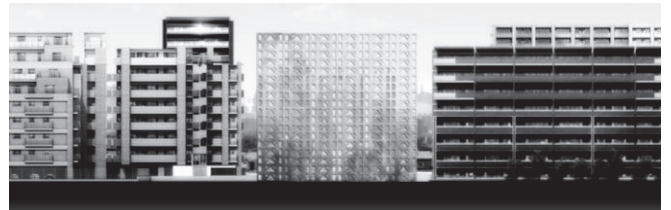


Fig.13 Façade design based on the result of HL:0.2 in Fig.7

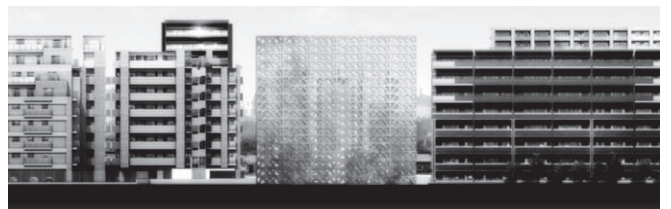


Fig.14 Façade design based on the result of HL:1.0 in Fig.7

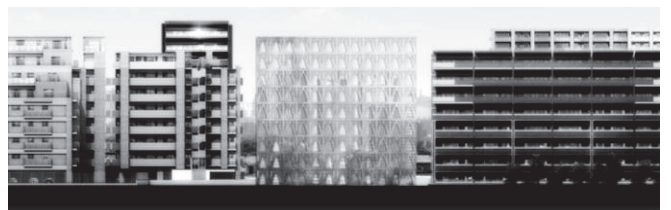


Fig.15 Façade design based on the result of HL:0.2 in Fig.8



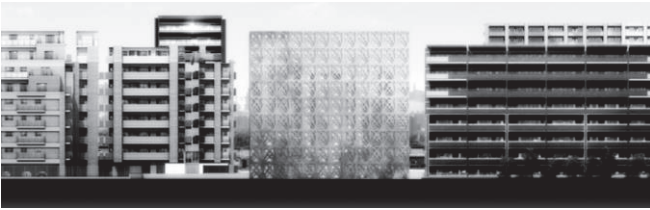


Fig.16 Façade design based on the result of HL:1.0 in Fig.8

## 5. まとめ

本論文では、位相最適化手法を建築物のファサードデザインに適用する方法として、ボクセル有限要素法を用いた IESO 法に 2 軸対称条件と連続パターン条件を付与する方法を提案し、壁式構造建築物のユニット壁の形態創生により、その有効性を検討した。

その結果、以下の知見が得られた。

- (1) ボクセル有限要素法では、要素配列が均等であるため、特性番号にしたがった設計変数番号の自動割付により、2 軸対象条件やパターン連続条件を容易に付与できる。
- (2) 改良した仕上アルゴリズムを適用することで剛性に寄与しない要素がほとんど消え、コンプライアンス比も改善される。
- (3) 2 軸対称条件や連続パターン条件を付与することで、コンプライアンスはやや劣化するが、ユニット壁としてはよりバランスのとれた形態が得られる。
- (4) 2 軸対称条件や連続パターン条件を付与することで、ファサードデザインとしては、都会の集合住宅等に用いても周りの建物と、調和の取れたものとなる。

以上より、位相最適化手法を建築デザインに用いる場合、何らかの人工的なデザイン要素を付与することで、より魅力的なファサードデザインを創生できることがわかった。ただし、実際の建築物のファサードとして用いる場合は、本解析で得られた形態をもとに、さらに意匠設計者の手が加わることが望ましい。コンピュータが作り出すものは一つのコンセプトで、これに意匠設計者の手が加わることで、真の形態美が生まれるものと思われる。

なお、本論文では、以上のようなユニット壁を実際にどのように製造するかまでは検討していない。現状の技術ではコスト的に困難かも知れないが、今後、鑄造技術、あるいは繊維コンクリート、CLT 板等、自由な形態を容易に造り出せる材料等の開発が進めば、いずれは本論文に示したようなファサードが街並みに現れることもありえると考えている。

## 謝辞

本論文の解析例のモデル作成および結果の表示には、(株)くいんと VOXELCON を利用している。(株)くいんとの石井恵三氏、月野誠氏、英山寛之氏に、研究室で開発したソフトとのデータリンクについて技術協力を得た。また、4.6 節のファサードイメージは、近畿大学大学院(建築意匠研究室)の松田一明氏に作成していただいた。ここに記して感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) Izabela Hager, Anna Golonoka, Roman Putanowicz : 3D printing of buildings and building components as the future of sustainable construction ?, *Procedia Engineering* 151, pp.292-299, 2016
- 2) Yohei Niiuchi, Shinya Matsumoto, Daiji Fujii : Topology optimization of 3D structures using Improved ESO method, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol.81, No.723, pp.851-858, 2016.5
- 3) Yohei Niiuchi, Shinya Matsumoto, Daiji Fujii : Computational morphogenesis of building structures using IESO method - Natural shape of buildings which resist vertical and seismic load, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol.82, No.731, pp.97-103, 2017.1
- 4) Hiroshi Ohmori, Hiroyuki Futai, Toshihiko Iijima, Atsushi Muto, Yasutoshi Hasegawa : Structural design of office building by computational morphogenesis, *AIJ Journal of Technology and Design*, No.20, pp.77-82, 2004.12
- 5) Lauren L. Beghini, Alessandro Beghini, Neil Katz, William F. Baker, Glaucio H. Paulino : Connecting architecture and engineering through structural topology optimization, *Engineering Structures*, 59, pp.716-726, 2014
- 6) Mark Donofrio : Topology optimization and advanced manufacturing as meand for the design of sustainable building components, *Procedia Engineering* 145, pp.638-645, 2016
- 7) X. Huang, Y. M. Xie : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, *Finite Elements in Analysis and Design* 43, pp.1039-1049, 2007
- 8) Hiroshi Ohmori and Chang Yu CHI : Structural form creation by Extended ESO method - Application to adaptive structures and shells -, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, No.552, pp.109-116, 2002.2
- 9) Daiji Fujii, Ryo Okabe, Masatoshi Manabe : Topology optimization of 3D structures using CA-ESO Method and voxel finite element method, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol.79, No.703, pp.1279-1286, 2014.9
- 10) Y. M. Xie, G. P. Steven : *Evolutionary Structural Optimization*, Springer, 1997

# COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF BUILDING STRUCTURES USING IESO METHOD

Application to façade design

*Mizuki MARUYAMA*<sup>\*1</sup>, *Shinya MATSUMOTO*<sup>\*2</sup> and *Daiji FUJII*<sup>\*3</sup>

<sup>\*1</sup> Grad. Student, Graduate School of Systems Engineering, Kindai University

<sup>\*2</sup> Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr. Eng.

<sup>\*3</sup> Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr. Eng.

Recently, buildings or its components are starting to be constructed by 3D printer<sup>1)</sup>. In the near future, if such technology progress, buildings with various forms will be constructed. On the other hand, topology optimization method (software) is becoming widespread as a method to create a structural form with mechanical rationality. Also, topology optimization method has high compatibility with digital fabrication technology, and this method is adaptive for developing new form of buildings or its components<sup>5)</sup>.

In this paper, we focus on façade design of buildings used prefabricated walls, and we propose a method to design the prefabricated wall using topology optimization method. In this method, artificial design elements are added to the topology optimization method. In this paper, 2-axis symmetry and continuous pattern conditions are adopted as the artificial design elements. IESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) method<sup>2,3)</sup> is used for the topology optimization method. IESO method is improvement of initial ESO method<sup>9)</sup>, and in this method, benefits of BESO<sup>6)</sup>, Extended ESO<sup>7)</sup>, and CA-ESO<sup>8)</sup> methods are combined.

In section 2, the outline of IESO method is shown. In this method, the design domain is divided in same eight-node brick elements (voxels), and in the optimization process, for solid element, it will be removed if the sensitivity number is less than the threshold value. This threshold value is obtained from the equation which consists of the mean value of sensitivity number and the average deviation of sensitivity number with a control parameter. In this method, the evolutionary volume ratio (reduction ratio) is given as an input data, and this control parameter is determined automatically in the program so as to satisfy the given reduction ratio approximately. Furthermore, in this method, finishing algorithm is added. In this algorithm, first, the converged solution obtained by IESO is input, and then, the elements about 5% of the total elements of design domain are added according to the rule of CA method. And the calculation of IESO is executed again with the smaller reduction ratio than the initial analysis (about 1/5 ~ 1/10).

In section 3, the methods for adding the artificial design elements (2-axis symmetry and continuous pattern conditions) are shown. Also, the finishing algorithm is improved. In the new algorithm, if the sensitivity numbers of elements are greater than the average, the elements of the von Neumann neighborhood are added. This finishing algorithm is repeated until a clear solution is obtained.

In section 4, the numerical examples of computational morphogenesis of prefabricated wall are shown in order to verify the application possibility of the proposed method to the façade design of buildings used prefabricated walls. Fig.5, 6 show the results of analysis with 2-axis symmetry condition. Fig.7, 8 show the results of analysis with 4-continuous pattern condition. Fig.9, 10 show the results of analysis with 2-continuous pattern condition. Fig.11~16 show the façade design image of buildings using the results obtained Fig.5~10.

It is concluded from these numerical examples as follows.

- (1) In the voxel finite element method, it is easy to give the 2-axis symmetry condition or the continuous pattern condition, because the arrangement of the elements (voxels) is uniform.
- (2) The clear and simple solutions can be obtained by application of the improved finishing algorithm.
- (3) The solutions with more robust form can be obtained by addition of the 2-axis symmetry condition or the continuous pattern condition.
- (4) Façade designs created from the solutions are not uncomfortable even if these are used for apartment houses in urban areas.

(2017年2月10日原稿受理, 2017年5月26日採用決定)

## IESO 法を用いた連続体シェル構造の形態創生

COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF CONTINUUM SHELL STRUCTURES  
USING IESO METHOD上村 紘一<sup>\*1</sup>, 眞鍋 匡利<sup>\*2</sup>, 松本 慎也<sup>\*3</sup>, 藤井 大地<sup>\*4</sup>  
*Koichi KAMIMURA, Masatoshi MANABE, Shinya MATSUMOTO  
and Daiji FUJII*

In this paper, a simple method to find an optimal shell structure is proposed. In this method, a rectangular fixed design domain with given boundary conditions and body forces is modeled by voxel mesh, and strain energies of elements (voxels) are obtained by voxel finite element method. Next, elements with small strain energy are gradually removed by the Improved Evolutionary Structural Optimization (IESO) method. Finally, we can obtain a shell structure that shape, thickness and topology are optimized. In this paper, several numerical examples will be shown in order to verify the effectiveness of the proposed method.

**Keywords :** *Topology optimization, ESO method, Computational Morphogenesis, Continuum shell structure, Voxel finite element method*

位相最適化, ESO 法, 形態創生, 連続体シェル構造, ボクセル有限要素法

## 1. はじめに

自由な曲面を実現できるコンクリートシェルは、これまで多くの魅力ある建築物を産み出してきた。また、近年、コンクリートの高強度化、軽量化、新素材による補強の多様化に伴い、様々な形態のコンクリートシェルが建設されつつある。一方、このようなコンクリートシェルは、数値解析において連続体として扱われ、有限要素法等、一般の建築物に比較してより高度な解析技術が必要となる。さらに、数学的関数を用いない自由曲面シェルでは、応力分布が複雑になり、力学的に最適な曲面を決定することは容易ではない。

このような背景から、シェル構造に関しては、形状最適化等の最適化技術の導入が進んでおり、建築家が描いた曲面を、形状最適化手法を用いて修正する方法が実際に用いられている<sup>1)</sup>。しかしながら、位相(トポロジー)を最適化する技術については、研究は進んでいるものの<sup>2,3,4)</sup>、未だ実用化には至っていない<sup>5)</sup>。また、コンクリートシェルのような連続体シェルは、形状だけでなく厚みの分布も設計対象となり、これにトポロジーが加わると非常に複雑な最適化問題となる。

大森ら<sup>6)</sup>は、このような複雑な問題に対して、三角形シェル要素で分割した自由曲面を NURBS 関数で表し、曲面と板厚を徐々に最適化し、板厚の薄くなったところに孔を空けるという手法を提案している。しかし、この方法ではトポロジーの変化に応じて有限要素をリメッシュする必要があるため、数値実装が煩雑となる。一方、トポロジー最適化の手法として、固定設計領域を均一な直方体要素(ボクセル)で分割し、その固定設計領域内で自由に形態を創生させるボ

クセル有限要素法を用いたトポロジー最適化手法がある。本手法はすでに汎用ソフトにもなっており、連続体シェル構造の最適なトポロジー・板厚・形状を同時に求める方法としては扱いやすい。しかしながら、このような方法では、シェルの形状の変化に伴い、荷重を与える位置が変化するため、形状を決めずにシェルの形態を創生することは難しいと考えられる。

そこで本論文では、あらかじめ形状を決定するとなく連続体シェル構造の形態を創生することが可能なトポロジー最適化手法を提案する。本手法は、ボクセル分割された固定設計領域(通常は直方体)全体に物体力(体積力)を与える方法であり、鉛直方向の物体力を与えた場合はカテナリーアーチと同様な断面形状の輪郭をもつシェル形態が得られる。したがって、このような手法により、Antoni Gaudi<sup>7)</sup>や Heinz Isler<sup>8)</sup>が生み出したようなシェル構造を創生できる可能性がある。また、鉛直方向と同時に水平方向にも物体力を与えれば、地震力にも対応したシェルの形態を創生することも可能になる。

本論文では、本手法の有効性を検証するため、文献 9), 10) で提案したボクセル有限要素法を用いた改良型 ESO 法 (IESO 法) を用いる。本方法は、BESO 法<sup>11)</sup>、拡張 ESO 法<sup>2)</sup>、CA-ESO 法<sup>12)</sup>の利点を組み合わせ、初期の ESO 法<sup>13)</sup>を改良した方法で、3次元の剛性最大化問題において数値計画法に劣らない解が得られる。本論文では、本手法に物体力を与えることで連続体シェル構造の形態創生が可能となることを示し、その有効性を検証する。

\*1 近畿大学大学院システム工学研究科 大学院生

\*2 榎木村建築設計事務所 修士(工学)

\*3 近畿大学工学部 准教授・博士(工学)

\*4 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

Grad. Student, Graduate School of Systems Engineering, Kindai Univ.

Staff member, Kimura Architects and Engineers Office, M.Eng.

Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kindai Univ., Dr.Eng.

Prof., Faculty of Engineering, Kindai Univ., Dr.Eng.

## 2. IESO法の概要

本論文に用いるトポロジー最適化手法では、物体領域を包含する直方体の固定設計領域（各辺の長さ： $L_x, L_y, L_z$ ）を設定し、これを均等な直方体要素（ボクセル）で分割する（各辺の有限要素分割数： $n_x, n_y, n_z$ ）。そして、物体領域と空洞領域の判別は設計変数であるボクセルの密度の有無（1/0）によって与える。この時、ボクセルの各辺の長さ $l_x, l_y, l_z$ は、 $l_x = L_x/n_x$ 、 $l_y = L_y/n_y$ 、 $l_z = L_z/n_z$ となる。

ボクセルを用いた応力解析の方法（ボクセル有限要素法）は、文献12)に示すものにしたがう。また、IESO法<sup>9,10)</sup>によるトポロジー最適化では、ボクセル有限要素法の利点を生かすため、最適化の過程でリメッシュは行わず、物体領域となる存在要素の密度を1、空洞領域となる除去要素の密度を0とすることで各ステップの材料分布を決定する。

IESO法<sup>9,10)</sup>では、要素除去に関しては、拡張ESO法<sup>2)</sup>のルールを用いる。ただし、要素除去の指標としてBESO法<sup>11)</sup>で用いられているひずみエネルギー感度（コンプライアンスの要素密度に関する感度<sup>9)</sup>）を用いる。したがって、要素除去のルールは次式となる。

$$\rho_i = 0 \quad \text{if} \quad \alpha_i < X_{cr} \quad ; i=1, \dots, N_L \quad (1)$$

ここに、 $\rho_i$ 、 $\alpha_i$ は要素 $i$ の密度（0 or 1）とひずみエネルギー感度、 $N_L$ は残存要素数、 $X_{cr}$ は閾値で、次式で定義される。

$$X_{cr} = \alpha_{av} - \eta \cdot \phi \quad (2)$$

ただし、 $\alpha_{av}$ と $\phi$ は残存要素のひずみエネルギー感度の平均値と標準偏差であり、次式から計算される。

$$\alpha_{av} = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} \alpha_i \quad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_L} (\alpha_i - \alpha_{av})^2}{N_L}} \quad (3)$$

ここに、 $\eta$ は要素の除去量を制御する制御変数であり、 $\eta$ が大きいと要素が除去されにくく、 $\eta$ が小さいと除去されやすくなる。

IESO法では、BESO法と同様に各ステップの要素除去率を与える。この除去率を $\lambda$ とすると、第 $k$ ステップの除去要素数 $N_R^{(k)}$ は、次式で計算される。

$$N_R^{(k)} = \begin{cases} \lambda N_L^{(k-1)} & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} \geq \bar{N}_L \\ N_L^{(k-1)} - \bar{N}_L & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} < \bar{N}_L \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 $N_L^{(k-1)}$ は $(k-1)$ ステップの残存要素数、 $\bar{N}_L$ は残存要素数の制約値（下限値）である。そして、(1)式で除去される要素数が、(4)式の $N_R^{(k)}$ に近くなる $\eta^{(k)}$ （第 $k$ ステップ(2)式の $\eta$ ）をプログラム内で自動計算する<sup>10)</sup>。

一方、(1)式の $\alpha_i$ は、次のように求められる<sup>9,11)</sup>。まず、次式により要素のひずみエネルギー $\alpha_i^e$ が計算される。なお、これは、コンプライアンスの要素密度に関する感度の1/2に相当する<sup>9,11)</sup>。

$$\alpha_i^e = (1/2) \mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \quad (5)$$

ただし、 $\mathbf{K}_i$ 、 $\mathbf{d}_i$ は要素 $i$ の剛性マトリクスと節点変位ベクトルを表す。次に次式により節点 $j$ の感度が計算される。

$$\alpha_j^n = \left( \sum_{i=1}^{M^e} \alpha_i^e \right) / M^e \quad (6)$$

ここに、 $\alpha_j^n$ は節点 $j$ のひずみエネルギー感度、 $M^e$ は節点 $j$ と接続関係を有する要素の数を表す。なお、これは、チェッカーボード状

の密度分布を防ぐために行われる。そして、(1)式の $\alpha_i$ は次式から計算される。

$$\alpha_i = \left( \sum_{j=1}^{M^e} w(r_{ij}) \alpha_j^n \right) / \sum_{j=1}^{M^e} w(r_{ij}) \quad (7)$$

ただし、 $M^e$ は要素 $i$ の要素中心から影響半径 $r_{\min}$ の球体内に含まれる節点数、 $r_{ij}$ は要素 $i$ の中心から節点 $j$ までの距離、 $w(r_{ij})$ は要素中心からの距離に比例する重みで、次式で定義される。

$$w(r_{ij}) = r_{\min} - r_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, M^e) \quad (8)$$

以上の解析では、有限要素解析に必要なデータとして、固定設計領域の大きさ $(L_x, L_y, L_z)$ 、分割数 $(n_x, n_y, n_z)$ 、ヤング係数、ポアソン比、境界条件、荷重条件がある。また、最適化計算に必要なデータとして、(8)式の影響半径 $r_{\min}$ （実際には、 $r_{\min} = b_r \cdot l_x$ として $l_x$ の倍数 $b_r$ （影響半径倍率）で与える）、(4)式の残存要素数の下限値 $\bar{N}_L$ （実際には、目標体積比 $\bar{V}_r = \bar{N}_L / (n_x \cdot n_y \cdot n_z)$ で与える）、除去率 $\lambda$ （残存要素数に対する1ステップの除去率）がある。固定設計領域内に空洞領域や非設計領域を設定する場合は、設計対象から除外する要素の番号・密度情報（0/1）を定数として入力する必要がある。

## 3. 物体力の付加方法と計算アルゴリズム

### 3.1 物体力の付加方法

次に物体力の付加方法を示す。1つのボクセルの物体力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_x^{(i)} &= \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_x \\ B_y^{(i)} &= \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_y \\ B_z^{(i)} &= \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_z \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、 $B_x^{(i)}, B_y^{(i)}, B_z^{(i)}$ はボクセル $i$ の物体力、 $\gamma$ は単位体積質量、 $(l_x \cdot l_y \cdot l_z)$ はボクセルの体積、 $g_x, g_y, g_z$ は $X, Y, Z$ 方向の加速度を表す。ただし、 $X, Y, Z$ は全体座標系を表す。

ここで扱うボクセルは、すべて同体積であり、8節点直方体要素であるため、(9)式は各要素の節点荷重として次のように表される。

$$\begin{aligned} f_{xj}^{(i)} &= B_x^{(i)} / 8 = (1/8) \cdot \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_x \\ f_{yj}^{(i)} &= B_y^{(i)} / 8 = (1/8) \cdot \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_y \\ f_{zj}^{(i)} &= B_z^{(i)} / 8 = (1/8) \cdot \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_z \end{aligned} \quad (j=1, \dots, 8) \quad (10)$$

ここに、 $f_{xj}^{(i)}, f_{yj}^{(i)}, f_{zj}^{(i)}$ は、ボクセル $i$ の節点 $j$ の節点荷重を表す。

したがって、(9)式の各ボクセルの物体力は、ボクセルの各節点に(10)式の節点荷重を加えることで与えられる。

### 3.2 計算アルゴリズム

物体力が加わる問題では、要素が除去されると密度が0となり、(9)式で求められるその要素の物体力（節点荷重）も0となるため、ボクセル解析で用いている連立方程式の解法（共役勾配法）の収束解の精度が悪化する。このため、除去要素の密度を完全に0にすると、孤立節点が生じて連立方程式の解が発散する場合がある。したがって、本論文の解析では、孤立節点が生じても解が求まるように除去要素の密度は0.001としている。

また、文献 10)では、(4)式の除去率を  $\lambda = 0.05 \sim 0.1$  に設定し、物体領域と空洞領域の境界を平滑化する仕上アルゴリズム<sup>10)</sup>を適用する方法を示している。しかしながら、物体力が加わる問題では、各ステップでトポロジーが大きく変化すると荷重も大きく変わるため、共役勾配法の解の精度が悪化する。これは、このような進化的手法では、共役勾配法の解の初期値として前ステップの解を用いるためでもある。したがって、除去率  $\lambda$  が大きい場合、対称問題でも非対称な解が得られる場合がある。

以上のような問題の解決法としては、直接法により連立方程式を解くことも考えられるが、スパスルバを用いたとしても大規模問題においては大容量のメモリが必要となる。したがって、本論文では、除去率  $\lambda$  を 0.01 程度の小さい値に設定することで対応する。

#### 4. 数値解析例

##### 4.1 球形シェルと円筒シェル（ライズが高い場合）

まず、本手法の有効性を確かめるために、Fig.1 に示す固定設計領域の底面に、Fig.2 に示す円 (S.C.1) と平行線 (S.C.2) の支持条件 (Support condition) を与えた問題の解析を行う。ただし、固定設計領域のボクセル分割数は  $100 \times 100 \times 50$  とし、Fig.2 の黒塗りで示される要素底面の節点は完全拘束とする。Fig.3, Fig.4 は、Fig.2 の支持条件に対して、Fig.1 の固定設計領域に鉛直方向の物体力 (重力) を加えた場合の IESO 法による解析結果を示す (Case 1, Case 2)。ただし、目標体積比  $\bar{v}_r$  は、Case 1 において 0.06, Case 2 において 0.1, 除去率  $\lambda$  は 0.01, 影響半径倍率  $b_r$  は 1 としている。なお、Case 1 では、頂部に孔の空く目標体積比としたため円筒より低い目標体積比となっている。図には、収束ステップ数、平均コンプライアンス比  $C/C_0$  (初期平均コンプライアンス  $C_0$  と最終ステップの平均コンプライアンス  $C$  の比) も示している。なお、 $C/C_0$  が小さくなるのは、要素除去によって全体の物体力も小さくなるためである。Fig.3, Fig.4 に示すように、円の支持条件からは球形シェルが、平行線の支持条件からは円筒シェルが創生される。Fig.5 は、Case 1, Case 2 のシェル中央断面にカテナリー曲線を重ねた図を示す。図に示すように、得られたシェルの断面は、カテナリー曲線に近い形態となっている。カテナリー曲線を反転すると自然に安定したアーチとなり、地面にむかう推力は常にアーチの軸線に沿って働くので構造的に安定する形態となる。また、Fig.6 は、Fig.5 のカテナリー曲線に等分布鉛直荷重を加えた時の軸力分布を示しているが、この軸力分布と Fig.6 の断面厚分布がほぼ対応しており、軸力が大きい支持部分は板厚が厚くなっている。したがって、Fig.3, Fig.4 の形態は、シェルの形状・板厚の両方に力学的合理性を有していることがわかる。

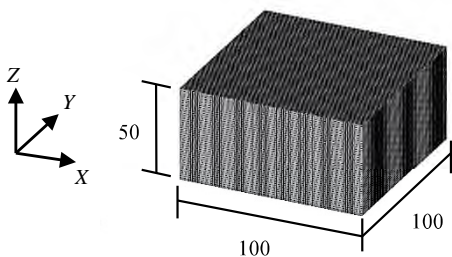


Fig.1 Fixed design domain of analysis (model 1)

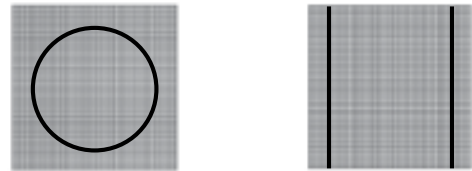
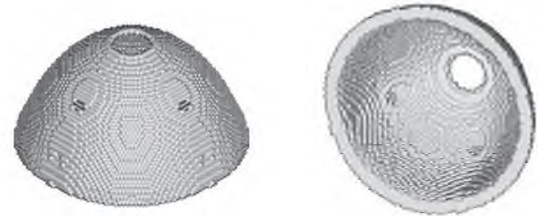
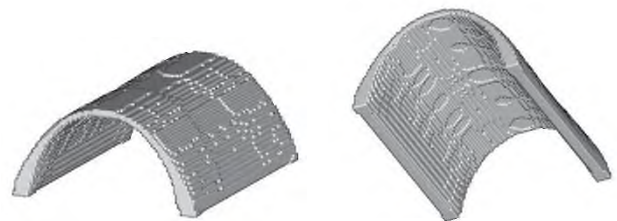


Fig.2 Support conditions in the bottom of fixed design domain



Case 1 209step  $C/C_0 = 0.005$  ( $\bar{v}_r = 0.06, \lambda = 0.01, b_r = 1$ )  
Fig.3 Optimal configuration in Case 1



Case 2 207step  $C/C_0 = 0.021$  ( $\bar{v}_r = 0.1, \lambda = 0.01, b_r = 1$ )  
Fig.4 Optimal configuration in Case 2



Fig.5 Cross sections of results and corresponding catenaries

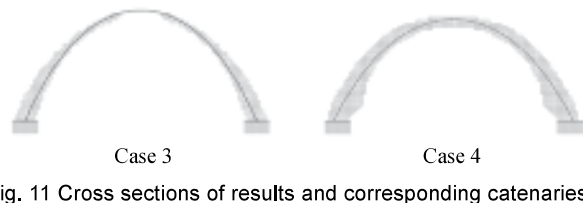
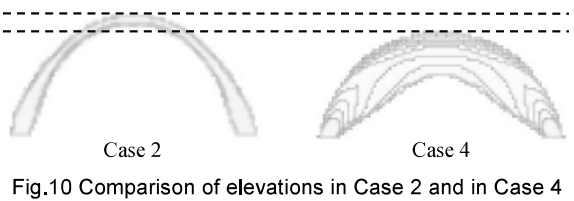
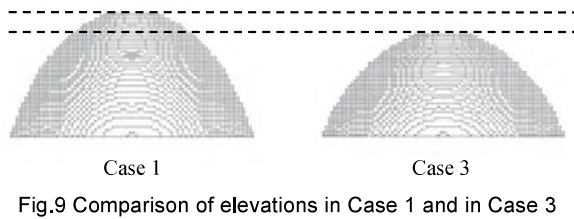
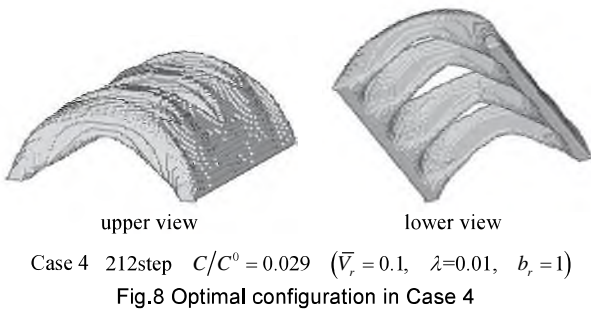
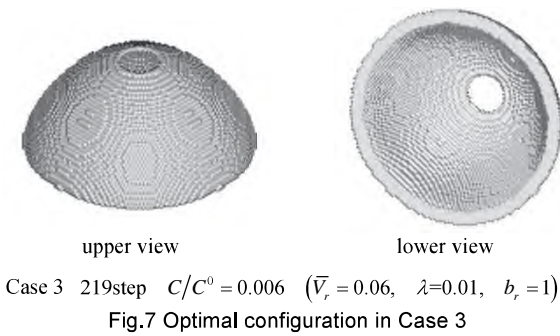


Fig.6 Axial forces acting on catenaries in Fig.5

次に、Fig.7, Fig.8 は、Fig.2 の支持条件 (S.C.1, S.C.2) で、Fig.1 の固定設計領域に Z 軸方向の重力と重力の 0.2 倍の X, Y 軸方向の水平物体力 (地震力) を双方向に加えた場合の解析結果を示す (Case 3, Case 4)。なお、実際の解析では、それぞれの方向に物体力を与えた解析を個別に行い、各解析の要素ひずみエネルギーの総和により感度を計算している。ただし、最適化のパラメータは Case 1, Case 2 と同じものを用いている。図に示すように、Case 3 の球形シェルは、Case 1 と類似の形態になっているのに対し、Case 4 の円筒シェルは、

Case 2 と比較して桁行方向に波打った形態となっている。これは、円筒シェルに地震力が加わるとより複雑な応力分布になるためと考えられる。

Fig.9, Fig.10 は、Case 1 と Case 3 および Case 2 と Case 4 の立面図の比較を示す。図に示すように、地震力が加わるとシェルのライズが低くなることわかる。Fig.11 は、Case 3 と Case 4 のシェル断面にカタナリー曲線を重ねた図を示す。図に示すように、地震力を加えた場合も、断面形状はカタナリー曲線に近い形状となることわかる。また、Fig.11 に示すように Case 3, 4 では、Case 1, 2 に比較して、支持部分が厚い板厚分布となっていることわかる。これらは地震力が加わると支持部分に加わる力も大きくなり、支持部分の板厚が厚くなったと考えられる。



#### 4.2 球形シェルと円筒シェル（ライズが低い場合）

次に、ライズの低いシェルを創生するため、固定設計領域の高さを Fig.1 の 1/2 にした Fig.12 に対する解析を行う。ただし、ボクセル分割数は  $100 \times 100 \times 25$  とし、支持条件は Fig.2 に示す 2 種とする。Fig.13, Fig.14 は、Fig.2 の支持条件に対して、Fig.12 の固定設計領域に重力を与えた場合の IESO 法による解析結果を示す (Case 5, Case 6)。ただし、目標体積比  $\bar{V}_r$  は、Case 5 の場合が 0.12, Case 6 の場合が 0.2, 除去率  $\lambda$  は 0.01, 影響半径倍率  $b_r$  は 1 としている。Fig.15 は、Case 5, 6 のシェル中央断面にカタナリー曲線を重ねた図を示す。Fig.16 は、Fig.15 のカタナリー曲線に等分布鉛直荷重を加えた時の軸力分布を示す。Fig.13, 14 に示すように、この場合も、Case 1, Case 2 と同様に円の境界条件からは球形シェルが、平行線の境界条件からは円筒シェルが創生される。また、Fig.15 に示すように Case 5, 6 では、Case 1, 2 に比較して、より均等な板厚分布となっていることわかる。これは、ライズが低くなると、頂部付近の軸力も高くなることと、固定設計領域の制限により、頂部が平面になっていることが関係していると考えられる。

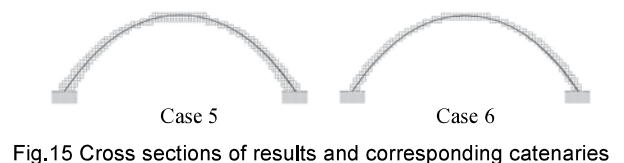
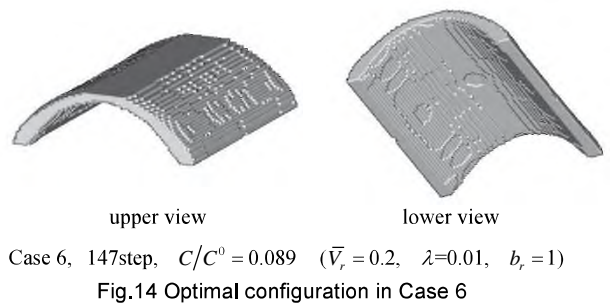
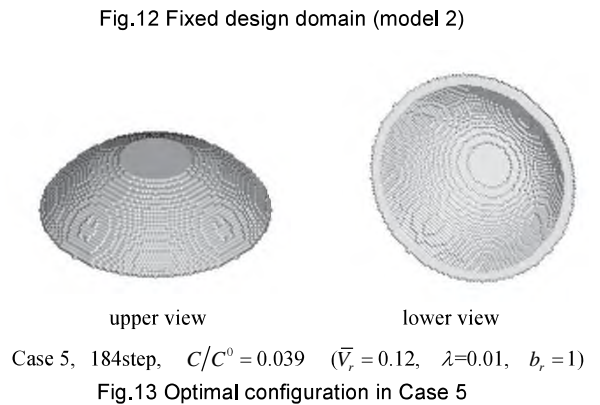
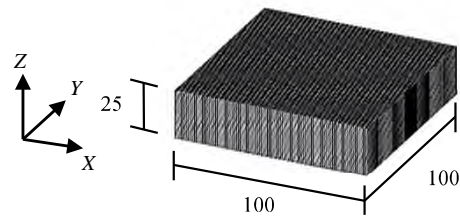
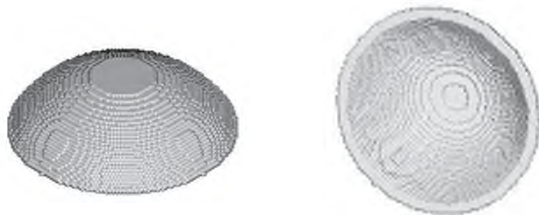


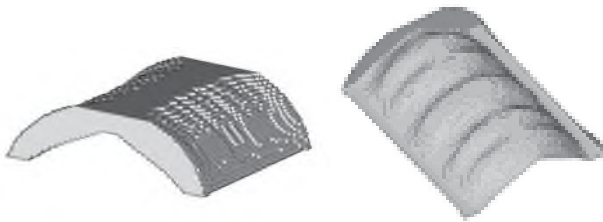


Fig.16 Axial forces acting on catenaries in Fig.15

次に, Fig.17, Fig.18 は, Fig.2 の支持条件で, 重力と, 重力の 0.2 倍の  $X, Y$  軸方向の水平物体力 (地震力) を双方向に与えた場合の解析結果を示す (Case 7, Case 8). ただし, 最適化のパラメータは Case 5, 6 と同じものを用いている. Fig.19, Fig.20 は, Case 5 と Case 7 および Case 6 と Case 8 の立面図の比較を示す. 図に示すように, この場合は, 地震力によってライズは変化しないことがわかる. これは, 固定設計領域によりライズの上限が制約されているためと考えられる. また, Fig.21 は, Case 7, 8 のシェル断面にカテナリー曲線を重ねた図を示す. 図に示すように, 地震力を加えた場合も, 断面形状はカテナリー曲線と近い形状になることがわかる. また, Fig.21 に示すように Case 7, 8 では, Case 5, 6 に比較して, 支持部分が厚い板厚分布となっていることがわかる. これらは地震力が加わると支持部分に加わる力も大きくなり, 支持部分の板厚が厚くなったと考えられる.



Case 7, 183step,  $C/C^0 = 0.038$  ( $\bar{V}_r = 0.12, \lambda = 0.01, b_r = 1$ )  
Fig.17 Optimal configuration in Case 7



Case 8, 149step,  $C/C^0 = 0.106$  ( $\bar{V}_r = 0.2, \lambda = 0.01, b_r = 1$ )  
Fig.18 Optimal configuration in Case 8



Fig.19 Comparison of elevations in Case 5 and in Case 7



Fig.20 Comparison of elevations in Case 6 and in Case 8

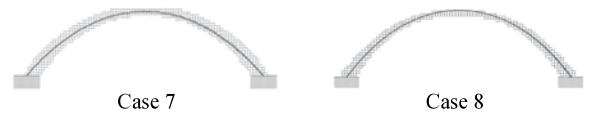


Fig.21 Cross sections of results and corresponding catenaries

#### 4.3 開口を考慮した楕円形シェル

Fig.22 は, Fig.23 に示すように固定設計領域にあらかじめトップライトを想定して, 非設計空洞領域を設定することにより, 孔を設けた解析モデルを示す. また, 固定設計領域底面の支持条件は, Fig.22 右に示すような楕円形とする. ただし, 固定設計領域のボックス分割数は  $100 \times 100 \times 35$  とする. Fig.24, Fig.25 は, Fig.22 の解析モデルに対して, 鉛直方向の物体力 (重力) を与えた場合 (Case 9) と鉛直方向の重力と重力の 0.2 倍の水平物体力を与えた場合 (Case 10) の IESO 法による解析結果を示す. ただし, 目標体積比  $\bar{V}_r$  は 0.05, 除去率  $\lambda$  は 0.01, 影響半径倍率  $b_r$  は 1 としている.

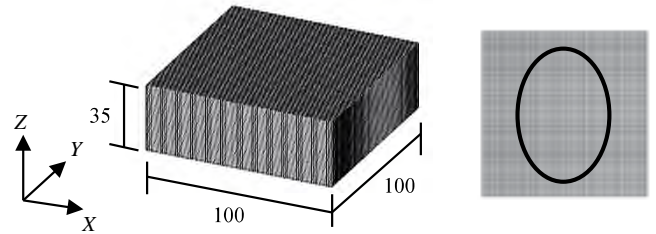


Fig.22 Fixed design domain and support condition (model 3)

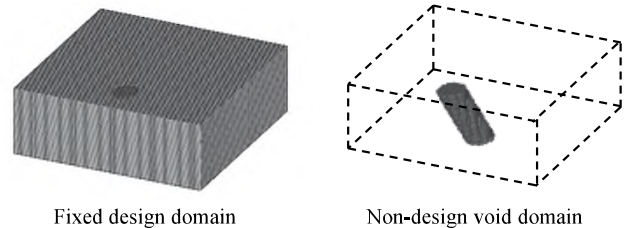
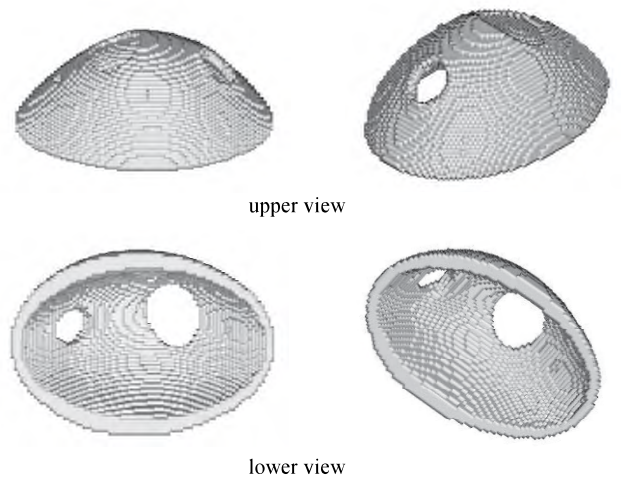
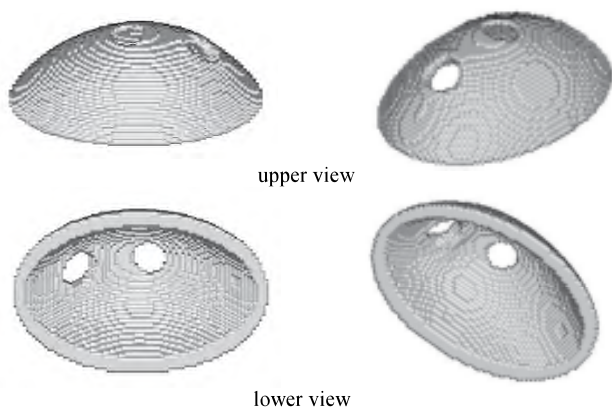


Fig.23 Design problem in Case 9 and Case 10



Case 9 254step,  $C/C^0 = 0.006$  ( $\bar{V}_r = 0.05, \lambda = 0.01, b_r = 1$ )  
Fig.24 Optimal configuration in Case 9



Case10, 266step,  $C/C^0 = 0.006$  ( $\bar{v}_r = 0.05$ ,  $\lambda = 0.01$ ,  $b_r = 1$ )  
Fig.25 Optimal configuration in Case 10



Fig.26 Cross sections of optimal configuration in Case 9



Fig.27 Cross sections of optimal configuration in Case 10

Fig.24, Fig.25 に示すように、本解析例では、初期に設定した孔の他にもう一つの孔が空いた楕円形のシェル構造が創生されることがわかる。ちなみに、Fig.23 の開口を設定しない場合の解析を行うと、中心(頂部)に1つだけの孔の空いた形態が得られる。したがって、この場合は、あらかじめ Fig.23 に示す開口を設定したことで、応力に偏りが生じ、別の箇所にもう1つの孔が空いたと考えられる。また、地震力を加えた場合は、同じように孔が2つのトポロジーとなるが、重力のみの場合と比較して、孔が小さくなる。また、Fig.26, Fig.27 は、Case 9, 10 のシェル中央の X, Y 2 方向の断面を示したものであるが、地震力の有無によって板厚分布はあまり変化しないが、地震力を加えた場合はシェルのサイズがやや低くなることわかる。

以上のように、あらかじめ空洞領域を非設計領域として設定することで、開口を考慮したシェル構造の形態創生も可能であることがわかる。なお、本手法においては、支持部に開口を設けると分離したシェルが創生されやすくなるため、本解析例では、支持部付近の開口は設けていない。

## 5. まとめ

本論文では、ボクセル有限要素法を用いた IESO 法により連続体シェル構造の形態を創生する手法を提案し、いくつかの解析例により、その有効性を検証した。その結果、以下のような知見が得られた。

- (1) 固定設計領域に支持条件と自重および地震力を物体力として与えることで、様々な連続体シェル構造の形態を創生することができる。
- (2) 自重のみを与えた球形および円筒シェル問題では、断面形状の輪郭がほぼカタナリー曲線と一致した。
- (3) 自重と地震力(水平物体力)を同時に与えると、重心が下がり、地震力に対応したシェル形態が得られる。

- (4) 事前に固定設計領域に孔を非設計空洞領域として設定することで、開口を考慮したシェル形態を創生できる。

以上により、本手法は、シェルの形状、トポロジー、板厚を同時に最適化できる手法として、コンクリートシェル等のシェル構造の初期形態を検討する上で、有効なツールの一つとなりえる。ただし、本手法では、支持部を分散した点にすると、それらの点を繋ぐ複数のアーチ形態が創生され、Heinz Isler<sup>8)</sup>が生み出したような薄肉の連続的なシェル形態とはならない。この点に関しては、(7)式の影響半径を薄肉が優位になるように設定する等の工夫が考えられるが、この問題については今後の課題としたい。

## 謝辞

本論文の解析例のモデル作成および結果の表示には、(株)くいんと VOXELCON を利用している。(株)くいんと石井恵三氏、月野誠氏、英山寛之氏に、研究室で開発したプログラムとのデータリンクについて技術協力を受けたことを感謝する。

## 参考文献

- 1) Mutsuro Sasaki : Flux Structure, Toto Publishers, 2005. 1
- 2) Hiroshi Ohmori, Chang Yu CHI : Structural form creation by Extended ESO method - Application to adaptive structures and shells -, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 552, pp. 109-116, 2002. 2 (in Japanese)
- 3) Ruben Ansola, Javier Canales, Jose A. Tarrago, John Rasmussen : An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures, Computers and Structures, Vol. 80, 449-458, 2002
- 4) Pilseong Kang, Sung-Kie Youn : Isogeometric topology optimization of shell structures using trimmed NURBS surfaces, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 120, 18-40, 2016
- 5) L. L. Beghini, A. Beghini, N. Katz, W. F. Baker, G. H. Paulino : Connecting architecture and engineering through structural topology optimization, Engineering Structures, Vol. 59, 716-726, 2014
- 6) H. Ohmori, T. Kimura, A. Maene : Computational Morphogenesis of Free Form Shells, Proceedings of the IASS Symposium 2009 Valencia, CD-ROM, Abstracts pp. 158-159, 2009
- 7) Maria Antonietta Crippa, Peter Coessel : Antoni Gaudi - From Nature to Architecture -, Taschen America LLC, 2015. 9
- 8) John Chilton : Heinz Isler - The Engineer's Contribution to Contemporary Architecture -, Thomas Telford Ltd, 2000. 1
- 9) Yohei Niiuchi, Shinya Matsumoto, Daiji Fujii : Topology optimization of 3D structures using Improved ESO method, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 81, No. 723, pp. 851-858, 2016. 5 (in Japanese)
- 10) Yohei Niiuchi, Shinya Matsumoto, Daiji Fujii : Computational morphogenesis of building structures using IESO method - Natural shape of buildings which resist vertical and seismic load -, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 82, No. 731, pp. 97-103, 2017. 1 (in Japanese)
- 11) X. Huang, Y. M. Xie : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 43, 1039-1049, 2007
- 12) Daiji Fujii, Ryo Okabe, Masatoshi Manabe : Topology optimization of 3D structures using CA-ESO Method and voxel finite element method, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 79, No. 703, pp. 1279-1286, 2014. 9 (in Japanese)
- 13) Y. M. Xie, G. P. Steven : Evolutionary Structural Optimization, Springer, 1997



# COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF CONTINUUM SHELL STRUCTURES USING IESO METHOD

*Koichi KAMIMURA*<sup>\*1</sup>, *Masatoshi MANABE*<sup>\*2</sup>, *Shinya MATSUMOTO*<sup>\*3</sup>  
*and Daiji FUJII*<sup>\*4</sup>

<sup>\*1</sup> Grad. Student, Graduate School of Systems Engineering, Kindai Univ.

<sup>\*2</sup> Staff member, Kimura Architects and Engineers Office, M.Eng.

<sup>\*3</sup> Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kindai Univ., Dr.Eng.

<sup>\*4</sup> Prof., Faculty of Engineering, Kindai Univ., Dr.Eng.

The appearance of a concrete shell structure has developed the construction of free curved shell structures as many attractive architectures. However, in design of such continuum shell structures, it is difficult to find an optimal structure analytically. Because, in the optimal analysis, shape, thickness and topology of shell structure become design variables simultaneously. Therefore, in this paper, a simple method to find an optimal shell structure is proposed. In this method, a rectangular fixed design domain with given boundary conditions and body forces is modeled by voxel mesh, and strain energies of elements (voxels) are obtained by voxel finite element method. Next, elements with small strain energy are gradually removed by the Improved ESO (IESO) method. Finally, we can obtain a shell structure that shape, thickness and topology are optimized. In this paper, several numerical examples will be shown in order to verify the effectiveness of the proposed method.

In the IESO method, the fixed design domain is divided in same eight-node rectangular elements (voxels), and in the optimization process, for solid element, it will be removed if the sensitivity number is less than the threshold value. This threshold value is obtained from the equation proposed in the extended ESO method<sup>2)</sup>. This equation consists of the mean value of sensitivity number and the average deviation of sensitivity number with a control parameter. In the proposed method, the evolutionary volume ratio (reduction ratio) is given as an input data, and this control parameter is determined automatically in the program to satisfy the given reduction ratio approximately.

In section 4, several numerical examples are shown to demonstrate the effectiveness of the proposed method. A basic numerical example shows that IESO can obtain a natural and simple topology. In addition, we analyze the case of giving vertical body force (gravity), analyze the case of giving the vertical gravity and vertical physical strength of 0.2 times the vertical weight in the vertical direction, and conduct the morphological creation corresponding to the seismic force. In next numerical examples, a cylindrical shell is created due to the setting of supported areas as parallel lines, and a spherical shell is created due to the setting of supported area as a circle. Therefore, various optimal shell structures can be generated by the IESO method. Moreover, it is shown that the complicated structure is created in application example. From these examples, it is concluded that the IESO method is a method that can be used to create a shell structure.

(2017年8月8日原稿受理, 2017年11月21日採用決定)

## 第2章

# グランドストラクチャ法を用いた 建築構造の形態創生

研究業績（論文）

## グラウンドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化

Topology optimization of frame structure using the ground structure approach

藤井大地<sup>\*1</sup>, 松本慎也<sup>\*2</sup>, 藤谷義信<sup>\*3</sup>, 菊池 昇<sup>\*4</sup>

Daiji FUJII, Shinya MATSUMOTO, Yoshinobu FUJITANI, Noboru KIKUCHI

In this paper, a topology optimization method of frame structure using the ground structure approach is shown. In this method, the finite element with the spring for bending in both edges, is used. By using this element, it is possible to analyze rigid frame, truss, and semi-rigid frame. In the ground structure approach for topology design, the problem which minimizes the compliance (maximizes the stiffness) for a given total mass of the structure is solved. In this paper, the SLP method with move limit is used to solve this optimization problem, and the method for removing the members which have relatively small cross section from the optimum solution is shown. The effectiveness of this method is demonstrated by some numerical examples.

**Keywords :** *ground structure approach, topology optimization, finite element method, frame structure, SLP method*

グラウンドストラクチャー法, 位相最適化, 有限要素法, 骨組構造, 逐次線形計画法

### 1. はじめに

近年, 構造物の最適な位相 (Topology) を求める様々な方法が提案されているが, 実際の設計ツールとしては, Bendsøe and Kikuchi<sup>1)</sup>, Suzuki and Kikuchi<sup>2)</sup>によって提案された均質化設計法か, この方法と同様に構造物の質量制約のもとでコンプライアンスを最小化 (剛性を最大化) するグラウンドストラクチャー法<sup>3,4)</sup>が, 実用化されつつある。均質化設計法は, 拡張された領域の材料のマイクロ構造を最適化することによって構造物の最適位相を求める方法であるのに対して, グラウンドストラクチャー法は, 拡張された領域に適当な数の節点を配置し, これらの節点間を可能な限りの要素で結んだグラウンドストラクチャーから, 要素断面積の最適化によって構造物の最適位相を見つけ出す方法である。グラウンドストラクチャー法では, 配置した節点に位相・形状が依存するため, 均質化設計法のような滑らかな位相・形状を得ることは難しいが, トラスや骨組構造の位相を求める場合は, 得られた位相をそのまま設計に利用できる利点がある。

以上の2つの方法以外にも, トラス構造の最適位相を求める方法として, 遺伝的アルゴリズムを用いる方法<sup>5)</sup>やセル・オートマトン法<sup>6,7)</sup>を用いる方法が研究されている。これらの方法では, 感度解析を必要としないため, 規格部材を配置して試行錯誤で最適な位相を求める実際の設計と適合しているという利点がある。しかしながら, これらの方法で最適解が得られるのは, 高々数十の設計変数の問題で, 数百, 数千の設計変数となる3次元大規模問題への適用は困難である。これに対して, グラウンドストラクチャー法では, 節点数が増えるにしたがって, グラウンドストラクチャーの要素数は非常に膨大になるが, コンプライアンスを目的関数にした場合, 要素断面積に関する感度が, その要素の剛性マトリックスの微分から求まるため, 感度解析が非常に容易であり, 計算効率も良い。したがって, この方法によれば3次元大規模問題の位相を求めることも可能である。

本論文では, 部材の最大断面積を設定し, 構造物の総質量制約のもとでコンプライアンスを最小化するグラウンド

\*1 広島大学工学部第四類建設構造工学 助手・博士 (工学)

\*2 広島大学大学院工学研究科構造工学専攻 大学院生・修士 (工学)

\*3 広島大学工学部第四類建設構造工学 教授・工学博士

\*4 The University of Michigan, 教授・PHD

Research Assoc., Dept. of Structural Engineering, Hiroshima Univ., Dr. Eng.

Graduate Student, Dept. of Structural Engineering, Hiroshima Univ., M. Eng.

Professor, Dept. of Structural Engineering, Hiroshima Univ., Dr. Eng.

Professor, Dept. of Mechanical Eng. and Applied Mech., PHD.

ストラクチャー法を示す。また、実際の設計に適用させるため、最適解がなるべく最大断面積の部材で構成されるように、連続体の位相最適化手法の一つである密度法<sup>3),9),10)</sup>で用いられている方法を適用する。この方法では、中間的な断面積を有する部材剛性にペナルティーが課せられ、最適解において中間的な太さをもつ部材や細い部材が除かれる。また、本論文では、この方法をトラス構造だけでなく、剛接骨組や半剛接骨組にも適用できるように、はり要素の両端に曲げバネを付加した要素を用いる。なお、すべての要素は、中実円断面とし、断面二次モーメントは断面積の関数として表す。最適化問題の解法としては、SLP法（逐次線形計画法）を用いる。SLP法は、OC法（最適性規準法）に比較して収束性が遅い等のデメリットがあるが、ロバスト性が高く一般のユーザーに扱いやすいため、ここではこの方法を採用した。SLP法における設計変数のムーブリミットの設定法としては、著者らが均質化設計法で提案した方法<sup>8)</sup>を用いる。

以下、本論文第2章では、グランドストラクチャーの解析に用いる有限要素の要素剛性マトリックスの導出を示す。第3章では、グランドストラクチャー法による位相最適化問題の定式化とSLP法による解法について示す。また、中間的な太さの部材剛性にペナルティーを課す方法、およびムーブリミットの設定法についても示す。第4章では、数値解析例を示し、均質化設計法による解との比較により、本方法の有効性を検討する。また、建築骨組、シェル構造への応用例を示し、建築構造物への適用を検討する。第5章では以上のまとめを述べる。

## 2. 要素剛性マトリックスの導出

グランドストラクチャーを構成する要素は、中実円断面のはり要素とし、図1に示すように、このはり要素の両端には接合部の剛性を評価するための曲げバネが付加されているものとする。

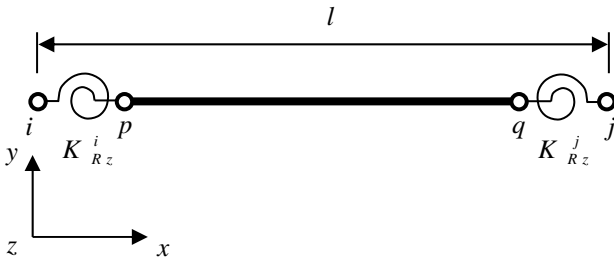


図1 材端に曲げバネを有するはり要素

はり要素のy方向の変位vをxに関する3次式で仮定すると、節点pq間のはり要素の剛性方程式は次式で表される<sup>11)</sup>。

$$\frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \\ 6l & 4l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \text{Sym.} \begin{bmatrix} v_p \\ \theta_{zp} \\ v_q \\ \theta_{zq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{yp} \\ M_{zp} \\ Q_{yq} \\ M_{zq} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 $v_p, \theta_{zp}, v_q, \theta_{zq}$  はp,q 節点のy方向変位とz軸まわりの回転角、 $Q_{yp}, M_{zp}, Q_{yq}, M_{zq}$  はp,q 節点の節点力、 $l$  は要素長さ（ただし、曲げバネの要素長さは0とする）、 $E$  はヤング係数、 $I_z$  はz軸まわりの断面二次モーメントである。ただし、z軸は紙面手前方向（直交右手座標系）に定義されているものとする。

一方、節点ip,qj間の曲げバネに関する剛性方程式は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} K_{Rz}^i & -K_{Rz}^i \\ -K_{Rz}^i & K_{Rz}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{zi} \\ M_{zp} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} K_{Rz}^j & -K_{Rz}^j \\ -K_{Rz}^j & K_{Rz}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zj} \\ \theta_{zq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{zj} \\ M_{zq} \end{bmatrix}$$

ここに、 $K_{Rz}^i, K_{Rz}^j$  は曲げバネの剛性である。

(1)式と(2)式を重ね合わせると、

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & K_{Rz}^i & -K_{Rz}^i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_z}{l^2} & -K_{Rz}^i & \frac{4EI_z}{l} + K_{Rz}^i & \frac{2EI_z}{l} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} & \frac{4EI_z}{l} + K_{Rz}^j & -\frac{6EI_z}{l^2} & -K_{Rz}^j \\ -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{Rz}^j & 0 & K_{Rz}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ \theta_{zp} \\ \theta_{zq} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{yi} \\ M_{zi} \\ 0 \\ 0 \\ Q_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} \quad (3)$$

ただし、要素内には外力がないものとする。上式の節点力が0となる行を取り出すと、

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{l} + K_{Rz}^i & \frac{2EI_z}{l} \\ \frac{2EI_z}{l} & \frac{4EI_z}{l} + K_{Rz}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zp} \\ \theta_{zq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI_z}{l^2} K_{Rz}^i & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} K_{Rz}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \end{bmatrix} \quad (4)$$

それ以外の行を取り出すと、

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & K_{Rz}^i & 0 & 0 \\ -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{Rz}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ -K_{Rz}^i & 0 \\ -\frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & -K_{Rz}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zp} \\ \theta_{zq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{yi} \\ M_{zi} \\ Q_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} \quad (5)$$

(4)式を解いて、(5)式に代入すれば、p,q 節点の自由度を縮約できる。

縮約を行う前に、曲げバネ剛性を次式のようにパラメータで表示する。

$$K_{Rz}^i = \frac{\lambda_z^i}{1 - \lambda_z^i} \frac{6EI_z}{l}, \quad K_{Rz}^j = \frac{\lambda_z^j}{1 - \lambda_z^j} \frac{6EI_z}{l} \quad (6)$$

上式を(4)式に代入して、解くと次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \theta_{zp} \\ \theta_{zq} \end{Bmatrix} = \frac{1}{t_{zD}} \begin{bmatrix} t_{z11} & t_{z12} & t_{z13} & t_{z14} \\ t_{z21} & t_{z22} & t_{z23} & t_{z24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここに、

$$\begin{aligned} t_{z11} &= \frac{(-1 + \lambda_z^i)(1 + 2\lambda_z^j)}{l}, & t_{z12} &= \lambda_z^i(2 + \lambda_z^j), \\ t_{z13} &= -t_{z11}, & t_{z14} &= (-1 + \lambda_z^i)\lambda_z^j, \\ t_{z21} &= \frac{(-1 + \lambda_z^j)(1 + 2\lambda_z^i)}{l}, & t_{z22} &= (-1 + \lambda_z^j)\lambda_z^i, \\ t_{z23} &= -t_{z21}, & t_{z24} &= \lambda_z^j(2 + \lambda_z^i), \\ t_{zD} &= 1 + \lambda_z^i + \lambda_z^j \end{aligned} \quad (8)$$

(6), (7)式を(5)式に代入すると次式の縮約された剛性方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} k_{z11} & & & \\ k_{z21} & k_{z22} & & \\ k_{z31} & k_{z32} & k_{z33} & \\ k_{z41} & k_{z42} & k_{z43} & k_{z44} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Sym.} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{yi} \\ M_{zi} \\ Q_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} k_{z11} &= \frac{6EI_z}{l^3} \frac{\lambda_z^i + \lambda_z^j + 4\lambda_z^i\lambda_z^j}{1 + \lambda_z^i + \lambda_z^j} \\ k_{z21} &= \frac{6EI_z}{l^2} \frac{\lambda_z^i(1 + 2\lambda_z^j)}{1 + \lambda_z^i + \lambda_z^j}, & k_{z22} &= \frac{6EI_z}{l} \frac{\lambda_z^i(1 + \lambda_z^j)}{1 + \lambda_z^i + \lambda_z^j} \\ k_{z31} &= -k_{z11}, & k_{z32} &= -k_{z21}, & k_{z33} &= k_{z11} \\ k_{z41} &= \frac{6EI_z}{l^2} \frac{\lambda_z^j(1 + 2\lambda_z^i)}{1 + \lambda_z^i + \lambda_z^j}, & k_{z42} &= \frac{6EI_z}{l} \frac{\lambda_z^j\lambda_z^i}{1 + \lambda_z^i + \lambda_z^j} \\ k_{z43} &= -k_{z41}, & k_{z44} &= \frac{6EI_z}{l} \frac{\lambda_z^j(1 + \lambda_z^i)}{1 + \lambda_z^i + \lambda_z^j} \end{aligned} \quad (10)$$

(9)式は、 $\lambda_z^i = \lambda_z^j = 1$  の場合(1)式と一致し、剛接の剛性方程式となる。また、 $\lambda_z^i = \lambda_z^j = 0$  の場合は、剛性マトリックスのすべての成分が 0 となる。

y 軸まわりの曲げ問題についても同様に導くことができ、(10)式の  $k_{zij}$  の z を y に換えた式を  $k_{yij}$  と表すと、y 軸まわりの縮約された剛性方程式は次式のように表される。

$$\begin{bmatrix} k_{y11} & & & \\ -k_{y21} & k_{y22} & & \\ k_{y31} & -k_{y32} & k_{y33} & \\ -k_{y41} & k_{y42} & -k_{y43} & k_{y44} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Sym.} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{zi} \\ M_{yi} \\ Q_{zj} \\ M_{yj} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ただし、 $w_i, w_j$  は z 軸方向のたわみ、 $\theta_{yi}, \theta_{yj}$  は y 軸まわりの回転角（右ねじ方向が正）を表す。

さらに、x 軸方向の変形と x 軸まわりのねじり変形を考慮すると、立体骨組の剛性マトリックスと節点変位ベクトルは次のようになる。

$$[k^L] = \begin{bmatrix} k_p & & & & & & & & & & & & \text{Sym.} \\ 0 & k_{z11} & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & k_{y11} & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & k_T & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -k_{y21} & 0 & k_{y22} & & & & & & & & \\ 0 & k_{z21} & 0 & 0 & 0 & k_{z22} & & & & & & & \\ -k_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_p & & & & & & \\ 0 & k_{z31} & 0 & 0 & 0 & k_{z32} & 0 & k_{z33} & & & & & \\ 0 & 0 & k_{y31} & 0 & -k_{y32} & 0 & 0 & 0 & k_{y33} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -k_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_T & & & \\ 0 & 0 & -k_{y41} & 0 & k_{y42} & 0 & 0 & 0 & -k_{y43} & 0 & k_{y44} & & \\ 0 & k_{z41} & 0 & 0 & 0 & k_{z42} & 0 & k_{z43} & 0 & 0 & 0 & k_{z44} \end{bmatrix}$$

$$[d^L]^T = \{u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ u_j \ v_j \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ \theta_{zj}\} \quad (12)$$

ここに、 $u_i, u_j$  は節点  $i, j$  の x 軸方向変位、 $\theta_{xi}, \theta_{xj}$  は x 軸まわりのねじり角である。また、 $k_p, k_T$  は、

$$k_p = \frac{EA}{l}, \quad k_T = \frac{GK}{l} \quad (13)$$

ただし、 $A$  は断面積、 $G$  はせん断弾性係数、 $K$  はサンプナンのねじり定数である。なお、トラスの解析では、 $\lambda_z^i = \lambda_z^j = \lambda_y^i = \lambda_y^j = 0$  とし、すべての回転自由度を拘束する。この場合、(12)式の剛性マトリックスでは、x 軸方向の剛性のみが残る。

(12)式は要素の座標系で定義されたものであるから、これを次式により全体座標系に変換する必要がある。

$$[k] = [T]^T [k^L] [T] \quad (14)$$

ここに、

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & & & \\ & [t] & & \\ & & [t] & \\ & & & [t] \end{bmatrix}, \quad [t] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

ただし、 $l_x, m_x, n_x$  は要素 x 軸の全体座標軸に対する方向余弦である。 $l_y, m_y, \dots, n_z$  についても同様。

(14)式を次章のグランドストラクチャーの解析に用いる有限要素とする。

### 3. グランドストラクチャー法による位相最適化

#### 3.1 最適化問題の定式化

グラウンドストラクチャーは、与えられた領域に適当な数の節点を配置し、この節点間を可能な限り多くの要素で連結した骨組（トラス）構造を意味する。例えば、図2(a)のような節点を与えた場合、図2(b)のようなグラウンドストラクチャーが得られる。ただし、ブレースの配置計画等では、すべての節点を連結する必要はなく、図2(c)のようなグラウンドストラクチャーにより解析を行うことも考えられる<sup>4)</sup>。

グラウンドストラクチャー法による位相最適化では、グラウンドストラクチャーの要素断面積を設計変数とした最適化問題を解くことにより最適な位相を求める。ここでは、グラウンドストラクチャーの要素断面を中実円断面としているので、断面積、断面二次モーメント、サンプナンねじり定数は次式となる。

$$A = \frac{\pi D^2}{4}, \quad I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{A^2}{4\pi}, \quad K = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{A^2}{2\pi} \quad (16)$$

ただし、 $D$ は円断面の直径である。

本論文では、要素の断面積を直接設計変数とするのではなく、要素断面積に最大値を設定し、次式のように置くことにより、

$$A_i = (1 - \alpha_i) A_{\max}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

$\alpha_i$ を位相最適化問題の設計変数とする。ただし、 $N$ はグラウンドストラクチャーの要素数、 $A_{\max}$ は最大断面積、 $A_i$ は $i$ 番目要素の断面積である。

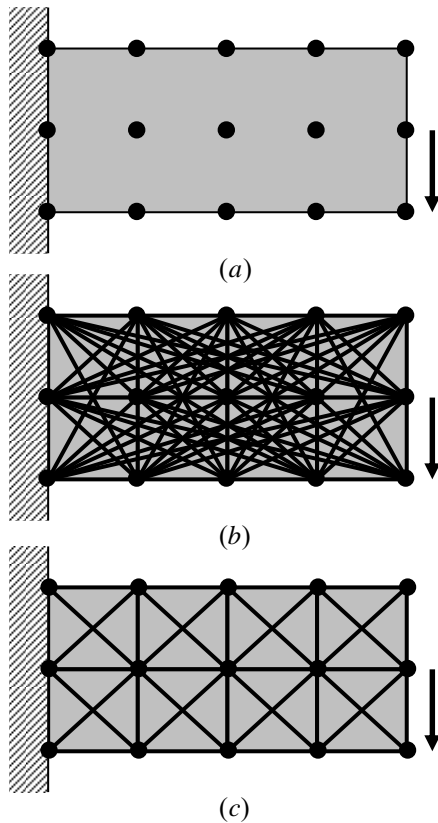


図2 グラウンドストラクチャー

位相最適化問題の目的は、平均コンプライアンス（外力のなす仕事量）の最小化（剛性の最大化）とし、構造物の体積制約（総質量一定）を課すものとする。以上の問題を定式化すると次式ようになる。

$$\begin{aligned} \min_{\{\alpha\}} & C(\{\alpha\}) = \{U\}^T \{F\} \\ \text{subject to:} & \\ & [K(\{\alpha\})] \{U\} = \{F\} \\ & V = \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) A_{\max} l_i \leq \bar{V} \\ & 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 $C$ は平均コンプライアンス、 $\{U\}$ は節点変位ベクトル、 $\{F\}$ は外力ベクトル、 $[K]$ は全体剛性マトリックス、 $V$ は体積、 $\bar{V}$ は体積制約値である。

### 3.2 SLP 法による解析法

(18)式の問題を SLP 法によって解く。(18)式の目的関数と制約条件を、既知量 $\{\alpha^k\}$ のまわりでテーラー展開し、線形項のみをとると、

$$\begin{aligned} \min_{\{\alpha\}} & C(\{\alpha\}) \approx C(\{\alpha^k\}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i \\ \text{subject to:} & \\ & V(\{\alpha\}) \approx V(\{\alpha^k\}) - \sum_{i=1}^N A_{\max} l_i \Delta \alpha_i \leq \bar{V} \\ & 0 \leq \alpha_i + \Delta \alpha_i \leq 1, \quad -\varepsilon \leq \Delta \alpha_i \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、 $[K]\{U\} = \{F\}$ より、

$$\frac{\partial [K]}{\partial \alpha_i} \{U\} + [K] \frac{\partial \{U\}}{\partial \alpha_i} = \{0\} \quad (20)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} &= \{U\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \alpha_i} \{U\} + 2\{U\}^T [K] \frac{\partial \{U\}}{\partial \alpha_i} \\ &= -\{U\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \alpha_i} \{U\} = -\{d^i\} \frac{\partial [k^i]}{\partial \alpha_i} \{d^i\} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、 $[k^i]$ 、 $\{d^i\}$ は $i$ 番目要素の剛性マトリックスと節点変位ベクトルである。このようにコンプライアンスを目的関数にすると、感度計算を要素レベルで行えるため計算効率上非常に有利である。

(19)式は、次式のように設計変数の増分量を求める線形計画問題になる。

$$\begin{aligned} \min_{\{\alpha\}} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i \\ \text{subject to:} & \\ & -\sum_{i=1}^N A_{\max} l_i \Delta \alpha_i \leq \bar{V} - V(\{\alpha^k\}) \\ & -\alpha_i \leq \Delta \alpha_i \leq 1 - \alpha_i, \quad -\varepsilon \leq \Delta \alpha_i \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (22)$$

(22)式の問題はシンプレックス法により解ける。(22)式の計算を、得られた最適解を用いて  $\{\alpha^{k+1}\} = \{\alpha^k\} + \{\Delta\alpha\}$  として更新しつつ、 $\Delta\alpha_i (i=1, \dots, N)$  が、すべて十分小さくなるまで繰り返し行う。

### 3.3 ムーブリミットの設定と体積制約の緩和

(22)式の  $\varepsilon$  は設計変数の増分量の上下限值を設定するものでムーブリミットと呼ばれる。SLP 法では、このムーブリミットの設定が重要となる。ここでは、著者らが文献 8) に示した方法を用いる。この方法では、設計変数のムーブリミットを次式のように設定する。

$$-\alpha_i \bar{\varepsilon} \leq \Delta\alpha_i \leq \alpha_i \bar{\varepsilon} \quad (23)$$

ただし、 $\bar{\varepsilon}$  は定数である。(23)式は、 $\alpha_i$  が 0 に近づくにしたがって、ムーブリミットを小さくする設定である。さらに、次式の変数変換を行う。

$$\Delta\tilde{\alpha}_i = \frac{\Delta\alpha_i}{\alpha_i} + \bar{\varepsilon}, \quad 0 \leq \Delta\tilde{\alpha}_i \leq 2\bar{\varepsilon} \quad (24)$$

ここで、 $\bar{\varepsilon}$  は、初期値を 0.5 とし、30 ステップまでは  $\bar{\varepsilon}/1.05^n$  ( $n$ : ステップ数)、30 ステップ以上では  $\bar{\varepsilon}/1.05^{30}/1.1^{n-30}$  で絞り込みを行う。そして、 $\Delta\alpha_i (i=1, \dots, N)$  が 1/400 以下となった場合に収束と見なす。

最適解への収束を促すもう一つの有効な方法として、繰り返し計算初期の段階における制約条件を緩和する<sup>9)</sup>。この方法では、体積制約値を次式のようにおく。

$$\bar{V} = \bar{V}^* \left[ 1 + 2 \left( 1 - \frac{n-1}{n_s} \right) \right] \quad \text{and} \quad \bar{V} \geq \bar{V}^* \quad (25)$$

ここに、 $\bar{V}$  は緩和された体積制約値、 $\bar{V}^*$  は与えられた体積制約値、 $n$  は最適化のステップ数、 $n_s$  は緩和を行う最終ステップ数である。本論文では、 $n_s = 10$  とする。

### 3.4 中間的な太さの部材剛性へのペナルティー

グランドストラクチャー法は、要素の断面積を連続的に増減させて最適位相を求めるもので、問題によっては最適解に実際には使用できないような中間的な太さの要素が多く残る場合がある。そこで、本論文では、連続体の位相最適化手法の一つである密度法<sup>3),9),10)</sup>で用いられている方法を利用して、中間的な太さの部材剛性にペナルティーを課す。すなわち、コンプライアンス計算に用いる断面積を次式で評価する。

$$A_i = (1 - \alpha_i)^p A_{\max}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (26)$$

ここに、 $p$  はべき乗であり、 $p$  が 1 以上になると中間的な太さの部材剛性がより低く評価される。ただし、体積計算には  $p$  を用いない。

(26)式の設定により、各断面定数の感度は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{dA_i}{d\alpha_i} &= p(1 - \alpha_i)^{p-1} A_{\max} \\ \frac{dI_y}{d\alpha_i} &= \frac{dI_z}{d\alpha_i} = \frac{A_i}{2\pi} \frac{dA_i}{d\alpha_i}, \quad \frac{dK}{d\alpha_i} = \frac{A_i}{\pi} \frac{dA_i}{d\alpha_i} \end{aligned} \quad (27)$$

以上を用いて(20)式の感度計算を行う。

## 4. 数値解析例

### 4.1 均質化設計法による解との比較

以上に示した方法の有効性を確かめるために、まず、連続体の位相最適化手法である均質化設計法による解との比較を行う。均質化設計法の解としては、著者らが開発した SLP 法を用いた均質化設計法<sup>8)</sup>の解析結果を用いる。要素間の接合条件はピン接合とし、(10)式の  $\lambda'_z, \lambda''_z$  等はすべて 0 とする。また、回転の自由度は除く。

設計変数の初期値は、全要素で同じ値 ( $\alpha^0$ ) とし、次式で与えるものとする。

$$\alpha^0 = 1 - \left( L / \sum_{i=1}^N l_i \right) \cdot r \quad (28)$$

ここに、 $l_i$  は  $i$  番目要素の長さ、 $L$  は解析領域の周辺長さの 1/2、 $r$  は倍率である。また、要素の初期断面積はすべて  $(1 - \alpha^0) A_{\max}$  とし、体積の制約値は次式で与える。

$$\bar{V}^* = \sum_{i=1}^N (1 - \alpha^0) A_{\max} l_i \quad (29)$$

以上の設定は、最適解において、 $A_{\max}$  の断面積をもつ要素の総長さが  $rL$  程度になるという設定である。したがって、 $r$  を大きくすれば複雑な位相となり、 $r$  を小さくすれば単純な位相となる。

グランドストラクチャーの作り方としては、節点間のすべての可能な連結を考え、ただし、重なる要素に関しては、要素長さの短い方を優先的に残す方法で作成する。なお、グランドストラクチャーには様々なものが考えられ、建築構造物等では、最小要素長さを定めて、それ以上長い要素は最初から除くことも考えられる。

最初の例題として、図 4 に示す片持平板の位相最適化問題を解く。解析は対称性を利用して 1/2 領域で行い、節点数は 102 とした。(26)式の  $p$  は 1.2、(28)式の  $L$  は 21cm、 $r$  は 5 とした。図 5(a) は本解析結果を示したものである。また、図 5(b) は、比較のため均質化設計法の解析結果<sup>8)</sup>を示したものである。図より、グランドストラクチャー法の結果は、均質化設計法の結果によく似た位相となっていることがわかる。

次に、図 6 に示す MBB と呼ばれる梁の解析を行う。解析は対称性を利用して 1/2 領域で行い、節点数は 96 とした。(26)式の  $p$  は 1.15、(28)式の  $L$  は 100cm、 $r$  は 7 とした。

図 7(a)は本解析結果を、(b)は均質化設計法による結果を示している。図より、この場合もグランドストラクチャー法の結果は、均質化設計法の結果によく似た位相となっていることがわかる。

以上の2例の解析結果により、本論文で開発したプログラムが有効であることが確かめられた。なお、以上の2例では、均質化設計法では1点集中荷重ではなく3点での荷重となっていることや、図6の境界条件も若干異なっていることを付記しておく。



(a) グランドストラクチャー法による解



(b) 均質化設計法による解<sup>8)</sup>

図7 解析結果の比較

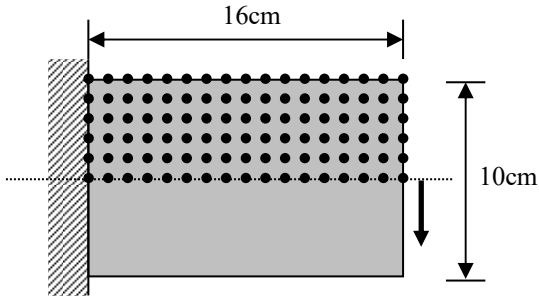
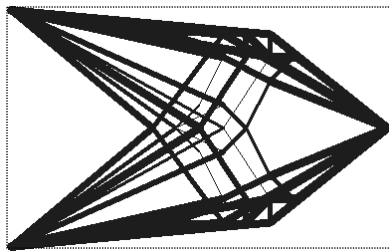
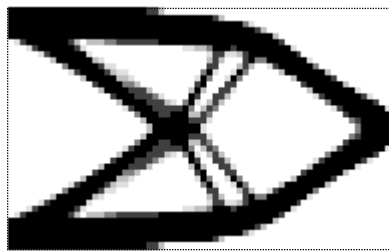


図4 解析モデルと節点配置



(a) グランドストラクチャー法による解



(b) 均質化設計法による解<sup>8)</sup>

図5 解析結果の比較

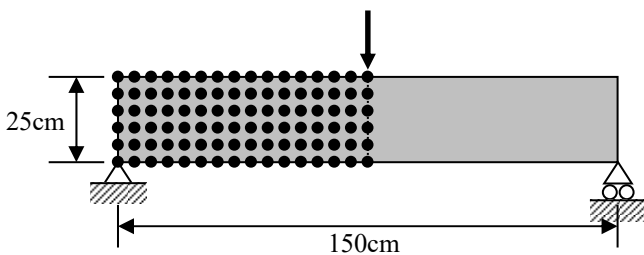


図6 MBB梁の解析モデルと節点配置

#### 4.2 骨組構造の位相最適化

次に建築物を想定したグランドストラクチャーの位相最適化解析例を示す。

図8はスパン長6m、階高4mの6スパン10層の建物構面を想定したグランドストラクチャーである。ここでは、水平、鉛直方向の要素は両端剛接とし、斜材はピン接合または半剛接とする。荷重は、 $A_i$ 分布の水平力を各層の節点に均等に加える。なお、鉛直荷重を加えると位相が非対称となるため、荷重は水平力のみとした。解析は対称性を利用して1/2領域で行い、(26)式の $p$ は1.2、(28)式の $L$ は58m、 $r$ は5とした。

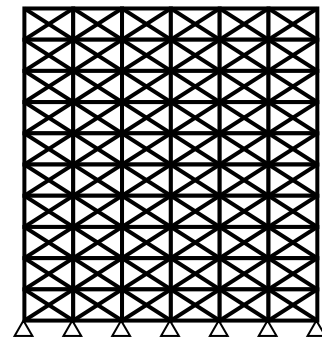


図8 建物構面を想定したグランドストラクチャー

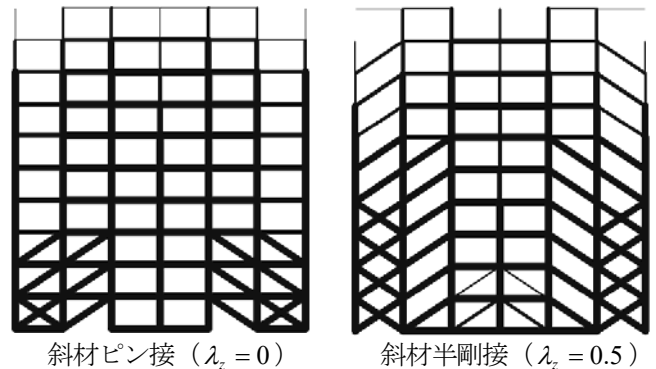


図9 解析結果

図9は斜材の接合をピン接合( $\lambda_2 = 0$ )にした場合と半剛接合( $\lambda_2 = 0.5$ )にした場合の結果である。図より、斜



材がピン接合の場合は、斜材はあまり用いられないが、斜材の接合部が剛性をもつと斜材がかなり用いられることがわかる。

図 10 は、同じ荷重・境界条件で、すべての要素を用いたグランドストラクチャーにより最適位相を求めた結果である。ただし、この場合は、斜材はすべてピン接合とし、(26)式の  $p$  は 1.1,  $r$  は 6 とした。このような位相は建築のデザインコンセプトにも利用できると思われる。

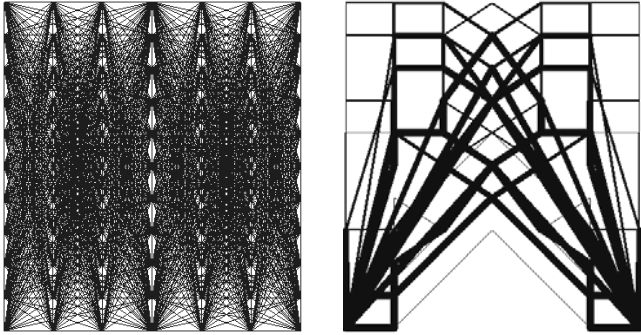


図 10 グランドストラクチャーと解析結果

### 4.3 シェル構造の位相最適化

3次元問題の例題として、図 11 に示す矩形格子シェルのグランドストラクチャーの解析を行う。境界平面の一边の長さは 30m, 解析は対称性を利用して 1/4 領域で行う。また、各節点の高さ座標は次式によって定める<sup>12)</sup>。

$$z = \frac{6}{a^4}(x^2 - a^2)(y^2 - a^2), \quad a = 15 \quad (30)$$

要素の接合は、 $x, y$  軸に平行な要素は剛接, 斜材はピン接, または半剛接とした。荷重は、全節点に鉛直下方の均等荷重を加えた。境界条件は、周辺固定支持とした。(26)式の  $p$  は 1.1, (28)式の  $L$  は 36m,  $r$  は 7 とした。

図 12(a),(b)は、それぞれ斜材の接合をピン接合にした場合と、半剛接合にした場合の結果を示している。斜材の接合形式が半剛接になると、ピン接に比較して位相が変化することがわかる。このような位相は、補強計画、ブレースの配置計画等に利用できると考えられる。

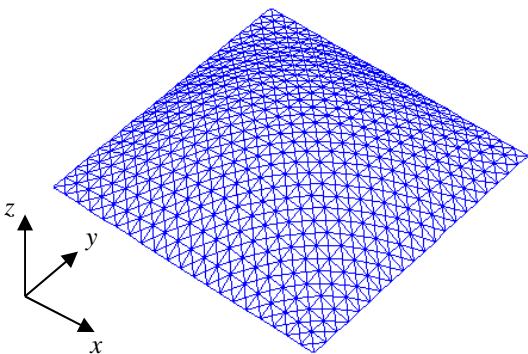
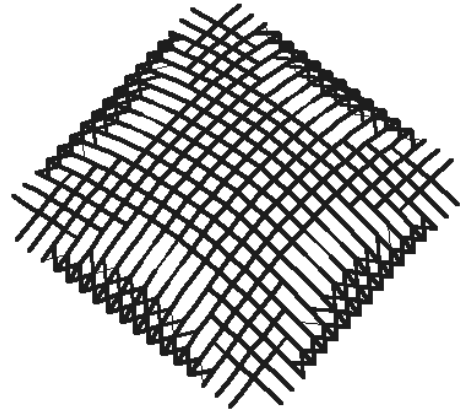
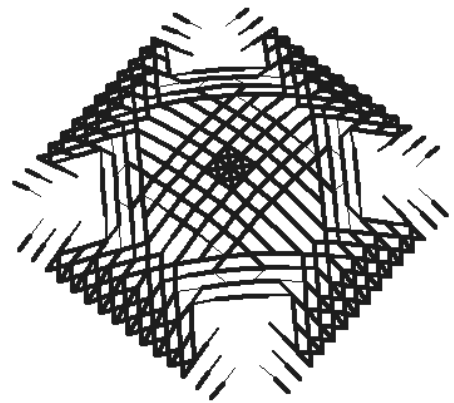


図 11 矩形シェルのグランドストラクチャー



(a) 斜材をピン接合にした場合の結果



(a) 斜材を半剛接合 ( $\lambda_y = \lambda_z = 0.5$ ) にした場合の結果

図 12 解析結果

## 5. まとめ

本論文では、質量制約のもとでコンプライアンスを最小化するグランドストラクチャー法を用いた骨組構造物の位相最適化法を示した。本方法の特徴は、要素間の接合形式をピン接合だけでなく、剛接, あるいは半剛接合として扱える点にある。また、最適化問題の解法としては SLP 法を用い、ムーブリミットの設定法, および制約条件の緩和により最適解への収束を促す方法を示した。さらに、最適解に実際には使用しないような細い部材が多く残らないように、中間的太さの部材剛性にペナルティーを課す方法を示した。

まず、本方法の有効性を、均質化設計法による解との比較により検討した。その結果、本解析結果は、均質化設計法による解とほぼ同様の位相が得られ、本方法の有効性が確かめられた。

次に、建築骨組への適用例として、6 スパン 10 層建物構面の位相最適化を行った。この例題では、柱, 梁は剛接とし、斜材をピン接, あるいは半剛接に設定して解析した。その結果、斜材を半剛接とすると、最適位相により多くの斜材が使われることがわかった。また、通常のグランドス

トラクチャー（ただし、鉛直部材と水平部材は剛接、斜材はピン接）を用いた位相最適化も行い、その結果からデザインコンセプト等への利用の可能性が示された。

3次元構造物への適用例として、矩形シェル構造の解析を行った。この場合も直交部材は剛接とし、斜材はピン接または半剛接とした。解析結果より、斜材を半剛接にすると、位相がかなり変化することがわかった。また、位相も明確なものが得られ、本方法が構造物の補強計画あるいはブレースの配置計画等に利用できることが確かめられた。

また、本論文の解析例の計算時間は、プロセッサが Pentium 233MHz の通常のパソコンで、最長 2 分 20 秒 (図 4, 102 節点の場合) であった。したがって、本方法では、かなり大規模の問題まで解析が可能であると考えられる。

**謝辞** 本研究を遂行するにあたり、広島大学大学院生の池田泰隆君にデータ整理を手伝って頂いた。ここに記して、謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi : Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 2) K. Suzuki and N. Kikuchi : A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 3) M. Zhou and G.I.N. Rozvany : The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.89, pp.309-336, 1991
- 4) M. P. Bendsøe : *Optimization of structural topology, shape and material*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, pp.139-180, 1995
- 5) 大森博司, 鬼頭伸彰 : 遺伝的アルゴリズムを用いたトラス構造の形態創出, *日本建築学会構造系論文集*, 第 520 号, pp.85-92, 1999
- 6) 伊能教夫, 小林弘樹, 下平真子 : 力学構造を自己組織化するセル・オートマトン (ローカルルールによって生じるシステム全体の挙動), *日本機械学会論文集 (A 編)*, Vol.61, No.586, pp.1416-1422 (272-278), 1995
- 7) 豊田哲也, 北栄輔, 磯村忠 : ローカル・ルールを用いたトラス構造の最適化について, *計算工学講演会論文集*, Vol.4, pp.483-484, 1999
- 8) 藤井大地, 菊池昇 : SLP 法を用いた位相最適化における数値的不安定の改善, *日本建築学会構造系論文集*, No.521, pp.65-72, 1999
- 9) M. P. Bendsøe : Optimal Shape Design as Material Distribution Problem, *Structural Optimization*, Vol.1, pp.193-202, 1989
- 10) R. J. Yang and C. H. Chuang : Optimal topology design using linear programming, *Computers & Structures*, Vol. 52, No.2, pp.265-275, 1994
- 11) 藤谷義信 : 薄肉はり構造解析, 第 3 章, pp.57-79, 培風館, 1990
- 12) 大森博司, 山本憲司 : 応力分布を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究, その 2 スペースフレームへの適用, *日本建築学会構造系論文集*, 第 503 号, pp.77-83, 1998

## 最適化手法 CONLIN を用いた骨組構造の位相最適化

### TOPOLOGY OPTIMIZATION OF FRAME STRUCTURES USING CONLIN OPTIMIZER

藤井大地\*, 鈴木克幸\*\*, 大坪英臣\*\*\*

*Daiji FUJII, Katsuyuki SUZUKI and Hideomi OHTSUBO*

The Convex Linearization method (CONLIN), that is a dual optimizer based on the convex approximation concepts, is often used to solve the structural optimization problem, recently. The CONLIN optimizer has many benefits, for example, the handling of constraint conditions is easy as well as the SLP method, and the performance of convergence is excellent as well as the optimality criteria method (OC). In this paper, the CONLIN optimizer is applied to the topology optimization problem of frame structures in order to investigate the performance of this optimizer in the topology optimization analysis. The ground structure method is used to obtain the optimum topology of frame structures. The characteristics of the CONLIN optimizer are clarified by comparing with the SLP method and OC method. Several examples are shown to demonstrate the effectiveness of the CONLIN optimizer for the topology optimization analysis.

**Keywords:** CONLIN, Dual method, Topology optimization, Ground structure method, Optimality criteria method, SLP

凸線形化法, 双対法, 位相最適化, グランドストラクチャー法, 最適性規準法, 逐次線形計画法

#### 1. はじめに

構造物の位相最適化問題の解法としては、これまで最適性規準法 (OC 法) や逐次線形計画法 (SLP 法) などが多く用いられてきたが<sup>1)~8)</sup>, 最近、最適化問題の解法として、CONLIN と呼ばれる最適化手法が注目されている。CONLIN は、1986 年に Fleury and Braibant<sup>9)</sup>によって提案された方法で、局所的に凸関数条件を満足させるために、目的関数および制約条件を、既知の設計変数の近傍で、感度係数が正であれば設計変数で、感度係数が負であれば設計変数の逆数でテーラー展開して解く方法である。また、本方法では、制約条件にラグランジェ乗数を掛けて目的関数に加えるラグランジェ関数を定義し、ラグランジェ未定乗数を設計変数とする双対問題を解くことにより計算効率の改善を図っている。その後、Fleury<sup>10)</sup>は、この方法をさらに発展させ、よりロバスト性の高いものに改良している。また、この方法は、Beckers<sup>11),12)</sup>によって、グランドストラクチャー法によるトラス構造の位相最適化や、離散最適化問題として定式化された連続体の位相最適化に適用されている。しかしながら、これらの論文では、従来の OC 法や SLP 法との比較が行われていないため、CONLIN が従来の方法と比較して、どの程度優れた方法であるかが明確でない。

そこで、本論文では、位相最適化問題における CONLIN の性能評価を行うために、骨組構造 (トラス構造を含む) の位相最適化

問題を対象として、CONLIN と従来の OC 法および SLP 法との比較を行う。なお、位相最適化問題として、骨組構造の位相最適化を選択するのは、連続体に比較して骨組構造の解析理論は簡単で、追試しやすいからである。また、トラス構造だけでなく骨組構造を対象としたのは、より非線形性の強い最適化問題に対する性能を評価するためである。

トラス・骨組構造の最適位相は、一般に与えられた設計領域に適当に節点を配置し、これらの節点間を可能性のあるすべての部材で連結したグランドストラクチャーから不必要な部材を除いていくことによって求められる。この問題は、本来、離散最適化問題であるため、GA 等のヒューリスティックな方法で解かれる場合もあるが<sup>13)~18)</sup>, 要素数の多い問題では、各部材の断面積を設計変数とし、部材の総体積を制約条件として構造物の剛性を最大化する最適化問題として解く方法が一般的である<sup>3),19)~21)</sup>。著者ら<sup>22)</sup>も、後者の方法で、トラス構造だけでなく、接合部の剛性をピン接から剛接まで任意の剛性として扱える半剛接骨組の位相最適化問題を SLP 法によって解く方法を示している。

本論文では、文献 10)を参考にして、CONLIN のプログラムを作成し、文献 22)に示した骨組構造の位相最適化手法に適用する。そして、文献 22)に用いている SLP 法および文献 8)に示した最適性規準法を適用したプログラムも同時に作成し、CONLIN を適用し

\* 東京大学工学系研究科 助手・博士(工学)

\*\* 東京大学新領域創成科学研究科 助教授・Ph. D.

\*\*\* 東京大学工学系研究科 教授・工博

Research Assoc., Graduate School of Engineering, The University of Tokyo, Dr. Eng.

Assoc. Prof., Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo, Ph. D. Prof., Graduate School of Engineering, The University of Tokyo, Dr. Eng.

た場合との比較検討を行う。

以下、本論文第2章では、最適化手法 CONLIN の理論の概要を示す。第3章では、グランドストラクチャー法による骨組構造の位相最適化手法について概説し、CONLIN, SLP, OC 法による解法について述べる。第4章では、トラスおよび骨組構造の例題により、CONLIN の性能を評価する。最終第5章では、第4章で得られた知見をまとめて結論を導く。

## 2. CONLIN による最適化問題の解法

ここでは、文献10)に示される定式化をフォローし、著者らがプログラムの開発に実際に用いた定式化を示している。諸式は、文献10)にしたがっているが、理解しやすいように補足し、誤りと思われる式を修正している。また、2.3節に示す解法は、増分を用いている点で文献10)とは若干異なる。

### 2.1 CONLIN による最適化問題の定式化

一般的な最適化問題を次式で表す。

$$\begin{aligned} \min \quad & c_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & c_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (j=1, \dots, m) \\ & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  は設計変数、 $c_0(\mathbf{x})$  は目的関数、 $c_j(\mathbf{x})$  ( $j \geq 1$ ) は制約条件、 $\underline{x}_i, \bar{x}_i$  は設計変数  $x_i$  の下限値と上限値を表す。ただし、ここでは、 $\underline{x}_i \geq 0$  とする。

Fleury<sup>9),10)</sup>の提案している方法は、(1)式の目的関数および制約条件を次式のように設計変数  $\mathbf{x}^k$  点に関して Taylor 展開する。

$$\begin{aligned} c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{x}^k) &+ \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_i} > 0} \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_i} (x_i - x_i^k) \\ &- \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_i} < 0} (x_i^k)^2 \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_i} \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^k} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $j=0,1,\dots,m$  であり、右辺第2項は  $x_i$  に関する Taylor 展開の1次項、第3項は  $1/x_i$  に関する Taylor 展開の1次項である。

さらに、数値計算誤差を小さくするために、(2)式の設計変数を次式のようなスケールをかける。

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{x_i^k} \Rightarrow \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_i} = \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} \frac{1}{x_i^k} \quad (3)$$

(3)式の関係を(2)式に代入すると、

$$c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{x}^k) + \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} > 0} \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} (\tilde{x}_i - 1) - \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} < 0} \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} \left( \frac{1}{\tilde{x}_i} - 1 \right) \quad (4)$$

(4)式を用いて(1)式を書き直すと、

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\frac{\partial c_0(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} > 0} \frac{\partial c_0(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} \tilde{x}_i - \sum_{\frac{\partial c_0(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} < 0} \frac{\partial c_0(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} \frac{1}{\tilde{x}_i} - \bar{c}_0 \\ \text{subject to} \quad & \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} > 0} \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} \tilde{x}_i - \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} < 0} \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} \frac{1}{\tilde{x}_i} \leq \bar{c}_j \quad (j=1, \dots, m) \\ & \frac{\underline{x}_i}{x_i^k} \leq \tilde{x}_i \leq \frac{\bar{x}_i}{x_i^k} \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{c}_j &= -c_j(\mathbf{x}^k) + \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} > 0} \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} - \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} < 0} \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} \\ &= \sum_i \left| \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial \tilde{x}_i} \right| x_i^k - c_j(\mathbf{x}^k) \quad (j=0, \dots, m) \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.2 双対法 (Dual method) の適用

(5)式を簡単のため次式のように表しておく。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_+ \frac{\partial c_0}{\partial x_i} x_i - \sum_- \frac{\partial c_0}{\partial x_i} \frac{1}{x_i} - \bar{c}_0 \\ \text{subject to} \quad & \sum_+ \frac{\partial c_j}{\partial x_i} x_i - \sum_- \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{1}{x_i} - \bar{c}_j \leq 0 \quad (j=1, \dots, m) \\ & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式はラグランジェ双対定理<sup>23),24)</sup>により、次のような問題に置き換えることができる。

$$\begin{aligned} \max \quad & l(\mathbf{r}) \\ \text{subject to} \quad & r_j \geq 0 \quad (j=0, \dots, m) \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、

$$l(\mathbf{r}) = \min_{\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} L(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \quad (9)$$

ただし、

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \sum_{j=0}^m r_j \left( \sum_+ \frac{\partial c_j}{\partial x_i} x_i - \sum_- \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{1}{x_i} - \bar{c}_j \right) \quad (10)$$

ここで、 $r_j$  はラグランジェ乗数で、目的関数にはラグランジェ乗数はかからないので、 $r_0=1$  である。したがって、(7)式は、(8)式と(9)式の2つ問題として解くことができる。

まず、(9)式は、変数  $x_i$  に関する最適化問題であるが、これは  $n$  個の個別の問題として解くことができる。すなわち、(9)式は次のように書ける。

$$l(\mathbf{r}) = \min_{\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} \left[ \sum_{i=1}^n L_i(x_i, \mathbf{r}) - \bar{c}^r(\mathbf{r}) \right] \quad (11)$$

ここに、

$$L_i(x_i, \mathbf{r}) = \sum_{j=0}^m r_j \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)_+ x_i - \sum_{j=0}^m r_j \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)_- \frac{1}{x_i}, \quad \bar{c}^r(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^m r_j \bar{c}_j \quad (12)$$

ただし、 $(\ )_+, (\ )_-$  は、括弧内が+または-の場合のみ採用されることを意味する。したがって、(11)式は次のような最適化問題となる。

$$\begin{aligned} \min \quad & L_i(x_i) = a_i x_i + \frac{b_i}{x_i} \\ \text{subject to} \quad & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、

$$a_i = \sum_{j=0}^m r_j \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)_+ \geq 0, \quad b_i = -\sum_{j=0}^m r_j \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)_- \geq 0 \quad (14)$$

したがって、(13)式の解は次式から求まる。

$$\frac{\partial L_i(x_i)}{\partial x_i} = a_i - \frac{b_i}{x_i^2} = 0 \quad (15)$$

すなわち、

$$x_i = \left( \frac{b_i}{a_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{if } \underline{x}_i^2 \leq \frac{b_i}{a_i} \leq \bar{x}_i^2 \quad (16)$$

$$x_i = \underline{x}_i \quad \text{if} \quad \frac{b_i}{a_i} \leq \underline{x}_i^2 \quad (17)$$

$$x_i = \bar{x}_i \quad \text{if} \quad \bar{x}_i^2 \leq \frac{b_i}{a_i} \quad (18)$$

ただし、 $a_i = 0$  の場合は、 $b_i > 0$  ならば  $x_i = \bar{x}_i$ 、 $b_i = 0$  ならば  $x_i = \underline{x}_i$  とする。

(16)~(18)式によって、 $x_i$  は  $\mathbf{r}$  の関数として表せたことになる。したがって、(16)~(18)式の解を用いて、(8)式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \max \quad & l(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^m r_j \left( \sum_{+} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} x_i(\mathbf{r}) - \sum_{-} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{1}{x_i(\mathbf{r})} - \bar{c}_j \right) \\ \text{subject to} \quad & r_j \geq 0 \quad (j=0, \dots, m) \end{aligned} \quad (19)$$

(19)式の問題を逐次2次計画法で解く。逐次2次計画法では、設計変数に関する1階微分と2階微分が必要となるが、まず、(19)式の目的関数  $l$  の  $r_j$  に関する1階微分は次式となる。

$$g_j = \frac{dl(\mathbf{r})}{dr_j} = \sum_{+} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} x_i - \sum_{-} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{1}{x_i} - \bar{c}_j \quad (20)$$

ただし  $j \geq 1$ 。また、2階微分は次式となる。

$$H_{jk} = \frac{d^2 l}{dr_j dr_k} = \frac{dg_j}{dr_k} = \sum_{+} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dr_k} + \sum_{-} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{1}{x_i^2} \frac{dx_i}{dr_k} \quad (21)$$

ただし  $k \geq 1$ 。ここで、(16)~(18)式により、

$$\frac{dx_i}{dr_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{b_i}{a_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{a_i \frac{db_i}{dr_k} - b_i \frac{da_i}{dr_k}}{a_i^2} \right) = \frac{db_i}{dr_k} - x_i^2 \frac{da_i}{dr_k} \quad \text{if} \quad \underline{x}_i^2 < \frac{b_i}{a_i} < \bar{x}_i^2 \quad (22)$$

$$\frac{dx_i}{dr_k} = 0 \quad \text{if} \quad \frac{b_i}{a_i} \leq \underline{x}_i^2 \quad (23)$$

$$\frac{dx_i}{dr_k} = 0 \quad \text{if} \quad \bar{x}_i^2 \leq \frac{b_i}{a_i} \quad (24)$$

また、(14)式より、

$$\frac{da_i}{dr_k} = \left( \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \right)_{+}, \quad \frac{db_i}{dr_k} = - \left( \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \right)_{-} \quad (25)$$

であるから、(22)式は、

$$\frac{dx_i}{dr_k} = - \frac{x_i}{2a_i} \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \quad \text{if} \quad \frac{\partial c_k}{\partial x_i} > 0 \quad (26)$$

$$\frac{dx_i}{dr_k} = - \frac{1}{2x_i a_i} \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \quad \text{if} \quad \frac{\partial c_k}{\partial x_i} < 0 \quad (27)$$

(26),(27)式を(21)式に代入すると、最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} H_{jk} &= - \frac{1}{2} \left( \sum_{+} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \frac{x_i}{a_i} + \sum_{-} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \frac{1}{x_i a_i} \right) \quad \text{if} \quad \frac{\partial c_k}{\partial x_i} > 0, \quad \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \\ H_{jk} &= - \frac{1}{2} \left( \sum_{+} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \frac{1}{x_i a_i} + \sum_{-} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \frac{1}{x_i^3 a_i} \right) \quad \text{if} \quad \frac{\partial c_k}{\partial x_i} < 0, \quad \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \end{aligned} \quad (28),(29)$$

### 2.3 逐次2次計画法による解法

(19)式を逐次2次計画法で解くことを考える。まず、設計変数  $r_j$  の更新式を次式のように置く。

$$r_j^{k+1} = r_j^k + \Delta r_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (30)$$

(19)式の  $l(\mathbf{r})$  を  $r_j^k$  に関してテーラー展開し2次項まで採用すると、

$$l(\mathbf{r}^{k+1}) = l(\mathbf{r}^k) + \sum_{j=1}^m g_j \Delta r_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m H_{jk} \Delta r_j \Delta r_k \quad (31)$$

(31)式をベクトル・マトリックス表示すると、

$$l(\mathbf{r}^{k+1}) = l(\mathbf{r}^k) + \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{g} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{r} \quad (32)$$

したがって、(19)式は次式の問題を逐次解くことになる。

$$\begin{aligned} \max \quad & q(\Delta \mathbf{r}) = \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{g} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{r} \\ \text{subject to} \quad & r_j^k + \Delta r_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (33)$$

(28),(29)式より、 $H_{jj}$  は常に負になるため、(33)式の極大値では次式が満足される。

$$\frac{dq(\Delta \mathbf{r})}{d\Delta \mathbf{r}} = \mathbf{g} + \mathbf{H} \Delta \mathbf{r} = 0 \quad (34)$$

したがって、次式の連立方程式を共役勾配法<sup>25)</sup>等で解くことによって  $\Delta \mathbf{r}$  が求められる。

$$\mathbf{H} \Delta \mathbf{r} = -\mathbf{g} \quad (35)$$

得られた  $\Delta \mathbf{r}$  より、次ステップの  $\mathbf{r}^{k+1} (= \mathbf{r}^k + \Delta \mathbf{r})$  を求め、 $j=1, \dots, m$  で次式が満足されるまで更新を繰り返す。

$$\begin{aligned} g_j &= 0 \quad \text{if} \quad r_j > 0 \\ g_j &< 0 \quad \text{if} \quad r_j = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

ただし、この繰り返しでは、感度係数等の更新は行わない。(36)式が満足されたら、感度係数等を更新して再度繰り返しを行い、最終的な収束解が得られるまで以上の演算を繰り返す。

## 3. 骨組構造の位相最適化

### 3.1 位相最適化問題の定式化<sup>22)</sup>

図1に示すような節点間を配置可能なすべての1次元部材で連結した設計空間を考え、部材の総質量を制約条件として、構造全体の歪みエネルギーを最小化する位相最適化問題を考える。ただし、設計変数は各部材の断面積とし、離散最適化問題を連続緩和問題として解く。また、連続緩和問題として解くと中間的な断面積を有する部材が残るため、最適解の部材断面積がなるべく初期に与えた断面積となるように、中間的な断面積を有する部材の歪みエネルギーにペナルティーを課す。また、簡単のためすべての部材は中実円柱とする。

以上の最適化問題を定式化すると次のようになる。

$$\min_{\alpha} \left[ V(\alpha) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right]$$

where  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_N\}$ ,  $A_i = (1 - \alpha_i) \bar{A}_i$  ( $i=1, \dots, N$ )  
subject to :

$$m_s = \sum_{i=1}^N A_i l_i \leq \bar{m}_s, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N)$$

ここに、 $V$  は構造物の歪みエネルギー、 $\mathbf{K}$  は全体剛性マトリックス、 $\mathbf{U}$  は節点変位ベクトル、 $\bar{A}_i$  は、 $i$  番目部材の最初に与えられた部材断面積、 $\alpha_i$  は設計変数、 $A_i$  は部材断面積、 $l_i$  は部材長さ、 $m_s$  は部材の総体積、 $\bar{m}_s$  は総体積の制約値、 $N$  は部材総数(要素総数)である。(なお、設計変数は  $A_i = \alpha_i \bar{A}_i$  としてもよい。)

離散最適化問題では、 $\alpha_i$  は0または1であるが、連続緩和により、最適解に0と1の間の値も得られることになる。そこで、0と1の間の断面積に関する歪みエネルギーにペナルティーを課し

て、最適解では $\alpha_i$ が0と1のみになるようにする（ただし、実際には0と1の間値が残る場合もある）。ここでは、歪みエネルギーを計算する際の断面積に次式に示すようなペナルティを課す。

$$A_i = (1 - \alpha_i)^2 \bar{A}_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (38)$$

この場合、 $\alpha_i$ が0~1の間では実際の断面積よりも小さい値となる。また、部材を円柱とすると、断面2次モーメント $I$ は次式から計算される。

$$I_i = \frac{A_i^2}{4\pi} = \frac{(1 - \alpha_i)^4 \bar{A}_i^2}{4\pi} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (39)$$

ただし、(37)式の総体積 $m_s$ の計算ではペナルティを課さない。

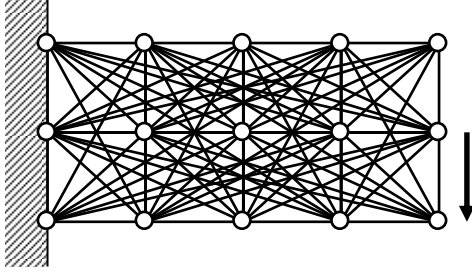


図1 1次元部材で構成される設計空間(グラッドストラクチャー)

### 3.2 CONLINによる解法

(37)式をCONLINによって解く場合、次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_+ \frac{\partial c_0}{\partial x_i} x_i - \sum_- \frac{\partial c_0}{\partial x_i} \frac{1}{x_i} \\ \text{subject to} \quad & \sum_+ \frac{\partial c_1}{\partial x_i} x_i - \sum_- \frac{\partial c_1}{\partial x_i} \frac{1}{x_i} - \bar{c}_1 \leq 0 \\ & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (40)$$

ここに、

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\alpha_i}{\alpha_i^k}, \quad \underline{x}_i = 0, \quad \bar{x}_i = 1, \quad c_0 = V, \quad c_1 = m_s \\ \bar{c}_1 &= \sum_i \left| \frac{\partial m_s}{\partial \alpha_i} \right| \alpha_i^k - m_s(\alpha^k) + \bar{m}_s = \sum_{i=1}^N \bar{A}_i l_i \alpha_i^k - m_s(\alpha^k) + \bar{m}_s \\ \frac{\partial c_0}{\partial x_i} &= \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \alpha_i^k = -\frac{\alpha_i^k}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_i} \mathbf{U} = -\frac{\alpha_i^k}{2} \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{u}_i \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_i} &= \frac{\partial m_s}{\partial \alpha_i} \alpha_i^k = -\bar{A}_i l_i \alpha_i^k \end{aligned} \quad (41)$$

ただし、 $\alpha_i^k$ は第 $k$ ステップの $i$ 番目要素の設計変数の値、 $\mathbf{k}_i$ は $i$ 番目要素の剛性マトリックス、 $\mathbf{u}_i$ は同要素に関する節点変位ベクトルである。(40)式の解法に関してはすでに前章に示している。なお、収束を安定させるためには、設計変数のムープリミットを設定する必要がある。すなわち、各ステップの設計変数の制約を次式のように設定する。

$$\max[\underline{x}_i, x_i^k (1 - \bar{\varepsilon})] \leq x_i \leq \min[\bar{x}_i, x_i^k (1 + \bar{\varepsilon})] \quad (i = 1, \dots, N) \quad (42)$$

### 3.3 SLP法による解法

SLP法では、(37)式を第 $k$ ステップの解の近傍でテーラー展開し、設計変数の増分値を新たな設計変数とする。これを(40)式と同様な形式で表すと次式となる。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \frac{\partial c_0}{\partial x_i} \Delta x_i \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^N \frac{\partial c_1}{\partial x_i} \Delta x_i \leq \bar{c}_1, \quad \Delta x_i \leq \Delta x_i \leq \bar{\Delta x}_i \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (43)$$

ここに、

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\alpha_i}{\alpha_i^k}, \quad \Delta x_i = \frac{\Delta \alpha_i}{\alpha_i^k} = \frac{\alpha_i - \alpha_i^k}{\alpha_i^k}, \quad \Delta \underline{x}_i = -\frac{\bar{\varepsilon}}{\alpha_i^k}, \quad \Delta \bar{x}_i = \frac{\bar{\varepsilon}}{\alpha_i^k} \\ c_0 &= V, \quad c_1 = m_s, \quad \bar{c}_1 = -m_s(\alpha^k) + \bar{m}_s \\ \frac{\partial c_0}{\partial x_i} &= \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \alpha_i^k = -\frac{\alpha_i^k}{2} \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{u}_i, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x_i} = \frac{\partial m_s}{\partial \alpha_i} \alpha_i^k = -\bar{A}_i l_i \alpha_i^k \end{aligned} \quad (44)$$

ただし、 $\bar{\varepsilon}$ は設計変数のムープリミットである。

(43)式は、 $\Delta \alpha_i$ が十分小さいとすれば、線形計画問題と見なせるため、シンプレックス法等を用いて解くことができる。そして、得られた増分値を第 $k$ ステップの設計変数に加え、これを $k+1$ ステップの解として同様の計算を繰り返す。そして、すべての設計変数の増分値が十分0に近づいた時点で収束と見なし、最適解が求まる。

### 3.4 OC法による解法<sup>2),8)</sup>

OC法では、(37)式から次式のようなラグランジアンを定義する。

$$L(\alpha) = V(\alpha) - \lambda \left( \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) \bar{A}_i l_i - \bar{m}_s \right) \quad (45)$$

ここに、 $\lambda$ はラグランジアン乗数である。 $\lambda \leq 0$ とすると、(37)式は(45)式の最小化問題となるため次式が得られる。

$$\delta L(\alpha) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V(\alpha)}{\partial \alpha_i} + \bar{A}_i l_i \lambda \right) \delta \alpha_i - \left( \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) \bar{A}_i l_i - \bar{m}_s \right) \delta \lambda = 0 \quad (46)$$

(46)式の $\delta \alpha_i (i = 1, \dots, N)$ 、 $\delta \lambda$ の任意性から次式的最適性規準が得られる。

$$-\bar{A}_i l_i \lambda / \left( \frac{\partial V(\alpha)}{\partial \alpha_i} \right) = 1 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (47)$$

$$\frac{1}{\bar{m}_s} \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) \bar{A}_i l_i = 1 \quad (48)$$

$0 \leq \alpha_i \leq 1 (i = 1, \dots, N)$ 、 $\lambda \leq 0$ を考慮すると、(47),(48)式から次のような設計変数とラグランジアン乗数の更新式を作ることができる。

$$\alpha_i^{k+1} = \min \left\{ \max \{0, s_i^k\}, 1 \right\} \quad (49)$$

$$\lambda^{k+1} = \min \left\{ 0, \left[ \frac{1}{\bar{m}_s} \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i^k) \bar{A}_i l_i \right]^\beta \lambda^k \right\} \quad (50)$$

ここに、

$$s_i^k = \left[ -\bar{A}_i l_i \lambda^k / \left( \frac{\partial V(\alpha^k)}{\partial \alpha_i^k} \right) \right]^\beta \alpha_i^k \quad (51)$$

ただし、 $\beta$ は解の収束速度を制御するべき乗係数である。

また、設計変数にムープリミット $\bar{\varepsilon}$ を設定すると次式となる。

$$\alpha_i^{k+1} = \begin{cases} \max \{ (1 - \bar{\varepsilon}) \alpha_i^k, 0 \} & \text{if } s_i^k \leq \max \{ (1 - \bar{\varepsilon}) \alpha_i^k, 0 \} \\ s_i^k & \text{if } \max \{ (1 - \bar{\varepsilon}) \alpha_i^k, 0 \} \leq s_i^k \\ & \leq \min \{ (1 + \bar{\varepsilon}) \alpha_i^k, 1 \} \\ \min \{ (1 + \bar{\varepsilon}) \alpha_i^k, 1 \} & \text{if } \min \{ (1 + \bar{\varepsilon}) \alpha_i^k, 1 \} \leq s_i^k \end{cases} \quad (52)$$

さらに、ラグランジェ未定係数は各ステップで制約条件をアクティブ ( $m_s = \bar{m}_s$ ) となるように収束計算を行う。これは、次式

$$s_i^{k+1} = \left[ -\bar{A}_i A_i^{k+1} / \frac{\partial V(\alpha^k)}{\partial \alpha_i^k} \right]^\beta \alpha_i^k \quad (53)$$

を用いて、歪みエネルギーの感度係数を固定して、内側のループで設計変数の更新を行えばよい。

以上の計算の流れをまとめると、(52)式で前ステップの収束解から設計変数の値を更新し、これから(50)式によってラグランジェ未定係数を更新する。そして、(53)式によって  $s_i^k$  を更新し、(52)式によって設計変数を、また、(50)式によってラグランジェ未定係数を更新する。この(53)式を用いる繰り返しを制約条件がアクティブになるまで行う。そして、この収束解から歪みエネルギーの感度係数を計算し、再度(52)式により設計変数の値を繰り返す。この歪みエネルギーの感度係数を計算する外側のループを(47),(48)式の最適性規準が満足されるまで繰り返す。

#### 4. 解析例

##### 4.1 トラス構造のコート掛け問題

まず、位相最適化の解析例として、図2に示すようなグラウンドストラクチャーの最適化問題を解く。ただし、解析領域は対称性を利用して上半分の領域とする。部材のヤング係数は100GPa、断面積  $\bar{A}$  は  $1\text{cm}^2$  とし、また、 $L=30\text{cm}$ 、荷重値は100kNとした。部材総体積の制約値は初期体積の25%とする。それぞれの手法のパラメータは、まず、CONLIN と SLP では、設計変数のムーブリミット  $\bar{e}$  を0.1とした。最適性規準法(OC)では、設計変数のムーブリミット  $\bar{e}$  を0.2、べき乗係数  $\beta$  を0.85、各ステップ内側ループの繰り返し回数を100として解析を行った。

図3は、目的関数である歪みエネルギーと最適化更新回数との関係を示したものである。これらの図より、CONLIN と SLP は7ステップまではほぼ同じ収束経路をたどるが、7ステップ以降では、CONLIN の収束の方が良くなるのがわかる。また、OCは、6ステップ程度までの収束は速いがそれ以降の収束がなだらかになるのがわかる。なお、OCの場合、ムーブリミットの大きさの違いが初期段階の収束に影響している。また、30ステップでの位相は、どの手法の結果もほぼ同じになり(断面積は若干異なる)、図4に示すものとなった。

次に、設計変数の総数の影響を調査するために、図5に示すような節点数を増やしたグラウンドストラクチャーの最適化問題の解析を行った(図2と支点の位置は異なる)。部材総体積の制約値は初期体積の25%とする。部材のヤング係数、断面積  $\bar{A}$ 、 $L$ 、荷重値、各手法のパラメータは、図2の解析の場合と同じとした。

図6は、目的関数である歪みエネルギーと最適化更新回数との関係を示したものである。図より、この場合も図3とほぼ同様な傾向となっており、CONLIN の収束性が、SLP、OC に比較して優れているのがわかる。また、図7は、30ステップでの位相を示したものであるが、SLP と CONLIN はほぼ同じ位相となっているが、OCでは、若干異なる位相が得られている。

以上の解析は、対称性を利用して上半分の領域で行ったものであるが、SLP 法では、対称性を有する問題を全体領域で解析した

時、非対称な解が得られる場合があることが知られている。CONLIN の場合、このような問題があるかどうかを調査するために、図5の例題を全体領域(グラウンドストラクチャーは図8左上)で解析してみた。図8は、この場合の30ステップでの位相を示したものであるが、SLP 法では非対称な結果が得られているのに対して、OC、CONLIN では対称な結果が得られることがわかる。

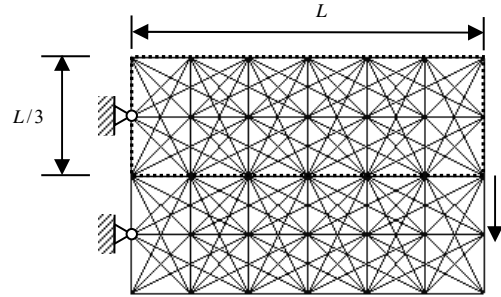


図2 グラウンドストラクチャー

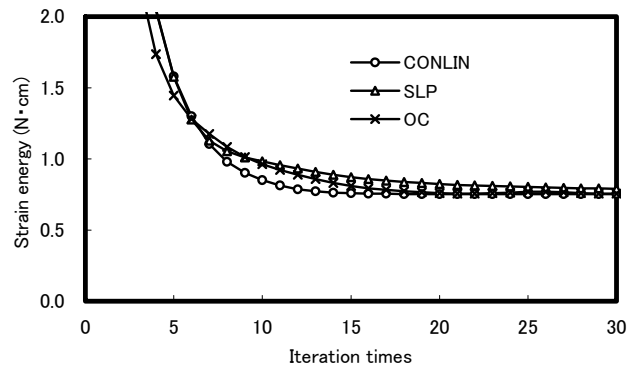


図3 目的関数の収束性の比較

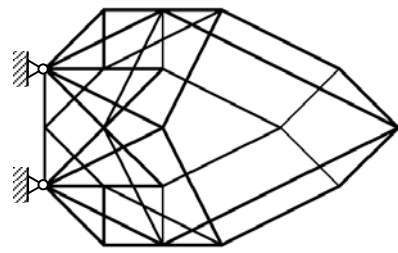


図4 30ステップでの位相

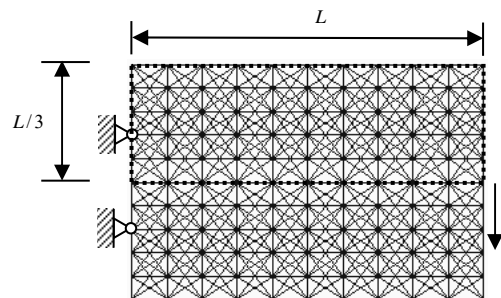


図5 グラウンドストラクチャー

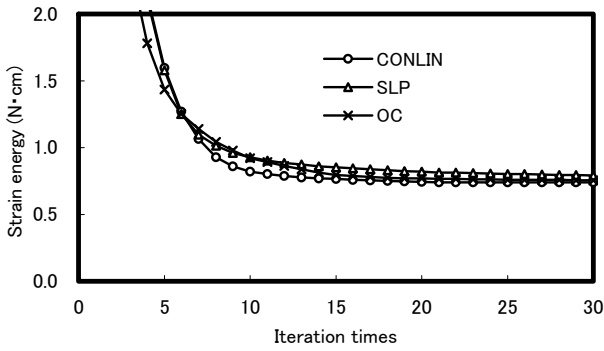


図6 目的関数の収束性の比較

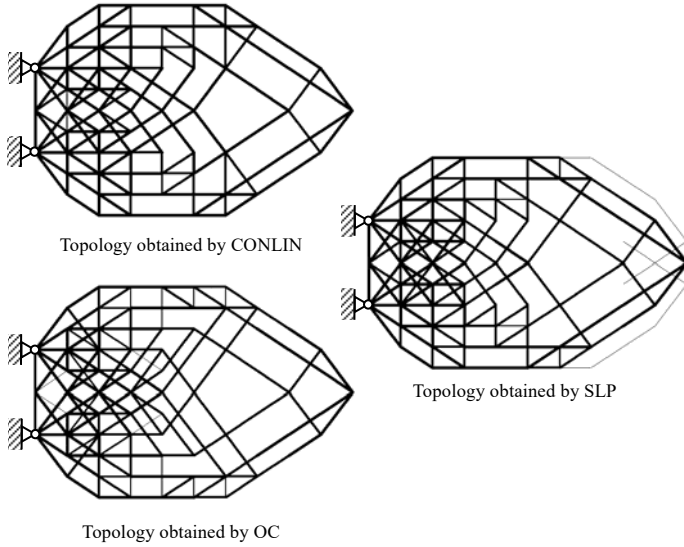


図7 30ステップでの位相

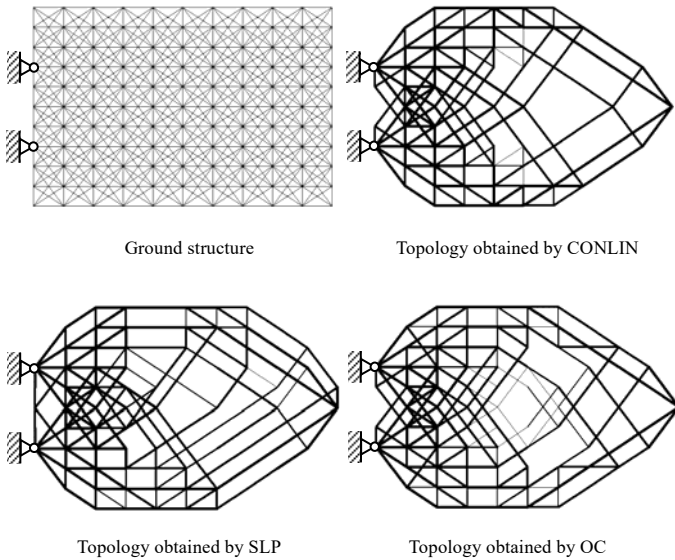


図8 30ステップでの位相 (全体領域で解析した場合)

#### 4.2 梁構造のコート掛け問題

次に、図2の例題で、接合部を剛接した場合（梁構造）について解析を行った。部材のヤング係数、断面積  $\bar{A}$ 、 $L$ 、荷重値、各

手法のパラメータは、前節までと同じである。部材総体積の制約値は初期体積の15%とした。

図9は、目的関数である歪みエネルギーと最適化更新回数との関係を示したものである。図より、この場合も、CONLINの収束性が優れていることがわかる。図10は、30ステップでの位相を示したものであるが、3種の手法でそれぞれ異なる位相となっている。したがって、この問題は、局所最適解が得られやすい問題と言える。図より、CONLINの結果が最も明解な位相となっていることがわかる。

図11、図12は、図8の例題（図5の全体解析）で、接合部を剛接とした場合の結果を示したものである。ただし、部材総体積の制約値は初期体積の10%とした。図11は、収束性を示したものであるが、やはりCONLINの収束性が他の二つの手法に比較して優れていることがわかる。また、図12は、30ステップでの位相を示したものであるが、この場合は、SLP法においても対称な位相が得られている。しかし、OC、SLP法ともに、CONLINの場合の歪みエネルギーよりも高い値となっており局所解に収束している。

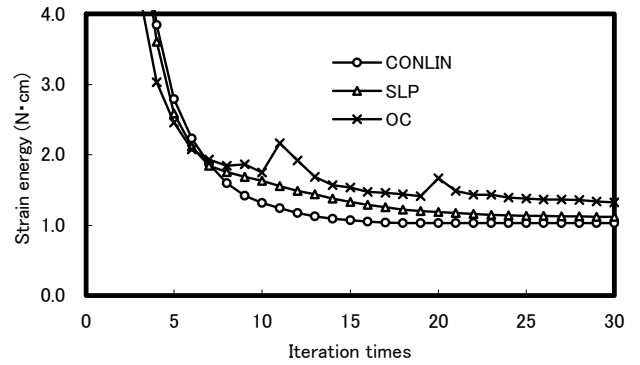


図9 目的関数の収束性の比較

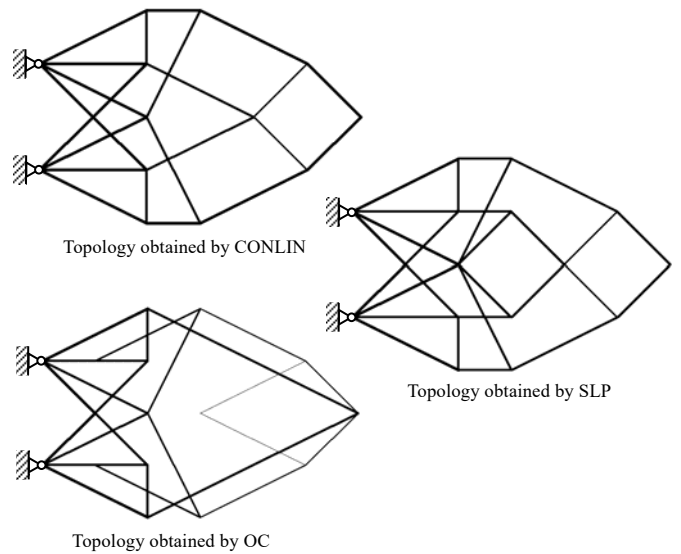


図10 30ステップでの位相



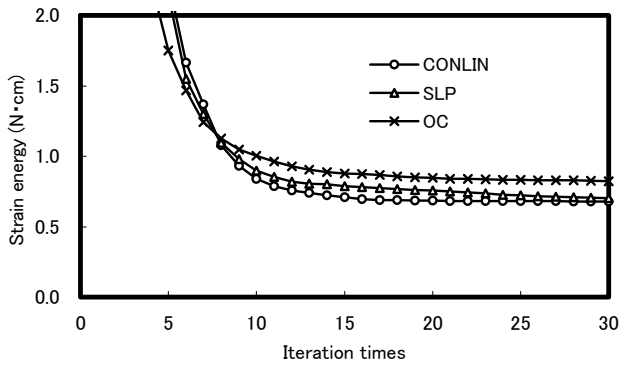


図 11 目的関数の収束性の比較

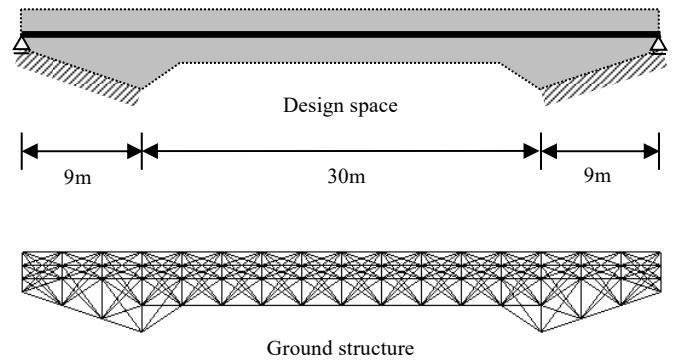


図 13 橋梁モデルの設計空間とグラウンドストラクチャー

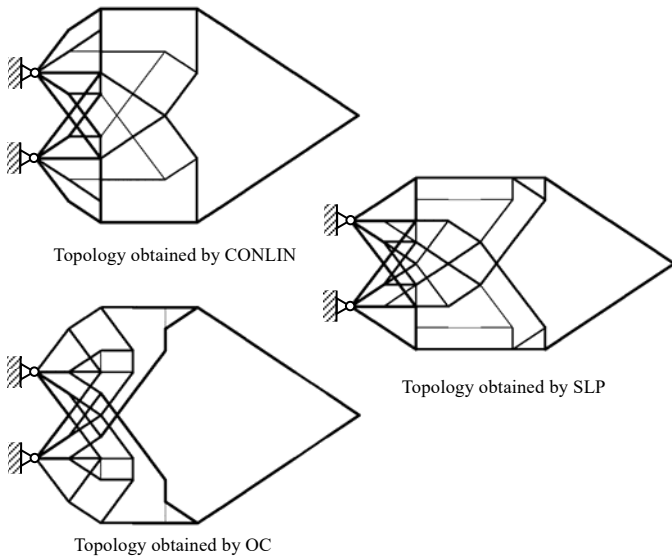


図 12 30 ステップでの位相

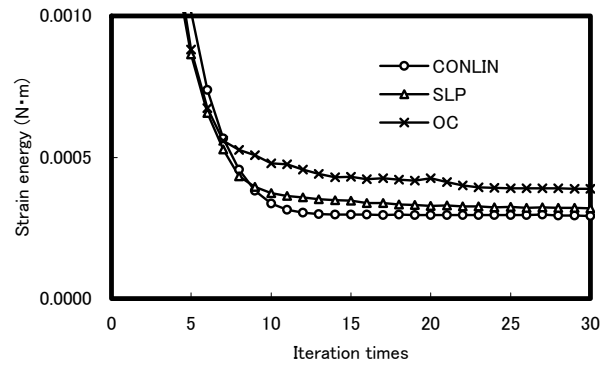


図 14 目的関数の収束性の比較

#### 4.3 梁・トラス複合構造の解析

最後に、実務的な例題<sup>26)</sup>として、図 13 に示す橋梁の最適位相を求める。図 13 の上の図は、設計空間と境界条件を示す。また、下の図はこの設計空間のグラウンドストラクチャーを示す。ただし、橋梁の道路部分の梁は初期に与えた断面から変化しないものとし、設計対象から除く。荷重は、道路部分に 3.33kN/m の鉛直荷重が作用し、グラウンドストラクチャーの各部材のヤング係数は 206GPa、初期断面積  $\bar{A}$  は 0.04m<sup>2</sup>、部材総体積の制約値は初期体積の 10% とした。また、直交部材は剛接合とし、斜め材はすべてピン接合とする。解析は、対称性を考慮して 1/2 領域で行う。各手法のパラメータは、前節までと同じである。

図 14 は、目的関数である歪みエネルギーと最適化更新回数との関係を示したものである。図より、この場合も、CONLIN の収束性が優れていることがわかる。図 15 は、30 ステップでの位相を示したものであるが、3 種の手法でそれぞれ異なる位相となっており、この場合も CONLIN によって得られた位相が最も明解なものになっている。また、OC 法では、局所解に収束している。

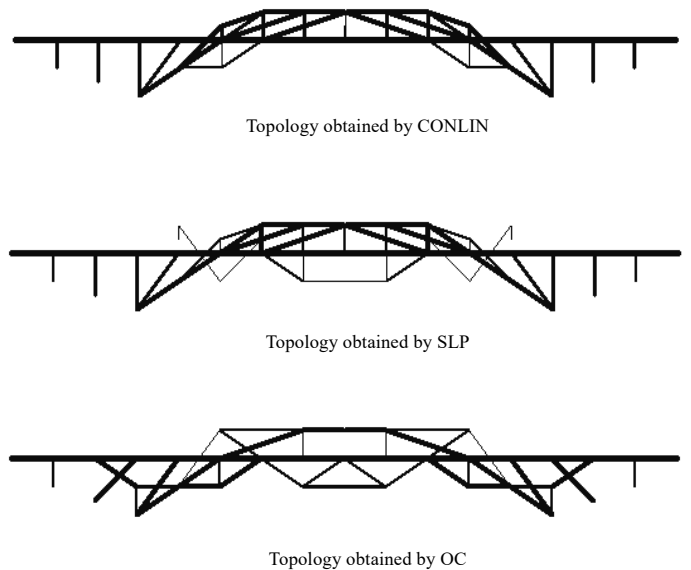


図 15 30 ステップでの位相

#### 5. まとめ

本報告では、最近注目されている最適化手法 CONLIN を位相最適化問題に適用した場合の有効性を、SLP、OC 法との比較により検討した。その結果、以下のことが明らかになった。

- (1) トラス構造の位相最適化では、3 種の手法は同様な位相が得

られるが、CONLIN の収束が他の 2 種の方法よりも速い。また、歪みエネルギーの収束値も他の 2 種の方法の収束値と比較して低い値となる。

- (2) SLP 法では、対称問題の位相が非対称になる場合があるが、CONLIN, OC 法では対称な位相が得られる。
- (3) 剛接骨組の例題においても、CONLIN の収束性が他の 2 つの方法と比較して優れており、歪みエネルギーの収束値も低い値となる。
- (4) 剛接骨組の例題では、3 種の方法で異なった位相が得られ、CONLIN を用いた場合の位相が最も明解なものとなる。また、OC 法では局所解に陥ることが多い。
- (5) 実務的な橋梁構造の位相最適化の例題においても、CONLIN の収束性が優位であり、位相も他の 2 種の方法と比較して明解なものとなる。
- (6) 考察には記していないが、計算速度に関しては、本論文に示した例題では、3 種の手法の間にあまり差が見られなかった。

以上の結果より、CONLIN は、SLP, OC 法と比較して、局所解に陥ることが少なく、優れた収束性を有していることがわかった。また、SLP 法と異なり、対称な問題では対称な最適位相が得られることもわかった。したがって、CONLIN は、位相最適化問題の解法として適していると結論づけられる。

また、CONLIN は、SLP 法のように 2 つ以上の制約条件がある問題にも容易に適用することができるため、フィルタリングを併用した連続体の位相最適化手法<sup>7),8)</sup>や、弾性変形機構の位相最適問題等<sup>9),20)</sup>にも応用が可能であると考えられ、今後の発展が期待される。

**謝辞:** 本研究を遂行するにあたり、平成 12 年度科学研究費(基盤研究(c)(2))の補助を受けた。また、(株)いんと石井恵三氏より貴重な助言を頂いた。ここに、記して感謝の意を表します。

#### 参考文献

- 1) M. P. Bendsoe and N. Kikuchi : Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 2) K. Suzuki and N. Kikuchi : A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 3) M. Zhou and G.I.N. Rozvany : The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.89, pp.309-336, 1991
- 4) R. J. Yang and C. H. Chuang : Optimal topology design using linear programming, *Computers & Structures*, Vol. 52, No.2, pp.265-275, 1994
- 5) S. Nishiwaki, Mary I. Frecker, S. Min, and N. Kikuchi : Topology Optimization of Compliant Mechanisms using the Homogenization Method, *Int. J. Numer. Methods. Engrg.*, Vol. 42, No. 3, pp.535-560, 1998
- 6) B. Hassani and E. Hinton : A review of homogenization and topology optimization III — topology optimization using optimality criteria, *Computers & Structures*, Vol.69, pp.739-756, 1998
- 7) 藤井大地, 菊池昇: SLP 法を用いたトポロジー最適化における数値的の

安定の改善, 日本建築学会構造系論文集, No.521, pp.65-72, 1999.7

- 8) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣, 最適性規準法を用いた位相最適化におけるフィルタリング法, 日本建築学会構造系論文集, No.543, pp.105-112, 2001.5
- 9) C. Fleury and V. Braibant : Structural Optimization: A new dual method using mixed variables, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.23, pp.409-428, 1986
- 10) C. Fleury : CONLIN: an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts, *Structural Optimization*, Vol.1, pp.81-89, 1989
- 11) M. Beekers and C. Fleury : A Primal-Dual Approach in Truss Topology Optimization, *Computers & Structures*, Vol.64, No.1-4, pp.77-88, 1997
- 12) M. Beekers : Dual methods for discrete structural optimization problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.48, pp.1761-1784, 2000
- 13) P. Hajela and E. Lee : Genetic Algorithms in Truss Topological Optimization, *Int. J. Solids Structures*, Vol.32, No.22, pp.3341-3357, 1995
- 14) M. Ohsaki : Genetic Algorithms for Topology Optimization of Trusses, *Computers & Structures*, Vol.57, No.2, pp.219-225, 1995
- 15) W. A. Bennage and A. K. Dhingra : Optimization of Truss Topology using Tabu Search, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.38, pp.4035-4052, 1995
- 16) S. M. Shrestha and J. Ghaboussi : Evolution of Optimum Structural Shape using Genetic Algorithm, *Journal of Structural Engineering*, Vol.124, No.11, pp.1331-1338, 1998
- 17) 大森博司, 鬼頭伸彰: 遺伝的アルゴリズムを用いたトラス構造物の形態創出, 日本建築学会構造系論文集, No.520, pp.85-92, 1999.6
- 18) 河村拓昌, 大森博司, 遺伝的アルゴリズムによる立体トラス構造物の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, No.538, pp.115-121, 2000.12
- 19) M. P. Bendsoe : Optimization of Structural Topology, Shape, and Material, Springer, pp.139-171, 1995
- 20) J. M. Oberndorfer, W. Achtziger, and H.R.E.M. Hornlein : Two approaches for truss topology optimization: a comparison for practical use, *Structural Optimization*, Vol.11, pp.137-144, 1996
- 21) W. Achtziger : Truss topology optimization including bar properties different for tension and compression, *Structural Optimization*, Vol.12, pp.63-74, 1996
- 22) 藤井大地, 松本慎也, 藤谷義信, 菊池昇: グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化, 日本建築学会構造工学論文集, Vol.46B, pp.1-8, 2000
- 23) 今野浩, 山下浩: 非線形計画法, 日科技連, pp.91-101, 1978
- 24) 山川宏: 最適化デザイン, 培風館, pp.167-170, 1993
- 25) 鈴木克幸分担執筆: 計算力学ハンドブック (I 有限要素法構造編), 日本機械学会, pp.23-31, 1998
- 26) E. Ramm, K. Maute, S. Shwarz : Conceptual design by structural optimization. In: de R.Borst; N.Bianic; H.Mang; G.Meschke (eds) *Conference Proceedings of EURO-C 1998*, March 31-April 3, 1998, Badgastein, Austria, pp.879-896, Balkema, Rotterdam, 1998
- 27) 藤井大地, 江島晋, 菊池昇: 均質化設計法を用いた弾性変形機構の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.528, pp.99-105, 2000.2

(2001 年 1 月 17 日原稿受理, 2001 年 5 月 17 日採用決定)

## グラウンドストラクチャ法による建築構造の形態創生 COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF BUILDING STRUCTURE USING GROUND STRUCTURE APPROACH

藤井大地\*, 真鍋匡利\*\*, 高田豊文\*\*\*

*Daiji FUJII, Masatoshi MANABE and Toyofumi TAKADA*

In this paper, a ground structure approach for computational morphogenesis of building structure is shown. In this method, it is difficult to obtain exact solutions by general non-linear programming methods when the members of ground structure increase. In this paper, some examples that the solution dose not converge to exact solution are shown, and a method for solving this problem is proposed. In the proposed method, SLP or CONLIN method is used as solver of the optimization problem. Several numerical examples are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method. Also, it is shown that this method can be used for computational morphogenesis of building structure.

**Keywords:** *Computational Morphogenesis, Topology optimization, Ground structure approach, SLP method, CONLIN method*

形態創生, 位相最適化, グラウンドストラクチャ法, 逐次線形計画法, 凸線形化法

### 1. はじめに

近年, 建築構造のデザインを考えるツールとして, 位相最適化手法による構造形態創生が注目されている<sup>1),2)</sup>. このような形態創生で用いられる位相最適化手法は, 次の二つに大別される. 一つは, 拡張された設計領域を2次元または3次元有限要素メッシュで分割し, 要素の材料密度を最適化することで形態を創生するものであり<sup>3),4),5)</sup>, もう一つは, 設計領域に適当な節点を配置し, 節点間を可能な限りの線要素で結んだグラウンドストラクチャの各線要素の材料密度(または断面積)を最適化することで形態を創生するものである<sup>6),7),8),9)</sup>. 一般に, 前者の方法は均質化法<sup>3)</sup>または密度法<sup>4),5)</sup>, 後者の方法はグラウンドストラクチャ法と呼ばれている.

均質化法または密度法による位相最適化は, すでに汎用ソフトにも組み込まれ, 機械部品等の設計にも用いられているが, グラウンドストラクチャ法は古くから研究されているにもかかわらず, 一般にはあまり普及していないのが現状である. この要因としては, 機械分野等では, 有限要素法の発達で, 線材としての設計をあまり行わなくなったこと, グラウンドストラクチャ法では配置する節点が増えると線材数が膨大となり, 最適解を求めることが容易でなくなることなどが挙げられる. しかしながら, 後者の問題に関しては, 最近, 高田, 松岡<sup>10)</sup>によって, トラス構造のグラウンドストラクチャ法に対して, 線形計画法(シンプレックス法)により最適解(厳密解)が得られる方法が提案された. これらの研究で得られている解は, 力学的にも明解な位相となっており, 建築構造のデザインの発想を支援するツールとなり得る.

しかしながら, 建築構造の形態創生ツールとしては, トラス構造だけでなく, 接合部が剛接となる骨組構造のグラウンドストラクチャの最適解を得る方法も望まれる. 接合部が剛となる骨組構造の位相最適化を試みたものとしては, 数理計画法にもとづく藤井ら<sup>11),12)</sup>の研究やGAを用いた河村, 大森<sup>13)</sup>の研究がある. しかし, これらの研究では, 厳密解との比較がなされていないため, 解析結果の検証が十分とは言えない.

そこで, 本研究では, 剛接骨組構造の位相最適化が可能となる非線形計画法にもとづく手法により, トラス構造のグラウンドストラクチャの最適解を求め, 高田, 松岡<sup>10)</sup>の手法によって得られた厳密解と比較した. その結果, これまでの一般的な解法では, 高田, 松岡の解には収束しないことが明らかになった. 本論文では, この問題の解決法を示し, 建築構造デザインを支援するツールとして有効な骨組構造のグラウンドストラクチャ法を提案する.

以下, 本論文の第2章では, 最適化問題と本論文で用いる非線形計画法を示す. 本論文では, SLP法(逐次線形計画法)とCONLIN法(凸線形化法)<sup>14)</sup>の二つの手法を用いる. 第3章では, トラス構造グラウンドストラクチャの解析例を示し, 非線形計画法による解と厳密解との比較を行う. 第4章では, 第2章に示した手法の改良法を示し, その有効性を示す. 第5章では, ペナルティ法の導入法を示し, その効果を検討する. 第6章では, ビルのファサード構造を想定した骨組構造グラウンドストラクチャの解析例を示し, 構造デザインへの応用の可能性を示す. 第7章では以上のまとめを述べる.

\* 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

\*\* 近畿大学大学院 大学院生

\*\*\* 滋賀県立大学環境科学部 准教授・博士(工学)

Prof., School of Engineering, Kinki University, Dr. Eng.

Graduate Student, Graduate School of Kinki University

Assoc. Prof., School of Environmental Science, University of Shiga Prefecture, Dr. Eng.

## 2. 解析法の概要

### 2.1 最適化問題の定式化

本論文では、骨組・トラス構造のグラウンドストラクチャを構成する各要素の材料密度を設計変数とし、 $i$  番目要素の剛性マトリクス  $\mathbf{k}_i$  が要素密度  $\rho_i$  を用いて次式のように表されるものとする。

$$\mathbf{k}_i = \rho_i \mathbf{k}_i^0 \quad \rho_i \geq 0 \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{k}_i^0$  は、初期の要素剛性マトリクスである。また、グラウンドストラクチャの質量  $m$  は次式で表されるものとする。

$$m = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i l_i \quad (2)$$

ここに、 $N$  は要素数、 $A_i, l_i$  は  $i$  番目要素の断面積と長さを表す。

位相最適化問題は、質量制約下でコンプライアンスを最小化する次のような問題として定式化する。

$$\begin{aligned} \min \quad & C(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{subject to} \quad & m(\boldsymbol{\rho}) \leq \bar{m}, \quad \boldsymbol{\rho} \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、コンプライアンス  $C$  は、次式から求められる。

$$C = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{d}, \mathbf{f}$  は節点変位ベクトルと節点外力ベクトル、 $\mathbf{K}$  は全体剛性マトリクスである。

本論文では、(3)式の最適化問題を SLP 法と CONLIN 法の二種の非線形計画法によって解く。非線形計画法では、(3)式の解を繰り返し計算により逐次改修することによって求める。

### 2.2 SLP 法による最適化問題の解法

いま、第  $k$  ステップの解  $\rho_i^{(k)}$  ( $i=1, \dots, N$ ) が与えられたとして、 $k+1$  ステップの解が次式で近似できるものとする。

$$\rho_i^{(k+1)} = \rho_i^{(k)} + \Delta \rho_i \quad (i=1, \dots, N) \quad (5)$$

このとき、(3)式を  $\rho_i^{(k)}$  の近傍でテーラー展開し、1 次項のみを採用すると、

$$\begin{aligned} \min \quad & C(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial C}{\partial \rho_i} \Delta \rho_i \\ \text{subject to} \quad & m(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial m}{\partial \rho_i} \Delta \rho_i \leq \bar{m} \\ & 0 \leq \rho_i^{(k)} + \Delta \rho_i \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式をさらに書き直すと、次式の線形計画問題となる。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \frac{\partial C}{\partial \rho_i} \Delta \rho_i \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^N \frac{\partial m}{\partial \rho_i} \Delta \rho_i \leq \bar{m} - m(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) \\ & -\rho_i^{(k)} \leq \Delta \rho_i \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (7)$$

SLP 法では、(7)式の問題をシンプレックス法で繰り返し解き、設計変数を(5)式によって更新していく。そして、すべての設計変数の増減値 ( $\Delta \rho_i$ ) が 0 に近くなった時点で収束と見なし、最適解を求める。

ただし、SLP 法では、通常、設計変数の増減値に、次式のように上下限値を設定する。

$$-\varepsilon^{(k)} \leq \Delta \rho_i \leq \varepsilon^{(k)} \quad (i=1, \dots, N) \quad (8)$$

ここで、 $\varepsilon^{(k)}$  は第  $k$  ステップの上下限値で、ムーブリミットと呼ばれる。SLP 法では、解が振動していつまでも収束しない場合があり、このような場合は、ムーブリミットを絞り込んで強制的に収束させる。本論文では、ムーブリミットを次のように設定する。

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k)} &= 0.1 & k \leq 10 \\ \varepsilon^{(k)} &= 0.1/1.1^{(k-10)} & k > 10 \end{aligned} \quad (9)$$

また、(7)式のコンプライアンスと質量の設計変数に関する偏微分値 (感度係数) は、次式から求められる。

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = -\mathbf{d}_i^T \mathbf{k}_i^0 \mathbf{d}_i \quad \frac{\partial m}{\partial \rho_i} = A_i l_i \quad (10)$$

ここに、 $\mathbf{k}_i^0, \mathbf{d}_i$  は  $i$  番目要素の初期剛性マトリクスと節点変位ベクトルである。なお、本論文では、改修計算回数は 50 回としている。

### 2.3 CONLIN 法による最適化問題の解法

文献 12), 14) に示される CONLIN 法では、テーラー展開の方法が、(6)式と異なる。すなわち、CONLIN 法では、(11)式のように、感度係数が正の場合は、(6)式と同じテーラー展開を行い、感度係数が負の場合は、設計変数の逆数でテーラー展開を行う。

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{\alpha}) &\approx C(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}) + \sum_{\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} > 0} \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i - \sum_{\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} < 0} (\alpha_i^{(k)})^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} \left( \frac{1}{\alpha_i^{(k+1)}} - \frac{1}{\alpha_i^{(k)}} \right) \\ m(\boldsymbol{\alpha}) &\approx m(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}) + \sum_{\frac{\partial m}{\partial \alpha_i} > 0} \frac{\partial m}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i - \sum_{\frac{\partial m}{\partial \alpha_i} < 0} (\alpha_i^{(k)})^2 \frac{\partial m}{\partial \alpha_i} \left( \frac{1}{\alpha_i^{(k+1)}} - \frac{1}{\alpha_i^{(k)}} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $\alpha_i$  は  $i$  番目要素の設計変数を表す。

この方法では、設計変数の逆数のテーラー展開に解の収束を速める効果がある。ただし、この効果を有効にするためには、非線形関数となる目的関数の増減を設計変数の増減に比例させる必要がある。このため、文献 12) では  $\alpha_i = 1 - \rho_i$  を設計変数としていた。しかし、本論文では、 $\alpha_i = 1/\rho_i$  とする方がさらに収束が速いことがわかったため、 $\alpha_i = 1/\rho_i$  を設計変数としている。

この場合、要素剛性マトリクス  $\mathbf{k}_i$  は次式で表される。

$$\mathbf{k}_i = (1/\alpha_i) \mathbf{k}_i^0 \quad \alpha_i > 0 \quad (12)$$

また、(10)式の感度係数は、次式により計算される。

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} = -\mathbf{d}_i^T \left( -\frac{1}{\alpha_i^2} \mathbf{k}_i^0 \right) \mathbf{d}_i \quad \frac{\partial m}{\partial \alpha_i} = -\frac{1}{\alpha_i^2} A_i l_i \quad (13)$$

CONLIN 法では、(11)式に双対法を適用し、逐次二次計画法を用いて解かれるが、詳しい解法については文献 12) に示されるため、割愛する。ただし、本論文では、CONLIN 法の改修計算回数は 40 回とし、設計変数  $\alpha_i$  のムーブリミットは 100 に設定した。

## 3. トラスグラウンドストラクチャの解析例

第 2 章に示す方法により、図 1 に示す問題の解析を行い、高田、松岡<sup>10)</sup>の手法による解との比較を行う。

図 1 の灰色部分の設計領域に図 2 に示す CASE 1~CASE 4 のグラウンドストラクチャを作成する。CASE 2~CASE 4 では、要素数が多いため配置節点のみ示している。なお、完全に重なる要素に関しては、より長さの短いものを残している。

図 3 は、文献 10) の手法によって得られた解を示している。ただし、文献 10) の手法では、断面積が設計変数、総体積が制約条件と

なっている。この問題の総体積の制約値は  $10^6 \text{mm}^3$  である。図の要素の太さは断面の大きさを表し、 $C$  はコンプライアンス値を示す。CASE 1 については、同じ最小コンプライアンス値の解が複数存在し、他の CASE は単一解となる。

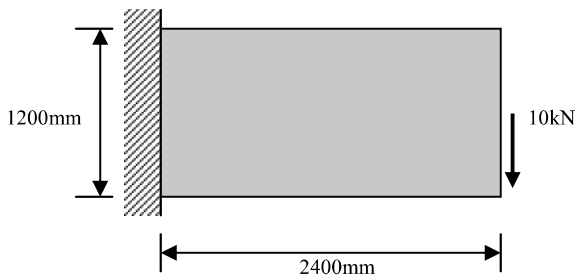


図1 解析モデル

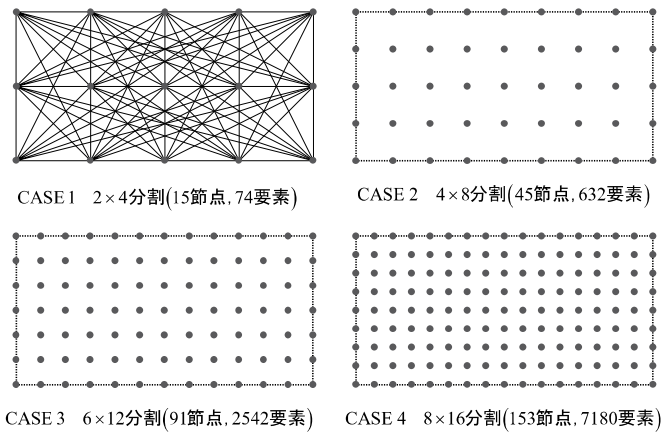


図2 トラスのグランドストラクチャ

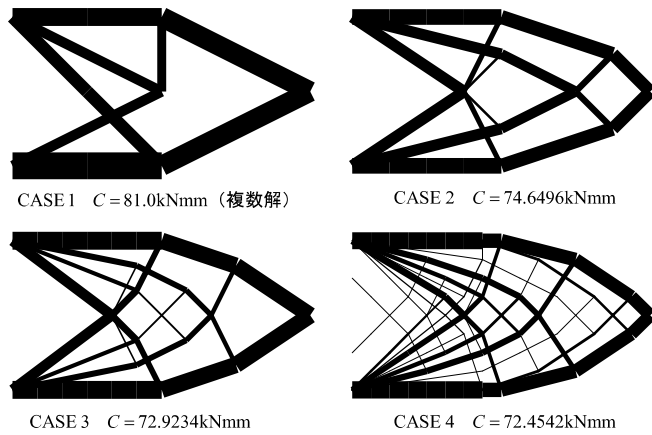


図3 文献10)の手法による解(厳密解)

図4は、2.2節に示した SLP 法の解を示し、図5は、2.3節に示した CONLIN 法の解を示す。ただし、図3の解と解析条件を合わせるため、質量制約  $\bar{m}$  を  $10^6 \text{kg}$  としている。また、ヤング係数・断面積および初期密度は全要素均等としている。なお、図の要素の太さは要素密度の大きさを表す。図4より、SLP 法の CASE 1 では図3のコンプライアンスと等しい解が得られているが、CASE 2~CASE 4 では厳密解への収束が見られない。また、図5より、

CONLIN 法では、SLP 法に比較して、より厳密解に近い解は得られているが、複雑な位相となっている。

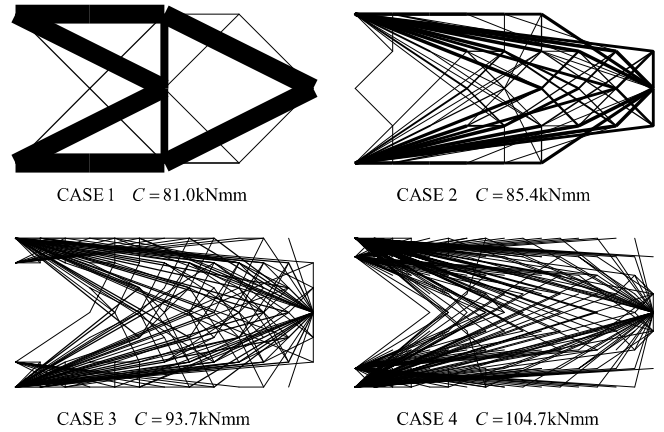


図4 SLP 法による解

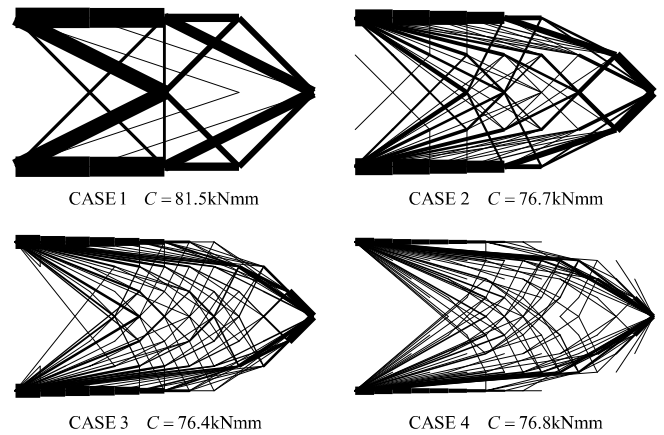


図5 CONLIN 法による解

図6は、Case 2 について、SLP 法を用いて、(9)式のムーブリミットの初期値を 0.1, 0.3, 0.5, 1.0 とした場合のコンプライアンス(図3の Case 2 の解との比)の改修計算回数に対する収束を示している。また、図7は、最もコンプライアンス値の低いムーブリミット 1.0 の場合の解を示している。これらの図より、ムーブリミットを変更することで、目的関数値に多少の改善は見られるが、図3に示される厳密解には収束しないことがわかる。

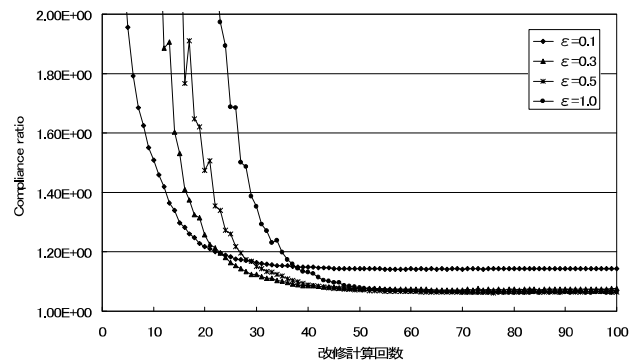


図6 Case 2 の解の収束 (SLP 法)

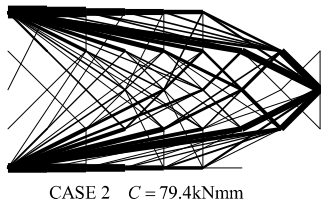


図7 ムーブプリミット初期値 1.0, 改修計算回数 100 の解 (SLP 法)

#### 4. 計算アルゴリズムの改良とその有効性

第3章に示すように、通常非線形計画法による解法では、図3に示す厳密解が得られない。しかしながら、特に図5に示すCONLIN法の結果は厳密解との類似性が見られる。ことから、厳密解に行く前に、局所的な解に収束していることが考えられる。

厳密解に導くためのアルゴリズムは色々考えられるが、ここでは、単純に、図3または図5のように、一度の最適化計算で得られた解を再度初期値として同じ最適化計算を行う方法を試みる。

図8は本計算法のフローを示したものである。図の点線で囲まれた部分が2.2, 2.3節に示した従来法であり、改良したアルゴリズムでは、単に得られた解を再度初期値として再計算を行うだけである。ただし、再計算を行う場合は、設計変数のムープリミット、CONLIN法の諸係数等はすべて初期化される。なお、この方法は、2.2, 2.3節の方法で、改修計算の途中で、SLP法のムープリミット、CONLIN法の諸係数等を初期化して、さらに改修計算を続けることに相当する。

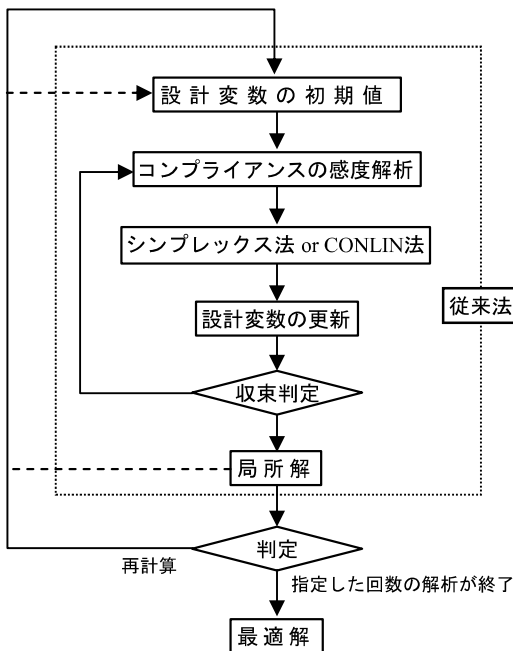


図8 改良アルゴリズムの計算フロー

図9, 10は、図2のCASE2で、図6の再計算を行った場合の結果を示したものである。図より、再計算を行うことで、明らかに解が改善され、SLP法、CONLIN法ともに30回程度の再計算で図3に示す厳密解に近い解が得られることがわかる。

図11, 12は、SLP法とCONLIN法で、再計算100回の解を示し

たものである。図より、SLP法もCONLIN法も、ほぼ図3の厳密解に近い位相が得られていることがわかる。また、図11のCASE1では、図3と同様に非対称の解が得られるが、図12のCASE1では、対称の解が得られることがわかる。また、CASE3, CASE4では、CONLIN法の方がより厳密解に近い位相となることがわかる。

なお、図9の再計算30回の場合と、図11のCASE2のCが、図3のCASE2のCよりも小さくなるのは、質量制約が若干オーバーしているためである。

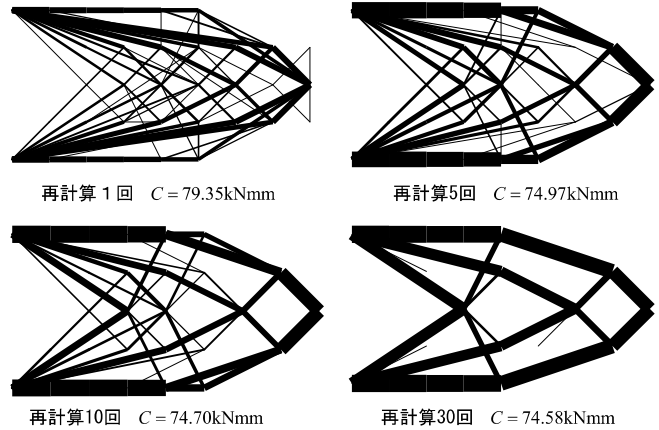


図9 CASE2のSLP法による解

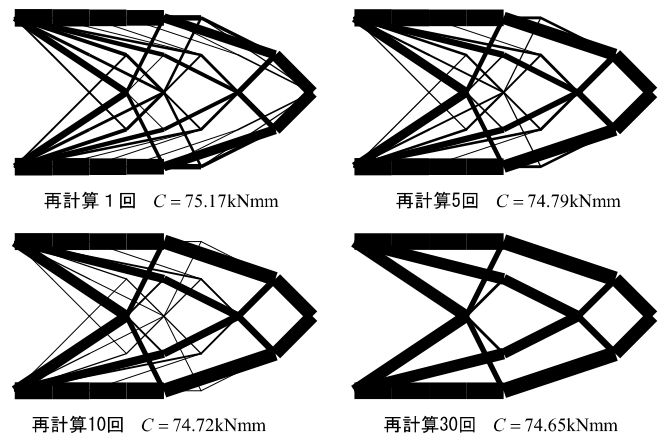


図10 CASE2のCONLIN法による解

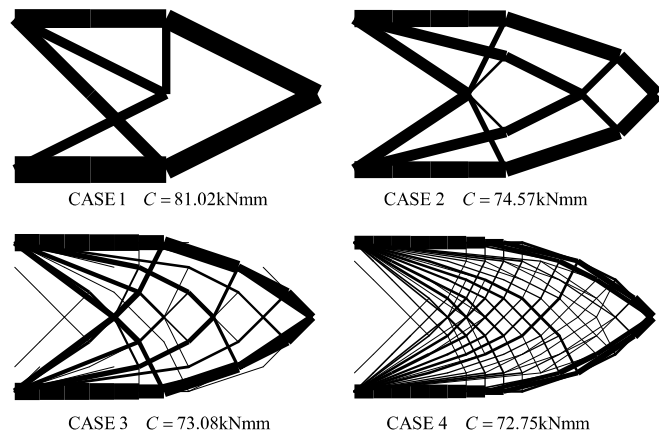


図11 再計算100回のSLP法による解

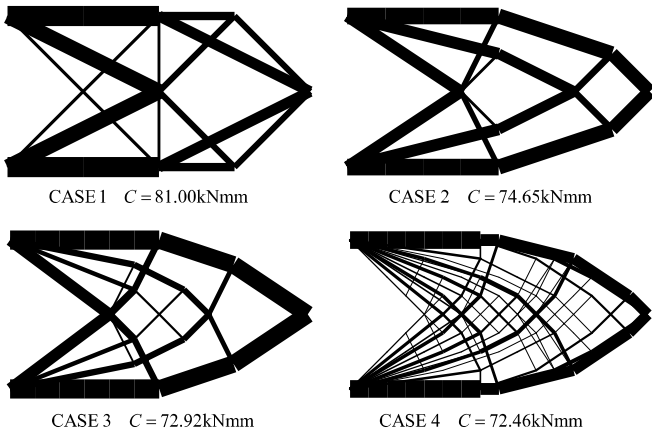


図 12 再計算 100 回の CONLIN 法による解

表 1 は、SLP 法と CONLIN 法の CASE 4 の再計算 1 回あたりの計算時間を比較したものである。SLP 法の改修計算回数が 50 回、CONLIN 法が 40 回という違いはあるが、圧倒的に CONLIN 法の計算時間が短いことがわかる。

以上より、解の精度、計算速度の両面から SLP 法に比較して CONLIN 法の方が優れていることがわかる。そこで、以下では、CONLIN 法のみ解析例を示す。

表 1 SLP 法と CONLIN 法の計算時間の比較

|          | 再計算 1 回あたりの計算時間 |
|----------|-----------------|
| SLP 法    | 254 sec         |
| CONLIN 法 | 11 sec          |

CPU: Intel Pentium M 2.13GHz

図 13 は、図 1 と同じ設計領域で、境界条件と荷重条件を変えた場合の解析モデルを示す。

図 14 は、図 13 の設計領域に、図 2 と同じグラウンドストラクチャを生成し、支持点以外の下端の節点に 1kN の荷重を加えた場合の結果を示している。ただし、制約条件は、図 1 の解析例と同じである。図の左は、文献 10) の手法による解を、右は CONLIN 法による再計算 100 回の解を示している。図より、本手法による解は、文献 10) の解にほぼ一致することがわかる。

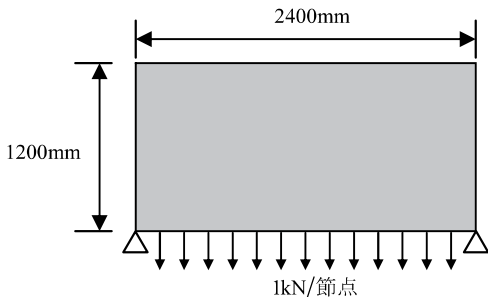


図 13 解析モデル

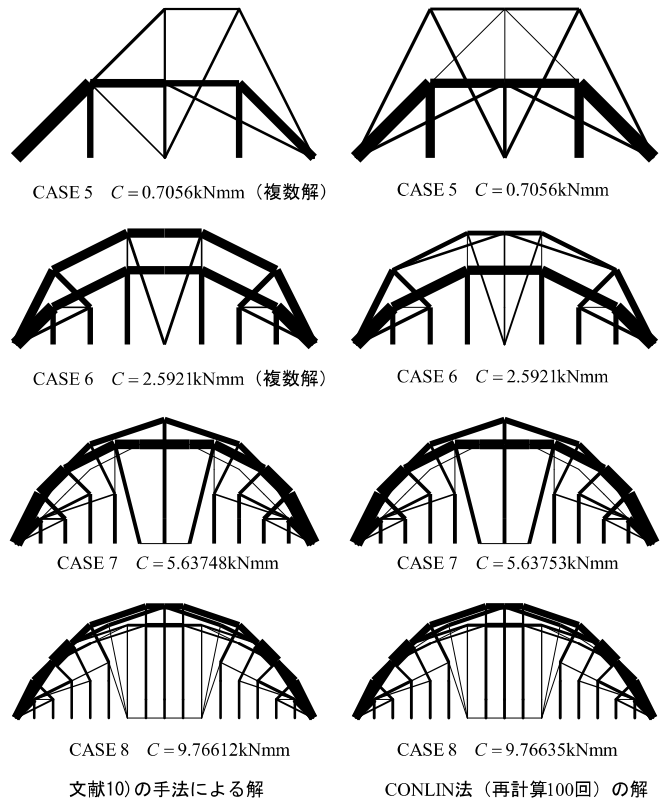


図 14 解析結果の比較

### 5. ペナルティ法の導入とその効果

第 4 章に示す方法をビルのファサード等の構造デザインに適用する場合、剛性を多少犠牲にしても、よりシンプルな形態を得たい場合がある。このような場合、細い要素の密度にペナルティを課す方法の導入が考えられる。ペナルティ法として最も簡単なものは、次式のように密度をべき乗にする方法である。

$$\mathbf{k}_i = \rho_i^p \mathbf{k}_i^0 \quad \rho_i \geq 0 \quad (14)$$

ここに、 $p$  はべき乗の係数であり、1 以上の値を与えることにより、大きい密度はより大きく評価され、小さい密度はより小さく評価されることになる。

本論文では、図 6 の再計算回数 9 回までは  $p=1$  とし、9 回以降、次式のように設定する。

$$\begin{aligned} p^{(n)} &= p \times 1.05^{(n-9)} & p^{(n)} < 2 \\ p^{(n)} &= 2 & p^{(n)} \geq 2 \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 $n$  は再計算回数、 $p^{(n)}$  は  $n$  回目のべき乗係数を表す。

図 15 は、第 4 章の解析例 CASE 1~CASE 8 に対して、(14)、(15) 式のペナルティ法を適用した結果を示している。ただし、再計算回数は 30 回としている。図より、厳密解と比較して、CASE 1、CASE 5 には、違いが見られるが、全体的には、厳密解と類似した位相となることがわかる。また、ペナルティを課すことにより、要素太さがより均等になり、細い部材が少なくなる傾向が見られる。しかし、トラスのグラウンドストラクチャでは、ペナルティの影響はあまり現れていないと言える。

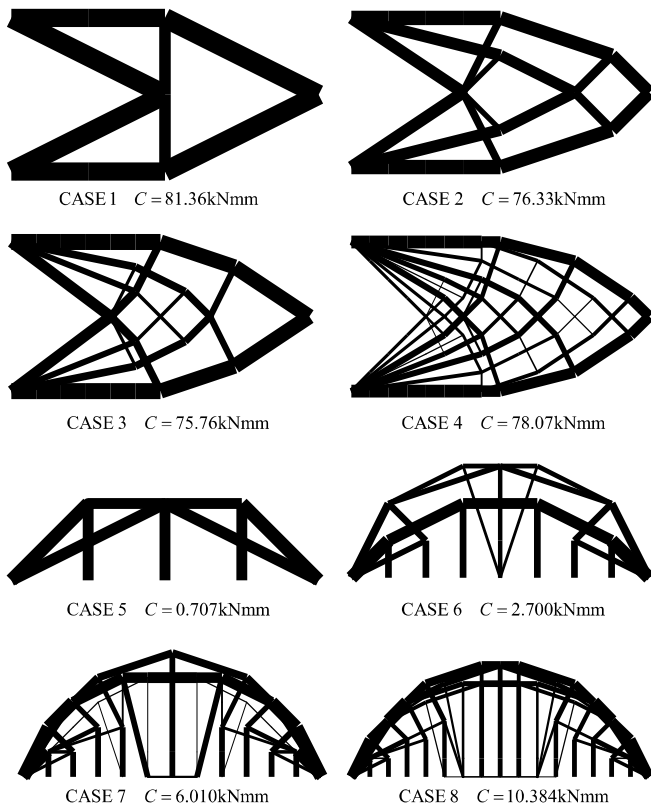


図 15 ペナルティを課した場合の結果 (再計算回数 30 回)

### 6. 骨組構造グランドストラクチャの解析例

次に、以上の解析法をビルファサード構造の形態創生に適用してみる。

図 16 は、解析モデルを示す。図 17 は、グランドストラクチャを示す。この場合、1000cm 以上の部材は、除いており、要素数は 581 となる。各要素の断面は 10cm×10cm としている。ただし、各階床部分には、設計対象としない梁 (断面: 30cm×60cm) を 48 要素付加している。荷重は、各階床の節点に均等な鉛直荷重 1kN と均等な水平荷重を加えている。ただし、水平荷重は、左右両方向に加えたものを別々に計算し、それぞれのコンプライアンスを加えたものを目的関数としている。また、質量制約は  $[0.2 \times (\text{総体積})]$  とし、再計算回数は 20 回としている。

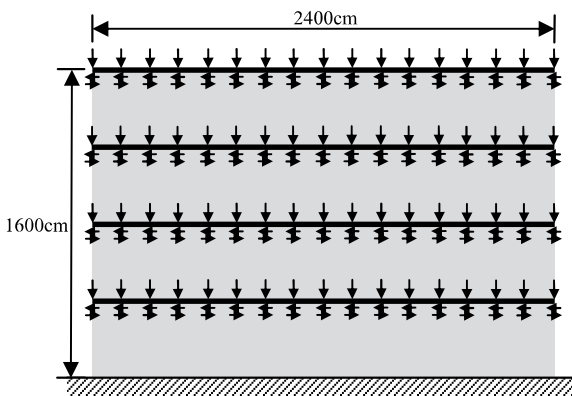


図 16 解析モデル

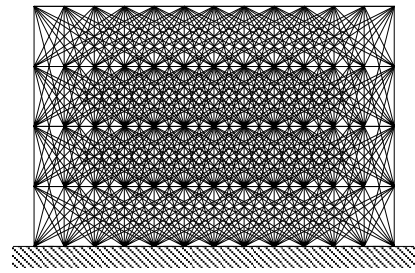


図 17 骨組構造のグランドストラクチャ

図 18 は、鉛直荷重のみを加えた場合の解析結果を示す。図の左は、第 5 章に示すペナルティ法を適用しない場合、右は、適用した場合の結果を示している。図より、ペナルティの効果により、柱の本数が少なくなっていることがわかる。

図 19, 20 は、鉛直荷重と鉛直荷重の 0.1 倍および 0.2 倍の水平荷重を加えた場合の結果を示す。これらの図より、水平荷重が大きくなるにしたがって柱がより斜めに傾くことがわかる。

図 21, 22 は、鉛直荷重と鉛直荷重の 0.2 倍の水平荷重を加えた場合で、基礎部を両端の 4 節点のみを固定した場合 (図 21) と、中央の 3 節点のみを固定した場合 (図 22) の結果を示す。

以上の結果より、ペナルティの効果により、構造の形態をより明確に示せること、荷重条件や境界条件を変化させることで、多種の構造形態を創生することが可能であることがわかる。

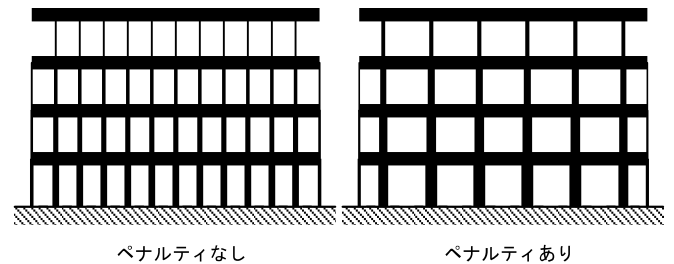


図 18 解析結果 (鉛直荷重)

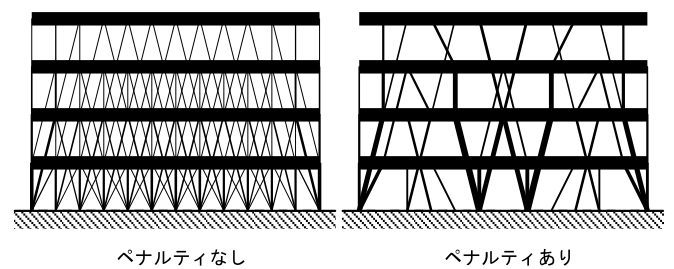


図 19 解析結果 (鉛直荷重+0.1 倍の水平荷重)

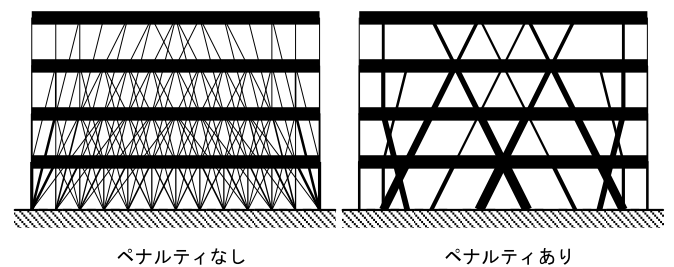


図 20 解析結果 (鉛直荷重+0.2 倍の水平荷重)



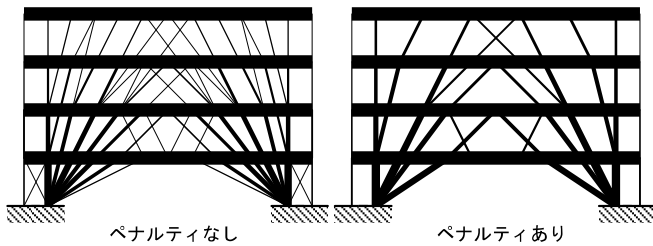


図 21 解析結果 (鉛直荷重+0.2 倍の水平荷重, 両端基礎)

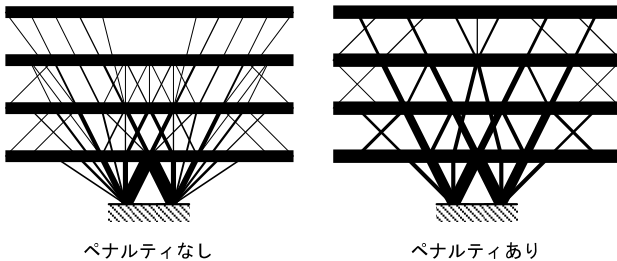


図 22 解析結果 (鉛直荷重+0.2 倍の水平荷重, 中央基礎)

なお, 図 18~図 22 では, 線の太さは, (要素密度×断面積) の大きさを示している. また, 以上の問題 (水平荷重が加わる場合) の計算時間は, CPU が Intel Pentium M 2.13GHz のパソコンで約 36 秒であった.

## 7. まとめ

本論文では, グランドストラクチャ法の解法として, 非線形計画法を用いる場合の問題点とその解決法を示した. 本論文で明らかになった点をまとめると以下ようになる.

1. 非線形計画法では, グランドストラクチャの要素数が増えると, 通常の改修計算では厳密解に収束しない.
2. 通常の改修計算で得られた解を初期値として再計算を繰り返す方法により, 要素数の多いグランドストラクチャにおいても厳密解に近い解を得ることができる.
3. SLP 法と CONLIN 法では, 計算効率, 解の精度の両面で CONLIN 法の方が優れている.

4. ペナルティ法の導入により, 解の位相を大きく変えずに, 細かい要素を減らせる.
5. 提案手法は, 接合部が剛接となる骨組グランドストラクチャにも適用可能であり, ビルのファサード構造のデザインなどに応用が可能である.

## 参考文献

- 1) コロキウム構造形態の解析と創生 2006 資料集, 日本建築学会, 1996.11
- 2) コロキウム構造形態の解析と創生 2007 資料集, 日本建築学会, 1997.10
- 3) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71**, 197-224, 1988
- 4) Bendsøe, M. P., Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **1**, 193-202, 1989.
- 5) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N., The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **89**, 309-336, 1991
- 6) Dorn, W., Gomory, R. and Greenberg, H., Automatic design of optimal structures. *J. de Mecanique*, **3**, 25-52, 1964
- 7) Rozvany, G.I.N., *Structural Design via optimality Criteria*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- 8) Rozvany, G.I.N. (ed.), *Topology Optimization in Structural Mechanics*, CISM Courses and Lectures 374, Springer, 1997
- 9) 河村拓昌, 大森博司, 遺伝的アルゴリズムによる立体トラス構造物の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 538 号, pp.115-121, 2000.12
- 10) 高田豊文, 松岡貴士, 体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジー最適化問題への線形計画法の適用, 日本建築学会構造系論文集, 第 598 号, pp.87-91, 2005.12
- 11) 藤井大地, 松本慎也, 藤谷義信, 菊池昇: グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化, 日本建築学会構造工学論文集, Vol.46B, pp.1-8, 2000
- 12) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣, 最適化手法 CONLIN を用いた骨組構造の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.548, 2001.10
- 13) 河村拓昌, 大森博司, 遺伝的アルゴリズムによる接合状態を考慮した離散的構造物の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 555 号, pp.121-128, 2002.5
- 14) Fleury, C. and Braibant, V., Structural Optimization: A new dual method using mixed variables, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.23, pp.409-428, 1986

(2008年4月8日原稿受理, 2008年8月12日採用決定)



## ESO 法とグラウンドストラクチャ法を用いた骨組構造物の位相最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF FRAME STRUCTURES  
USING ESO METHOD AND GROUND STRUCTURE METHOD

高坂憲治\*, 松本慎也\*\*, 藤井大地\*\*\*

Kenji KOSAKA, Shinya MATSUMOTO and Daiji FUJII

In this paper, a simple method for topology optimization of frame structures is proposed. In this method, ESO (Evolutionary Structural Optimization) method is applied to ground structure method. An exact optimal solution may not be obtained by ESO method because it is a heuristic method. However, the approximate solution useful for structural design can be obtained by this method. In the proposed method, the ground structure is generated by connecting all nodes by beam elements (but it is possible to limit the maximum length of the elements, and it is also possible to remove the unnecessary elements), and in the optimization process, the elements with the lowest strain energy are deleted based on ESO method. In order to demonstrate the effectiveness of the proposed method, in several numerical examples, the solutions obtained by the proposed method are compared with the solutions obtained by the density approach method (mathematical programming).

**Keywords:** Topology optimization, ESO method, Ground structure method, Frame structure, Computational Morphogenesis

位相最適化, ESO 法, グラウンドストラクチャ法, 骨組構造, 構造形態創生

## 1. はじめに

近年, 解析技術や生産・製造技術等の発達により, 様々な形態の建築物が造られるようになってきている。また, 3D プリンタの普及により, より軽量で剛性の高い構造形態を創生する技術の必要性が高まっている。位相最適化手法は, このようなニーズに応える形態創生手法の一つである。

このような位相最適化手法には, 連続体を対象とするものと骨組構造を対象とするものがある。骨組構造を対象とする方法は, 一般にグラウンドストラクチャ法<sup>1,2)</sup>と呼ばれており, 設計領域に適当な節点を配置し, 節点間を可能な限りの線要素で結んだグラウンドストラクチャに対して, 各線要素の材料密度 (または断面積) を最適化することで最適位相を求めるものである。特に, 建築構造は, 骨組構造として設計される場合が多いため, 骨組構造の位相最適化は, 建築構造の形態創生や耐震ブレース・制震ブレースの最適配置問題など幅広い応用分野が考えられる。

建築分野のグラウンドストラクチャ法による位相最適化の研究としては, トラス構造 (ピン接合) を対象とした河村, 大森の研究<sup>4)</sup>, 高田, 松岡の研究<sup>5)</sup>, 骨組構造 (剛接合) を対象とした藤井らの研究<sup>6-8)</sup>, 河村, 大森の研究<sup>9)</sup>などが挙げられる。河村, 大森の研究では, 最適化手法として GA (Genetic Algorithm) が用いられており, 高田, 松岡の研究では線形計画法が, 藤井らの研究では非線形計画

法が用いられている。また, これまでの研究では, 骨組の各要素の材料密度 (または断面積) を最適化することで位相を求めるため, 解として得られた位相の各要素の太さは一般に異なっている。特に, 高田, 松岡の方法<sup>5)</sup>では, 断面積の上限が制約されていないため, 部材太さが大きく異なる場合も見られる。また, 藤井ら方法<sup>6-8)</sup>は, 連続体の SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法と同様に材料密度の 0/1 問題としても解けるため, 原理的には部材太さを均一に近づけることも可能だが, 多くの場合中間密度 (細い部材) が残る。一方, 河村, 大森<sup>9)</sup>の方法で用いられている GA では, このような問題は容易に解決できるが, 部材数が多くなると計算効率が悪く, 計算負荷の大きい動的問題や非線形問題への応用が難しい。

一方, 連続体の位相最適化では, 中間的な材料密度を完全に除く方法として, Xie, Steven らによって提案された ESO 法<sup>10)</sup>および BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) 法<sup>11)</sup>がある。本方法は, 最適解への収束の保証が無い発見的な手法ではあるが, 剛性最大化問題では, 数値計画法にもとづく SIMP 法に比較しても遜色の無い方法であることが示されている<sup>12)</sup>。また, 本方法は, 骨組問題 (グラウンドストラクチャ法) にも応用されている<sup>13)</sup>。

そこで本研究では, 文献 13) の方法に着目し, この方法を応用することで, 建築骨組の形態創生, あるいは耐震ブレースや制震ブレースの最適配置問題に利用できないかを検討する。ただし, 本研究

\* 近畿大学大学院 大学院生

\*\* 近畿大学工学部 准教授・博士(工学)

\*\*\* 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

Grad. Stud., Graduate School of Systems Engineering, Kinki University  
Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.  
Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.

で提案する方法は、既往の研究のように部材断面積（材料密度）を連続的（段階的）に変化させるのではなく、ひずみエネルギー密度の小さい部材（要素）を順に除いていく単純な方法で、問題によっては、文献 14 に指摘されているように最適解を見逃す可能性もある。しかしながら、建築構造設計を考える場合、最適解が必ずしも実用的な解とはならないため、最適解に近い優良解（初期設計を改善する解）が得られれば、実務上は十分有効に活用できると考えられる。

以下本論文 2 章では、提案手法の有効性を確かめるために比較に用いる文献 8,15 に示すグラウンドストラクチャ法の概要を示す。3 章では、提案手法である ESO 法をグラウンドストラクチャ法に適用する方法を示す。4 章では、提案手法と従来法との比較により、提案手法の有効性を検証する。5 章では以上のまとめを述べる。

## 2. 比較に用いるグラウンドストラクチャ法

比較に用いるグラウンドストラクチャ法<sup>8),15)</sup>では、節点間をすべての可能な線要素で連結したグラウンドストラクチャに対して、 $i$  番目要素の剛性マトリクス  $\mathbf{k}_i$  を要素密度  $\rho_i$  を用いて次式のように表す。

$$\mathbf{k}_i = \rho_i^p \mathbf{k}_i^0 \quad 0 < \rho_i \leq 1 \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{k}_i^0$  は初期の要素剛性マトリクス、 $p$  はべき乗の係数であり、1 より大きい値を与えることにより、 $0 < \rho_i < 1$  の場合、実際の密度より  $\mathbf{k}_i$  が小さく評価される。ただし、文献 8,15 では、密度の上限は制約していないが、ここでは上限を 1 に制約している。

位相最適化問題は、設計変数  $\mathbf{p} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_N\}$  に対して、質量制約下でコンプライアンスを最小化する次の問題として定式化される。

$$\begin{aligned} \min C(\mathbf{p}) &= \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{f} \\ \text{subject to } m(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^N \rho_i A_i l_i \leq \bar{m}, \quad 0 < \rho_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $C$  はコンプライアンス、 $\mathbf{d}, \mathbf{f}$  は節点変位ベクトルと節点外力ベクトル、 $\mathbf{K}$  は全体剛性マトリクス、 $m$  は質量、 $N$  は要素数、 $A_i, l_i$  は  $i$  番目要素の断面積と長さ、 $\bar{m}$  は質量の制約値を表す。

本論文では、(2)式の最適化問題を CONLIN 法<sup>8),15)</sup>を用いて解く。ただし、CONLIN 法の改修計算回数は 40 としている。しかしながら、本問題は、初期値依存性の高い多峰性問題であるため、1 回の最適化計算では大域的最適解に収束しない場合がある。そこで、文献 8,15 では最適化計算で得られた解を再度初期値として同じ最適化計算を繰り返す方法を用いており、本論文でもこの方法を採用する。なお、この最適化計算の繰り返し回数を再計算回数と呼ぶ。また、文献 8,15 では、(1)式のべき乗係数  $p$  を再計算にしたがって 1 から徐々に増加させる方法を用いているが、ここでは  $p$  は初期に与えた値で固定する。

## 3. ESO 法を用いたグラウンドストラクチャ法

ここでは、初期の ESO 法<sup>10)</sup>の考え方にもとづき、非常にシンプルな計算アルゴリズムを提案する。

まず、グラウンドストラクチャの作成法は従来どおりである。文献 15 には、Excel によるプリプロセスでグラウンドストラクチャを自動生成するソフトが提供されているので参照されたい。本ソフトでは、生成される要素長さの上限を設定でき、また、設計対象要素と非設

計対象要素を区別できるようになっている。

本方法では、以上のグラウンドストラクチャに対して以下の計算アルゴリズムを適用する。

- ① グラウンドストラクチャの静的弾性解析を行い、各設計対象要素のひずみエネルギー密度を計算する。なお、(1), (2)式の表記を用いれば  $i$  番目要素のひずみエネルギー密度  $V_i$  は次式により計算される。

$$V_i = (1/2) \mathbf{d}_i^{eT} (\rho_i \mathbf{k}_i^0) \mathbf{d}_i^e / (A_i l_i) \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{d}_i^e$  は  $i$  番目要素の節点変位である。また、要素密度  $\rho_i$  は、残存している要素は 1 とし、除去要素は  $1/10^3$  とする。なお、除去要素の密度を 0 としないのは、不安定構造になった時の連立方程式の特異性を避けるためである。

- ② 設計対象要素（残存要素）の要素番号をひずみエネルギー密度の小さい順に並べる。
- ③ 最もひずみエネルギー密度の小さい要素番号の要素をグラウンドストラクチャから除去する。なお、同じ最小ひずみエネルギー密度の要素が複数ある場合は、複数除去する。（これは対称性を有する構造の対称性を保つための処置でもある。）
- ④ すべての設計対象要素が無くなるまで①～③を繰り返す。
- ⑤ 汎用可視化ソフトを用いて、すべての除去ステップを参照し、優良解を選定する。

以上のプロセスを図 1 の簡単なトラスの例題で示す。図 1 には、解析モデルとすべての除去ステップを汎用可視化ソフトで表示した結果を示している（上記プロセス⑤）。図に示すように、各ステップでひずみエネルギー密度が最小となる要素が 1 要素ずつ除去されていることがわかる。図中、Step2 と Step4 は不安定構造となっているが、除去要素の密度を  $1/10^3$  としているため解が得られている。

以上のように、本手法は、非常に単純であり、また、中間密度が無いいため、解の選択も容易であることがわかる。

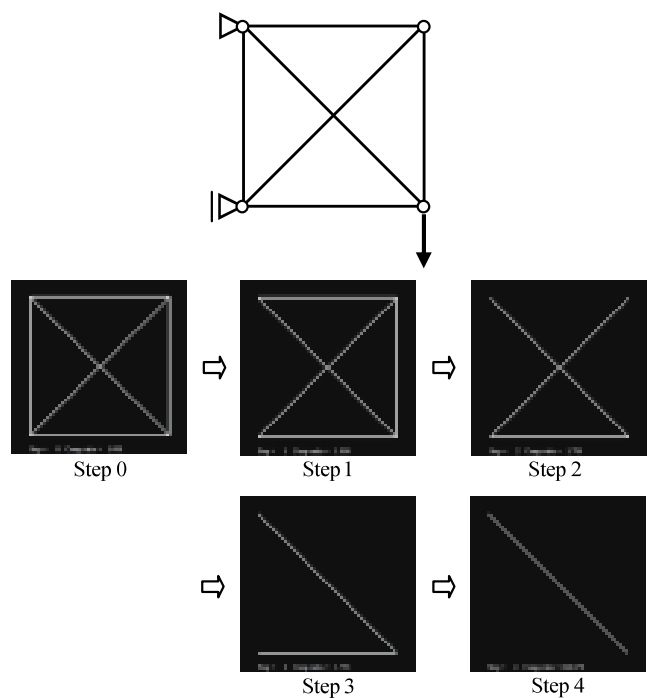


図 1 トラスの解析モデルと解析プロセス

#### 4. 解析例

ここでは、3章で提案した単純な手法（提案手法）の有効性を、2章に示す数値計画法にもとづく手法（以下比較手法と呼ぶ）との比較により検証する。

##### 4.1 9 節点トラス構造の位相最適化

図2は、基本的なトラス構造のグランドストラクチャを示す。部材断面積はすべて等しく、接合部および支点はピン接合である。

図3は、Case A について3章に示す提案手法の全ステップの解析結果を示している。図中には、各ステップのコンプライアンス比  $C/C^0$  ( $C^0$  は0ステップのコンプライアンス) も示している。図3において、Step 3, 6, 7 は不安定構造であるが、除去要素が微小密度 ( $1/10^3$ ) を有しているため解が得られている。また、Step 3, 4 は、剛性に寄与しない要素を除くと Step 5 と同じになる。図4は、2章に示す比較手法の解析結果 (Case A) を示す。ただし、(1)式のべき乗数  $p$  と質量制約  $\bar{m}/m^0$  ( $m^0$  は初期構造の質量) は、図に示すとおりである。再計算回数は30としている。図3と図4を比較すると、図4の比較手法の最適位相は提案手法の Step 5 で得られていることがわかる。

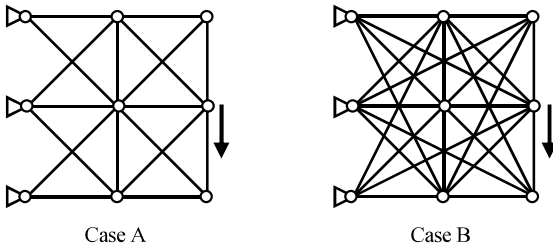


図2 解析例1 (9 節点トラス)

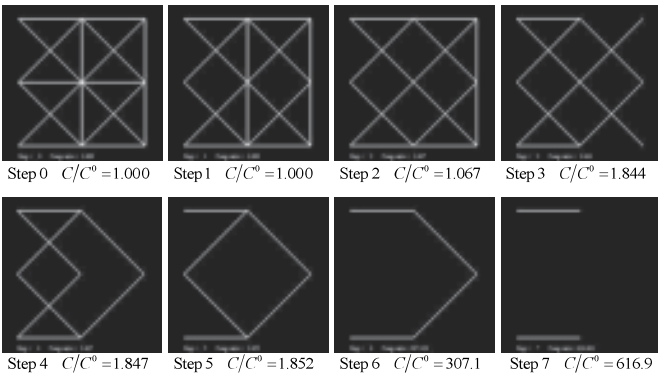


図3 解析例1 (Case A) の提案手法による解析結果

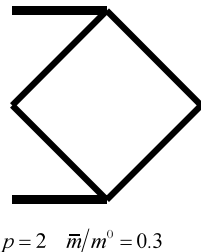


図4 解析例1 (Case A) の比較手法による解析結果

図5と図6は、Case B について、提案手法の全ステップの解析結果と比較手法の解析結果を示している。ただし、比較手法の質量制約とべき乗数  $p$  は図に示すとおりで、再計算回数は1回としている。図より、この場合も、比較手法の  $\bar{m}/m^0 = 0.3$ ,  $\bar{m}/m^0 = 0.1$  の解は提案手法の Step 9, Step 11 の解と一致することがわかる。

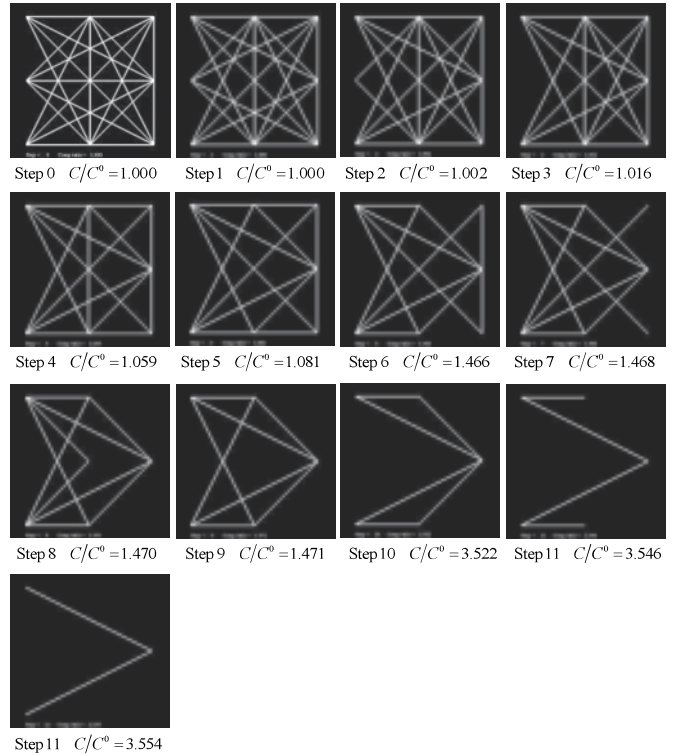


図5 解析例1 (Case B) の提案手法による解析結果

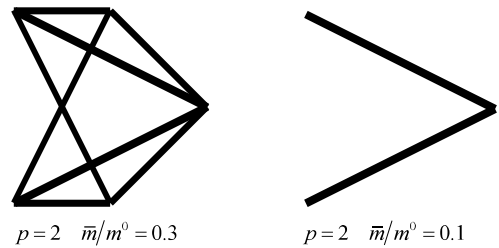


図6 解析例1 (Case B) の比較手法による解析結果

##### 4.2 15 節点トラス構造の位相最適化

次に、図7は、15 節点のトラス構造のグランドストラクチャを示す。ただし、Case A と Case B では、支持点と荷重点の位置が異なる。図8, 図9は、提案手法の解と比較手法の解を比較したものである。ただし、比較手法の質量制約は  $\bar{m}/m^0 = 0.1$ , 再計算回数は100としている。これらの図より、Case A は似通った位相、Case B は一致した位相が得られていることがわかる。ただし、コンプライアンス値の比較では、比較手法の結果は部材太さが異なるため、得られた解の部材断面積をすべて均一にして再計算したものと比較している。その結果、図中に示すように比較手法の解と提案手法の解のコンプライアンス比は、Case A では0.992, Case B では1.000となった。したがって、Case A では、提案手法の解の剛性が比較手法の解の剛性に比較してやや小さいことがわかる。

以上の結果より、トラス問題では、図7のCase Aを除いて、提案手法により比較手法の最適位相と一致した解が得られることがわかった。なお、図7のCase Aについては、部材太さの不均一性が影響しているのではないかと考え、試しに、3章に示す方法で、最小ひずみエネルギー密度の要素をすぐに除去するのではなく、要素密度を $1 \rightarrow 0.5 \rightarrow 1/10^3$ と、2段階で除去する方法で再度解析を行ってみた。その結果、図10に示すように、鉛直部材のみ密度0.5となる位相が得られ、部材太さを均一にすると、比較手法の解のコンプライアンスよりも小さくなった。したがって、より最適な位相を得るためには、要素密度を段階的に小さくする方法も考えられるが、その分、解析ステップ数も増加し、また、中間密度が残ることにより複雑な位相となる場合もあるため、本論文では採用しない。

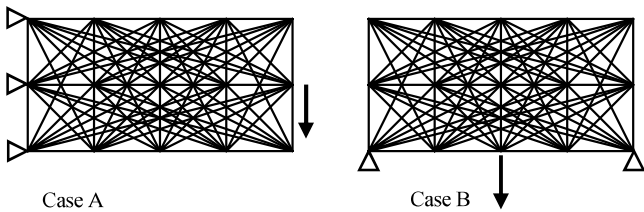


図7 解析例2 (トラス)

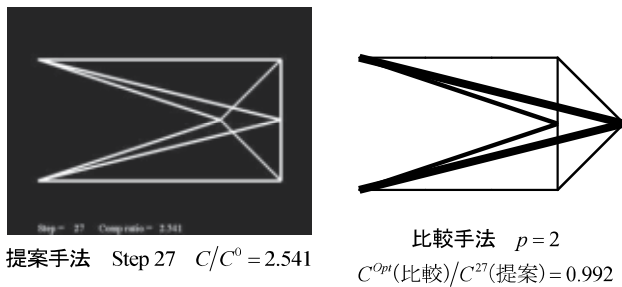


図8 解析例2 (Case A) の解析結果の比較

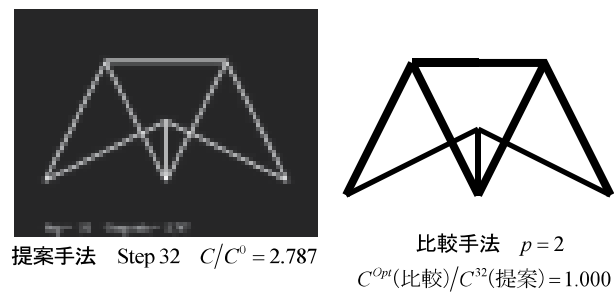


図9 解析例2 (Case B) の解析結果の比較

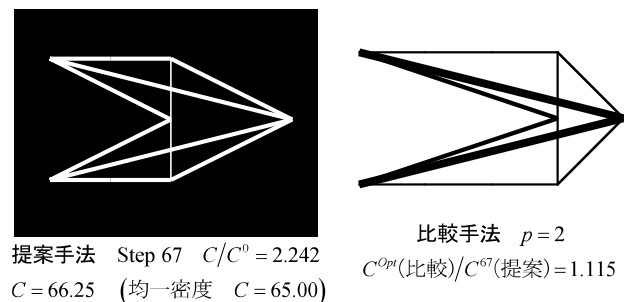


図10 要素密度を2段階に変化させた場合の解析結果の比較

### 4.3 剛接骨組構造の位相最適化

図11は節点数35の剛接骨組構造の解析モデルとそのグランドストラクチャを示したものである。部材断面積は均一とし、ヤング係数は206GPa、荷重は1kN/cmの鉛直等分布荷重と0.2kN/cmの水平等分布荷重を一番上の梁(水平材)に加えている。ただし、荷重が加わる梁の要素密度は固定(非設計対象要素)とし、それ以外の全部材を設計対象要素とする。なお、鉛直荷重による解析と水平荷重による解析は別々に行っている(1ステップ2回の解析)。

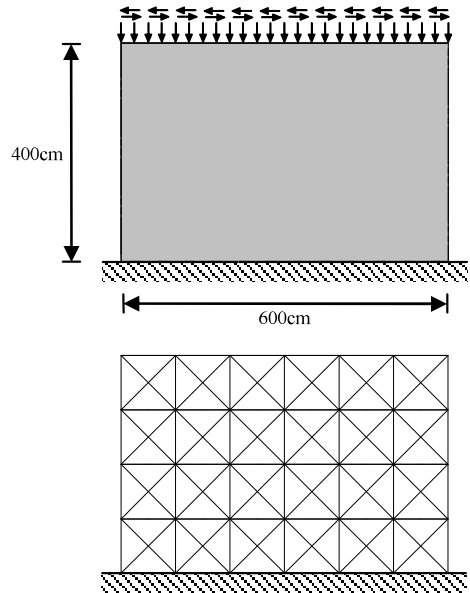


図11 解析例3の解析モデルとグランドストラクチャ

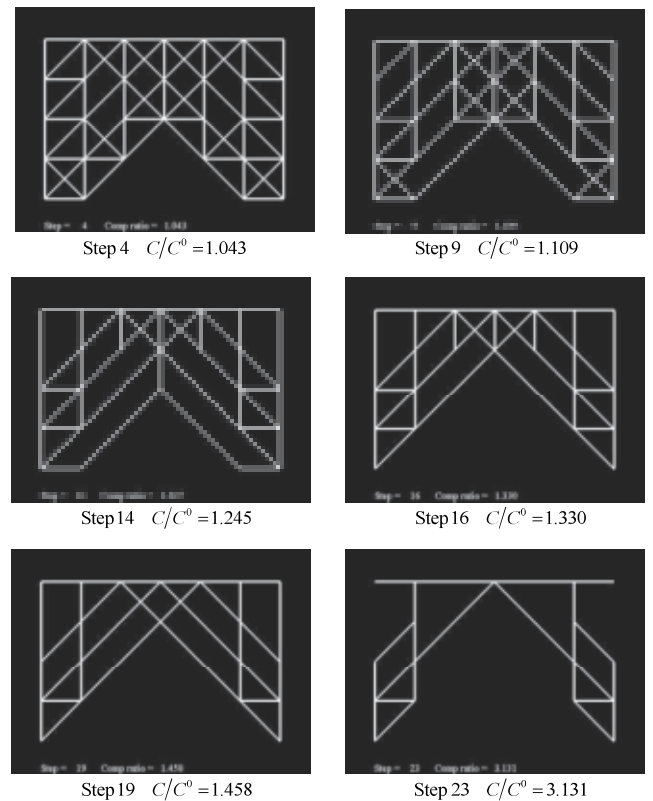


図12 解析例3の提案手法による解析結果

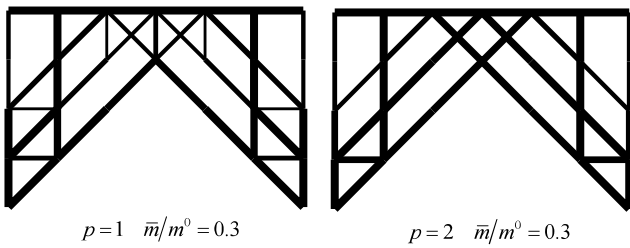


図 13 解析例 3 の比較手法による解析結果

図 12 は、提案手法の解の中から適当に抽出したステップの解を示している。また、図 13 は、比較手法によって得られた解を示している。ただし、質量制約  $\bar{m}/m^0$  およびべき乗数  $p$  は図に示すとおりであり、再計算回数は 10 としている。図 12 と図 13 を比較すると、比較手法の  $p=1$  の解は、提案手法の Step 16 の解と一致しており、 $p=2$  の解は、Step19 の解と一致していることがわかる。

したがって、提案手法では、剛接骨組構造においても、比較手法と同じ最適位相が得られることがわかる。ただし、比較手法では、質量制約やペナルティに用いるべき乗数等の計算条件によって様々な解が得られるため、提案手法と比較手法の解が一致するのは、ある特定の計算条件の解であることに注意が必要である。

#### 4.4 骨組構造の形態創生

図 14 は、ビルのファサードの形態創生解析モデルとそのグランドストラクチャ<sup>15)</sup>を示したものである。グランドストラクチャの部材はすべて 10cm×10cm の中実断面とし、床梁のヤング係数は鋼材を想定し 206GPa、柱および斜材のヤング係数は鉄筋コンクリートを想定し 20.6GPa とし、荷重は 1kN/cm の鉛直等分布荷重と 0.2kN/cm の水平等分布荷重を床梁に加え、床梁は非設計対象要素としている。

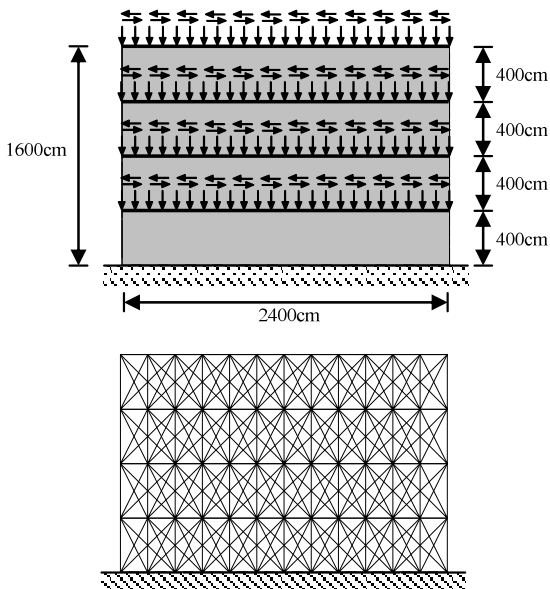


図 14 解析例 4 の解析モデルとグランドストラクチャ

図 15 は、提案手法の解の中から適当に抽出したステップの解を示している。図 16 は、比較手法によって得られた解を示している。ただし、比較手法の質量制約およびべき乗数は図に示すとおりであり、

再計算回数は 30 としている。図 15 と図 16 を比較すると、比較手法の  $\bar{m}/m^0=0.2$  の解は、提案手法の Step 103 あたりの解が類似しており、 $\bar{m}/m^0=0.1$  の解は、Step116 あたりの解が類似していることがわかる。しかしながら、ファサードデザインを考える場合、提案手法の Step 123, Step128 のような解も設計のヒントを与えると思われる。したがって、このようなシンプルな形態まで求められるのは提案手法の利点と言える。また、比較手法では中間密度にペナルティを与えても最適位相の部材太さに違いが見られるのに対して、提案手法では部材太さが変わらない位相を求められるところも利点である。

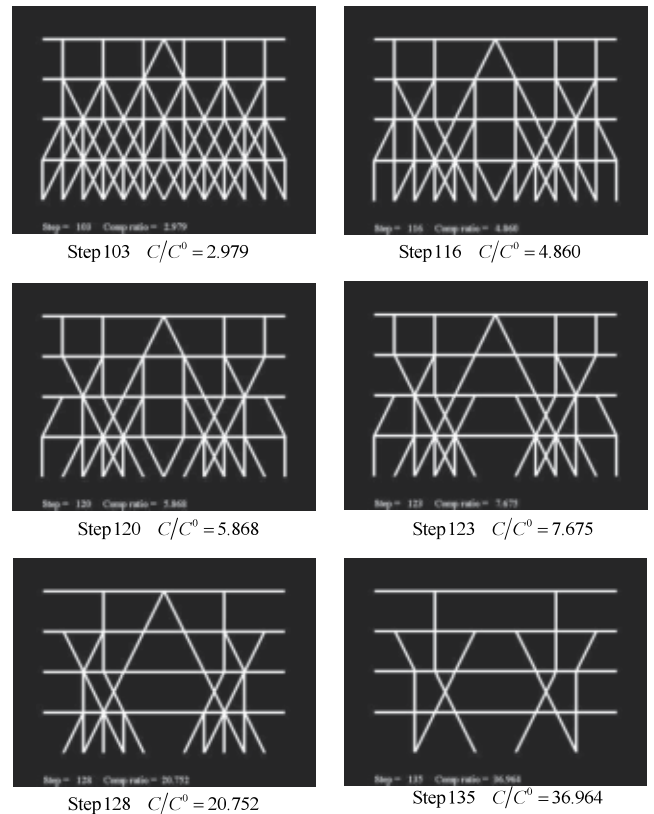


図 15 解析例 4 の提案手法による解析結果

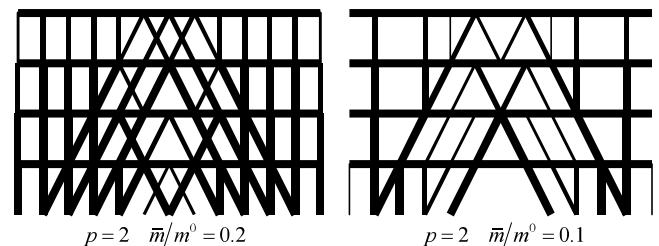


図 16 解析例 4 の比較手法による解析結果

図 17 は、提案手法の Step 123 から考えたファサードデザインの一例である。ただし、このファサードは、鉄筋コンクリート構造をイメージし、型枠が製作しやすいよう、Step 123 の部材をある程度統合し、力の流れを考慮したデザインとしている。また、図 18 は、図 17 のファサードを用いた建物の外観イメージパースである。これらの図より、意匠設計者が、提案手法で得られた位相をもとに、建物の構造デザインを行うことは十分可能であると考えられる。

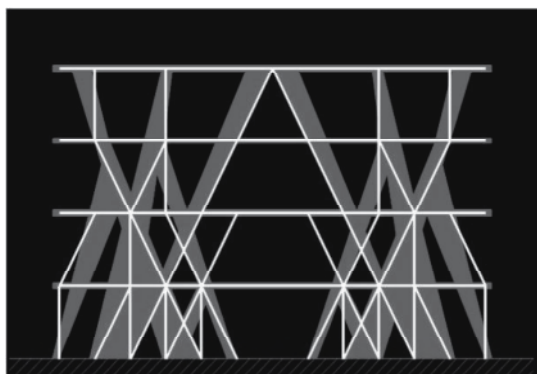


図 17 ファサードデザイン例



図 18 外観イメージパース

## 5. まとめ

本論文では、グランドストラクチャ法に初期の ESO 法（双方向ではなく一方向）の考え方を適用した骨組構造の簡易的な位相最適化手法を提案した。そして、提案手法により得られる解と従来の線要素の材料密度を連続的に変化させて最適位相を求める方法（比較手法）との解を比較し、提案手法の有効性を検証した。その結果、以下のような知見が得られた。

- (1) トラス構造の位相最適化問題では、提案手法により、比較手法の最適解の位相と一致するかあるいは類似する位相が得られ、また、類似する位相もコンプライアンスは大差なく、最適解に近い優良解となることがわかった。
- (2) 剛接骨組構造の位相最適化問題でも、比較手法において、適当な質量制約と解析パラメータを設定することで、提案手法と一

致する最適位相が得られることがわかった。

- (3) 建築物のファサードデザインを創生する問題では、提案手法と比較手法の解は類似性を持っているが、完全に一致する位相は得られなかった。しかしながら、提案手法では、位相の変化がステップごとに参照できるため、力の流れを把握しやすく、これらをもとに、力学的な合理性を有する構造デザインを考えることは十分可能であることがわかった。

以上の結果より、本提案手法は、すべての場合に必ずしも最適解を与えるものではないが、構造設計や構造デザインに対して、明確な提案を与えることができ、また、計算アルゴリズムも非常に簡単であることから、動的問題や非線形問題など幅広い分野に適用が可能であることがわかった。なお、本手法の最終解に到達するまでの計算時間は解析例 4 においても通常のパソコンで数秒であり、計算負荷は小さいことを付記しておく。

今後は、以上の方法を時刻歴応答問題に拡張し、制震ブレースの最適配置問題への適用を検討する予定である。

## 参考文献

- 1) Dorn, W., Gomory, R. and Greenberg, H. : Automatic design of optimal structures. *J. de Mecanique*, 3, 25-52, 1964
- 2) Rozvany, G.I.N. : *Structural Design via optimality Criteria*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- 3) Rozvany, G.I.N. (ed.) : *Topology Optimization in Structural Mechanics*, CISM Courses and Lectures 374, Springer, 1997
- 4) 河村拓昌, 大森博司: 遺伝的アルゴリズムによる立体トラス構造物の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 538 号, pp.115-121, 2000.12
- 5) 高田豊文, 松岡貴士: 体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジー最適化問題への線形計画法の適用, 日本建築学会構造系論文集, 第 598 号, pp.87-91, 2005.12
- 6) 藤井大地, 松本慎也, 藤谷義信, 菊池昇: グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化, 構造工学論文集, Vol.46B, pp.1-8, 2000.3
- 7) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣: 最適化手法 CONLIN を用いた骨組構造の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.548, pp.59-66, 2001.10
- 8) 藤井大地, 真鍋匡利, 高田豊文: グランドストラクチャー法による建築構造の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 633 号, pp.1967-1973, 2008.11
- 9) 河村拓昌, 大森博司: 遺伝的アルゴリズムによる接合状態を考慮した離散的構造物の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 555 号, pp.121-128, 2002.5
- 10) Xie, Y. M., Steven, G. P. : A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Computers and Structures* Vol.49, pp.885-886, 1993
- 11) Young, V., Querin, O. M., Steven, G. P. and Xie, Y. M. : 3D and Multiple Load Case Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization (BESO), *Structural Optimization*, Vol.18, pp.183-192, 1999
- 12) Huang, X., Xie, Y. M. : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.43, pp.1039-1049, 2007
- 13) Steven, G. P., Querin, O. M., Xie, Y. M. : Evolutionary structural optimisation (ESO) for combined topology and size optimisation of discrete structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vo.188, pp.743-754, 2000
- 14) Zhou, M., Rozvany, G.I.N. : On the validity of ESO type methods in topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.21, pp.80-83, 2001
- 15) 藤井大地: 建築デザインと最適構造, 丸善, 2008



# TOPOLOGY OPTIMIZATION OF FRAME STRUCTURES USING ESO METHOD AND GROUND STRUCTURE METHOD

*Kenji KOSAKA* \*, *Shinya MATSUMOTO* \*\* and *Daiji FUJII* \*\*\*

\* Grad. Stud., Graduate School of Systems Engineering, Kinki University

\*\* Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.

\*\*\* Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.

In this paper, a simple method for topology optimization of frame structures is proposed. In this method, ESO (Evolutionary Structural Optimization) method is applied to ground structure method. An exact optimal solution may not be obtained by ESO method because it is a heuristic method. However, the approximate solution useful for structural design can be obtained by this method. In the proposed method, the ground structure is generated by connecting all nodes by beam elements (but it is possible to limit the length of the elements, and it is also possible to remove the unnecessary elements), and in the optimization process, the elements with the lowest strain energy are deleted based on ESO method.

The algorithm of the proposed method is as follows.

- ① The ground structure is analyzed by a static-elastic finite element analysis, and the strain energy density of all elements are calculated.
- ② The element number of survived elements are arranged in ascending order of strain energy density.
- ③ The element with the most small strain energy density is eliminated. Also, if there are multiple elements which densities are equal to minimum one, these elements are eliminated all.
- ④ The process from ① to ③ is iterated until all the elements are eliminated. (See Fig.1)
- ⑤ The solutions of all steps are displayed by visualization software (for example Micro AVS), and the user (designer) select an adapted one from these solutions.

In order to demonstrate the effectiveness of the present method, in several numerical examples, the solutions obtained by the proposed method are compared with the solutions obtained by the density approach (mathematical programming method). As a conclusion, the following knowledge were obtained.

- (1) In the topology analysis of truss structure, almost solutions obtained by the proposed method were coincide with ones obtained by the density approach. Also, even if a different solution had been obtained, both solutions were similar. (Fig.2~Fig.10)
- (2) In the topology analysis of frame structures with rigid connection, the matching solutions could be obtained, if the adaptive parameters (for example mass limit, penalty coefficient, etc.) were given for the density approach. (Fig.11~Fig.13)
- (3) In the topology analysis of frame structure for facade design, the perfect matching solution could not be obtained. However, the solutions of both methods were similar. Therefore, the user (designer) can design the facade concept of buildings using the solutions obtained by the proposed method, because the solutions of each steps show that how receive the force each member. (Fig.14~Fig.18)

(2015年9月10日原稿受理, 2015年11月26日採用決定)

## ESO法を用いた高層ビルの制振ダンパー構面配置の最適化

### OPTIMIZATION OF PLACEMENT OF RESPONSE CONTROL DAMPER ON PLANE OF HIGH-RISE BUILDING STRUCTURE USING ESO METHOD

野村将貴\*, 松本慎也\*\*, 崎野良比呂\*\*, 藤井大地\*\*\*

*Masataka NOMURA, Shinya MATSUMOTO, Yoshihiro SAKINO  
and Daiji FUJII*

Recently, response control dampers are used to improve seismic response of high-rise building. In general, it is required to arrange the dampers efficiently on the plane of high-rise building structure. However, it is not easy to obtain the optimal placement of the dampers, because the damper's performance depends on the dynamic behavior. Therefore, in this paper, a method to obtain an optimal placement of the response control dampers on the plane of high-rise building structure is proposed. In the present method, first, the dampers are placed on all possible places in the frame structure, and then the dampers are gradually removed by Evolutionary Structural Optimization (ESO) method. The accumulated damping energy of the damper is used to determine the removal order. The effectiveness of the present method is verified by comparison with general placement plans.

**Keywords:** *Optimal placement, Response control damper, ESO method, Ground structure method, Topology optimization*

最適配置, 制振ダンパー, ESO法, グランドストラクチャ法, 位相最適化

#### 1. はじめに

建築物の地震応答を低減する方法として, 建築物の骨組構造に地震エネルギー吸収装置(制振ダンパー)を設置する制振構造がある。粘性系ダンパーを用いた制振構造は, 建築物の固有周期をほぼ変化させることなく地震応答を低減できるため, 最近では高層ビルの長周期地震動に対する応答を低減する方法としても用いられている。

このような制振構造では, 建築物の頂部または第一層に集中的に制振ダンパーを配置する方法もあるが, 一般的には構造体の各層に分散的に制振ダンパー配置する層間設置型がよく用いられる。この層間設置型では, 制振ダンパーの配置方法として, 連層配置, 市松配置, 下層集中配置, 複数層への分散配置など様々な配置方法がある。また, 構造用の条件とは別に, 建築物の用途や計画上の理由によって, ダンパーを設置できる空間が制約されることがある。したがって, 制振構造の設計において, 制振ダンパーの適切な配置を見つけることは容易ではない。特に, ダンパーの設置場所や設置数に制限がある場合, 効果的な制振ダンパーの配置には, 豊富な設計経験と解析的な試行錯誤が必要となる。

このため, ダンパーの最適配置を求める手法として, 数理計画法等を用いて最適化問題を解く最適化手法の適用が研究されてきた。最近の研究として, 辻ら<sup>1)</sup>は, 多層建物の層間設置型オイルダンパーの性能を最適化するとともに最適配置設計を行う方法を提案し,

関連の既往の研究を整理している。これによれば, 層間設置型ダンパーの基本特性量や最適配置を求める方法を提案した既往の研究として, 文献2)~6)が挙げられている。また, この他にも高層ビルへの適用例として, 上谷ら<sup>7)</sup>の研究が挙げられる。しかし, これらの研究は, 層ごとのダンパー性能を決定するもので, 構面上のダンパー配置を決定するものではない。これは, 構面上の配置問題になると, ダンパー配置の組み合わせパターンは指数関数的に増加するため, 数理計画法等で有効な配置を求めることは容易ではないと考えられる。しかしながら, 制振ダンパーがビルの窓等に設置される場合, 制振ダンパーの配置がビルのファサードデザインにも影響を与えるため, 構面内の最適配置が簡単に求まれば, 建築計画・構造計画においても有用なツールとなりえる。

そこで, 久保, 藤井ら<sup>8,9)</sup>は, 解析上, すべての設置可能箇所に制振ダンパーを配置し, 数理計画法による位相最適化手法を用いて, 構面上のダンパーの有効な配置を求める方法を提案している。しかし, 動的解析にこのような方法を適用するには, 感度解析が難しく, ここでは地震力を静的な外力(Ai分布)に置き換える方法を用いている。したがって, この方法は, 制振ダンパーの最適配置が全体剛性を最大化する耐震ブレースの最適配置と同等であるという仮定に基づいた方法であり, ダンパーの動的特性を考慮したものではない。

そこで, 本論文では, 同じグランドストラクチャ法に, 感度解析

\* 近畿大学大学院 大学院生  
\*\* 近畿大学工学部 准教授・博士(工学)  
\*\*\* 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

Grad. Student, Graduate School of Kindai University  
Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr.Eng.  
Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr.Eng.

が必要ない ESO 法 (Evolutionary Structural Optimization) を適用し、地震動加速度を用いた時刻歴応答解析により、制振ダンパーの最適配置を求める方法を提案する。本方法は、まず、ビルの骨組構面上のすべての配置可能箇所にダンパーを配置し、次に、この骨組構面の動的応答解析によって各ダンパーの累積減衰エネルギーを計算し、この減衰エネルギーの小さい順にダンパーを除去していくという非常に単純な方法である。なお、この方法は、静的解析における同様の方法<sup>10)</sup>を動的解析に応用したもので、すでに、静的解析においては、ひずみエネルギー密度の小さい順に部材を除去することで、全体剛性を最大化する最適解またはそれに類似した解が得られることを確かめている。

本論文では、まず、基本的な例題で本手法の有効性を検証した後、本方法を高層ビル構面におけるダンパー配置問題に適用し、一般的な配置法との比較により本手法の有効性を検証する。なお、本論文では、提案手法の基本的な特性を把握することが目的であるため、ダンパーは、ダッシュポットとしてモデル化し、解析は線形の範囲で行う。また、提案手法は、複数の性能の異なるダンパーを用いる場合にも、累積減衰エネルギーの小さいダンパーからより性能の低いダンパーに置き換え、それが最低限の性能であれば除去するという段階的除去法を用いれば適用可能であるが、本論文では、簡単のためダンパー性能は 1 種類とする。

## 2. ESO 法を用いた制振ダンパーの配置法

本論文で提案する手法は、文献 10) に提案した、初期の ESO 法<sup>11)</sup>の考え方にもとづく非常にシンプルな方法を制振ダンパーの最適配置問題に応用したものである。

Fig.1 に示す簡単な例題で本手法を説明すると、まず、Fig.1a に示すように、設計上すべての設置可能箇所に制振ダンパーを配置する。なお、本論文では、これをグラウンドストラクチャと呼んでいる。次に、Fig.2 に示すようにダンパーをダッシュポットに置き換えて地震応答解析 (時刻歴応答解析) を行い、各ダンパーの累積減衰エネルギーを計算し、これが最も小さいダンパーを除去する。この場合、Fig.1b のように最上層のダンパーが除去される。次に、Fig.1b の骨組に対して再度地震応答解析を行い、累積減衰エネルギーが最も小さいダンパーを除去する (Fig.1c)。以上の過程をすべてのダンパーが除去されるまで繰り返す (d~f)。そして、設計者は、骨組の最大変位や最大層間変位等を参考に、以上の除去過程で得られたダンパー配置 (b~f) の中から適当なものを選択する。

解析には骨組有限要素法<sup>12)</sup>を用いるものとして、以上の過程をもう少し理論的に説明すると次のようになる。まず、設置可能なダンパー数を  $N$  とし、各ダンパーをダッシュポットに置き換えた時のダッシュポットの粘性減衰係数を  $c$  とする。このとき、ダッシュポットの減衰力は、Fig.3 より次のように定義できる。

$$\begin{Bmatrix} f_{di}^{(k)} \\ f_{dj}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(k)} & -c^{(k)} \\ -c^{(k)} & c^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i^{(k)} \\ v_j^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad (k=1, \dots, N) \quad (1)$$

ここに、 $f_{di}^{(k)}, f_{dj}^{(k)}$  は  $k$  番目要素の節点  $i, j$  の減衰力 (内力)、 $v_i^{(k)}, v_j^{(k)}$  は  $k$  番目要素の節点  $i, j$  の速度を表す。次に、 $k$  番目要素の減衰係数マトリクスを、設計変数  $\rho_k$  を用いて次のように表す。

$$\mathbf{c}_k = \rho_k \mathbf{c}_k^0, \quad \rho_k = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad \mathbf{c}_k^0 = \begin{bmatrix} c^{(k)} & -c^{(k)} \\ -c^{(k)} & c^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 $\rho_k$  はダンパーが残存する場合は 1、ダンパーが除かれる場合は 0 となる。ここで、各ステップで除去するダンパーを決定する指標として、本論文では、次式の累積減衰エネルギー  $E_k$  を用いる。

$$E_k = (1/2) \int_0^{t_g} (\dot{\mathbf{d}}_k^T \rho_k \mathbf{c}_k^0 \dot{\mathbf{d}}_k) dt, \quad \dot{\mathbf{d}}_k = \begin{Bmatrix} v_i^{(k)} \\ v_j^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ただし、 $t_g$  は時刻歴応答解析の解析時間である。なお、本論文では、時刻歴応答解析法として平均加速度法を用いる。また、(3)式の時間積分は、単純に平均加速度法の各時間ステップの減衰エネルギーを加算することによって求める。

なお、Fig.1 に示すような K 形ダンパーでは、Fig.2 に示すように独立した 2 要素のダッシュポットでモデル化されるが、この 2 要素は一つのダンパーとして扱い、2 要素の累積減衰エネルギーの総和をそのダンパーの累積減衰エネルギーとする。したがって、Fig.1a のダッシュポット数は 12 となるが、設計変数の総数は 6 となる。また、骨組解析では、柱・梁部材の軸方向変形も考慮するものとする。

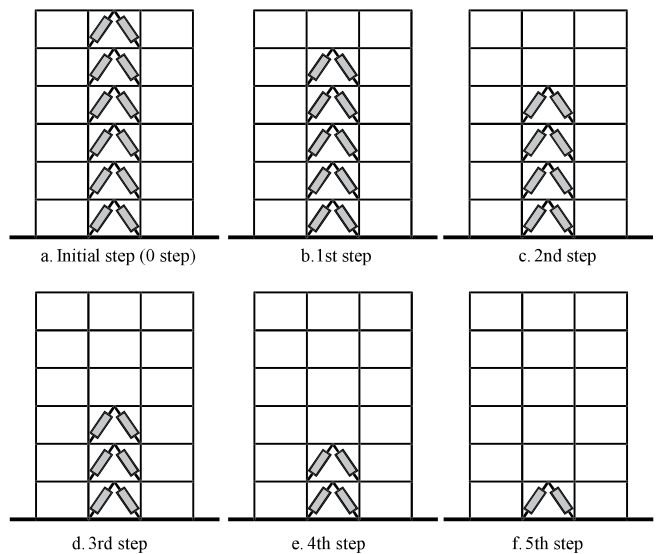


Fig.1 Removing process of dampers in the present method

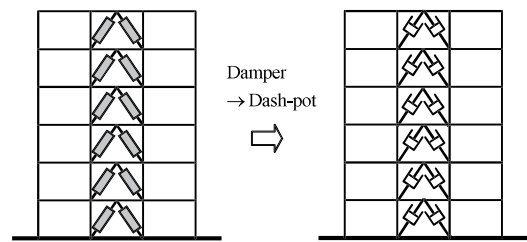


Fig.2 Dynamic analysis model for FEM

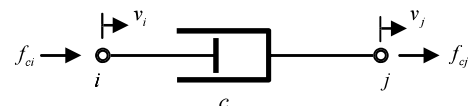


Fig.3 Finite element for dash-pot model

以上の準備のもとで、ESO 法によるダンパーの除去過程は次のようになる。

- ① グランドストラクチャの地震応答解析を行い、各ダンパーの累積減衰エネルギーを計算する。
- ② 最も累積減衰エネルギーの小さいダンパーを除去する。なお、同じ累積減衰エネルギーのダンパーが複数ある場合は対称性を保つため、同時に除去する。また、同じ設計変数番号の要素は同時に除去される。
- ③ ダンパーが除去された骨組に対して、再度地震応答解析を行い、残存するダンパーの累積減衰エネルギーを計算する。
- ④ すべてのダンパーが無くなるまで、②、③の過程を繰り返す。
- ⑤ 表示ソフトを用いて、すべての除去ステップを参照し、目標とする最大応答値以下となるダンパー数及び配置を決定する。

以上に示されるように、本手法は、最適化問題を解いているわけではないため、各ステップの解が、そのダンパー数で最大変位や最大層間変位を最小にする最適解（最適配置）であるという保証はない。しかし、得られた解が、最大変位や最大層間変位を最小化する最適解あるいは最適解に近い優良解であるならば、構造計画段階で用いる手法としては十分有用であると考えられる。

なお、以下の解析例では、構面上の各層ダンパーの水平方向配置条件に変化が生じるように、あえて柱・梁部材の軸方向変形を考慮して解析を行っている。

### 3. 解析例

#### 3.1 基本的な例題

まず、本提案手法の有効性を、最適解を求めることが可能な例題で確認する。Fig.4 は、全梁部材を H-440×300×11×18、全柱部材を □-400×400×16、ヤング係数を  $2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  とした鋼構造ラーメン骨組モデル（グラウンドストラクチャ）を示す。ここで、ダンパーは Fig.2 と同様の K 形とし、全ダッシュポットの粘性減衰係数  $c$  は  $1000 \text{ kN/(m/sec)}$  とする。なお、K 形ダンパーは一体とし、2 本のダッシュポットの累積減衰エネルギーを 1 つのダンパーとして評価する。また、地震動加速度は、El Centro NS（最大加速度 341 gal）を用い、解析時間は 30 秒とする。

以上の解析条件のもとで、提案手法による解析を行った結果を Fig.5 に示す。図に示すように、まず上層のダンパーが除去され、次に下層のダンパーが除去され、最後に中層のダンパーが除去されることがわかる。次に、Fig.5 で得られた各ステップの解が、最大応答を最小化できているかを検証する。Fig.6 は、その一例として Fig.5 の Step 4 の解を検証するための比較モデルを示す。Fig.7, 8 は、Step 4 の解（model 0）と Fig.6 の比較モデルの最大変位と最大層間変位の比較を示す。これらの図より、最大変位も最大層間変位も model 0 が最小となっていることがわかる。このような比較を Fig.5 の Step 2, 3, 5 の解についても行ってみたいところ、すべての場合について、Fig.5 の解が最小解となっていることが確かめられた。

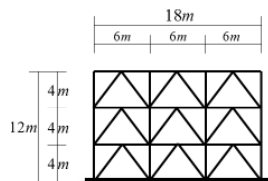


Fig.4 Ground structure of numerical example 1

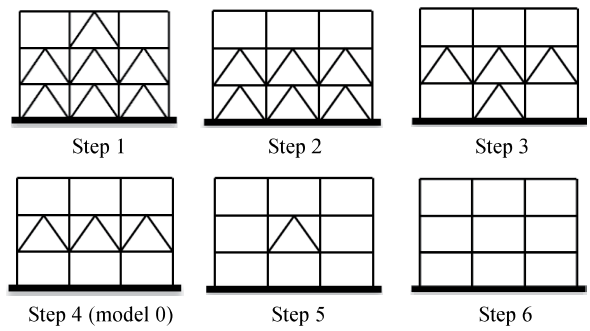


Fig.5 Removal process of dampers (solutions of analysis)

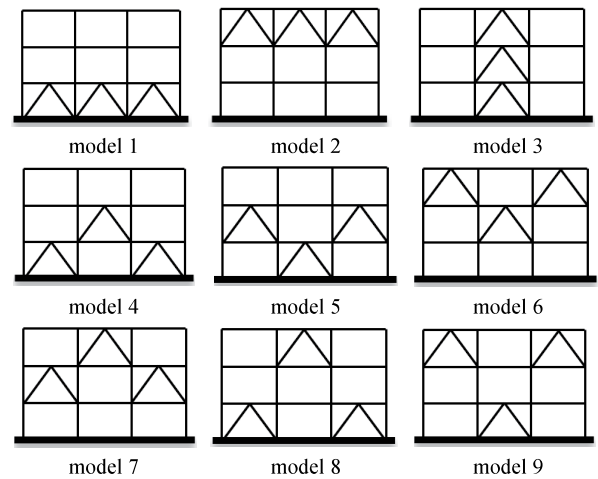


Fig.6 Analysis models to be compared with the solution of Step 4

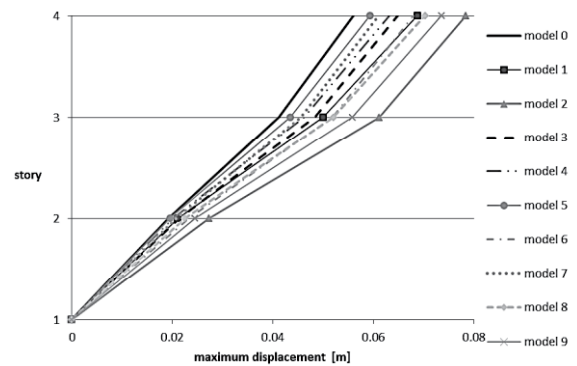


Fig.7 Comparison of maximum displacement

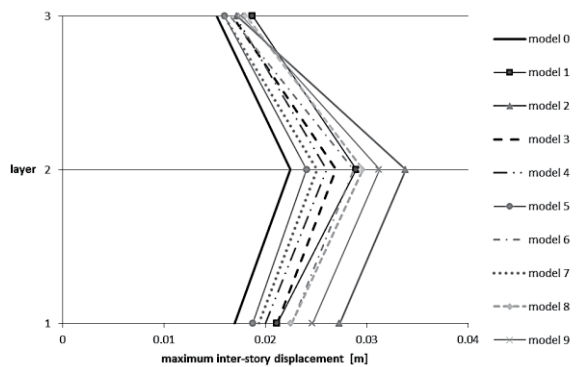


Fig.8 Comparison of maximum inter-story displacement

また、Fig.9 は、Fig.6 の各ステップの層間速度を示した図であるが、層間速度の小さい層のダンパーから順に除去されていることがわかる。以上からわかるように、本解析で得られる解には一応の物理的意味があり、このようなシンプルな例では、地震応答を最小化する解が得られることがわかる。

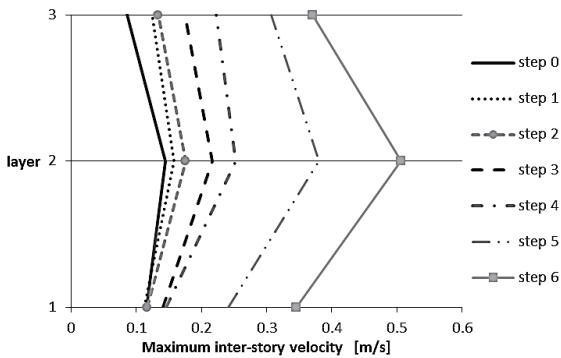


Fig.9 Maximum inter-story velocity of each step in Fig.5

### 3.2 高層ビル構面の解析例

次に、Fig.10 は、文献 13) に示される鋼構造純ラーメン 30 階建ホテルを例に作成した解析モデル (グラウンドストラクチャ) を示す。柱・梁部材の断面は、文献 13) に示されるものをそのまま使用する。ここで、ダンパーは Fig.2 と同様の K 形とし、全ダッシュポットの粘性減衰係数  $c$  は  $1000 \text{ kN}/(\text{m}/\text{sec})$  とする。地震動加速度は、長周期地震動として、2003 年十勝沖地震 (M8.0) の苫小牧で観測された HKD129 (最大加速度  $72.9 \text{ gal}$ ) を用い、解析時間は 190 秒とする。

以上の解析条件のもとで、提案手法による解析を行った結果の一部 (15 ステップ間隔) を Fig.11 に示す。また、Fig.12 は、Fig.11 に示す各ステップの最大層間速度を示す。Fig.12 からわかるように、Fig.11 では、最大層間速度の小さい上層のダンパーから除去され、次に低層、最後に中層の順に除去されることがわかる。

次に、Fig.13 は、Fig.11 の Step 60 の解 (model 0) と比較するために同じダンパー数で作成した一般的な配置モデルである。また、Fig.14, 15 は、Fig.11 の model 0 と Fig.13 の比較モデルの最大変位と最大層間変位を示す。これらの図より、最大変位も最大層間変位も model 0 が概ね最小となっていることがわかる。

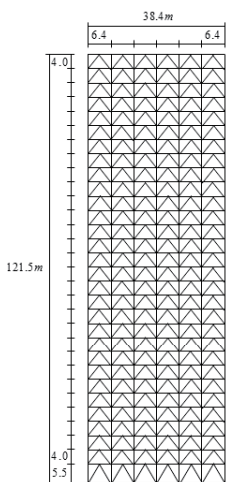


Fig.10 Ground structure of numerical example 2

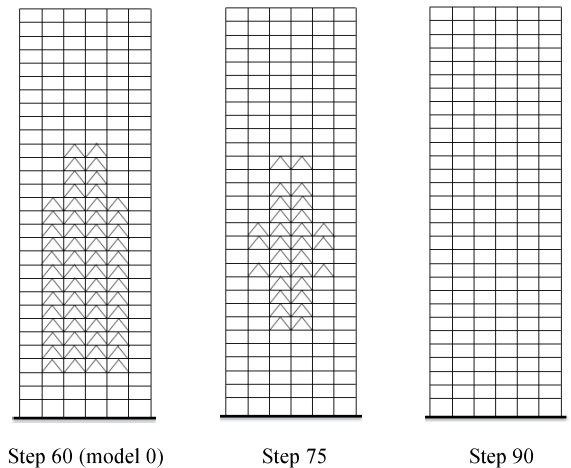
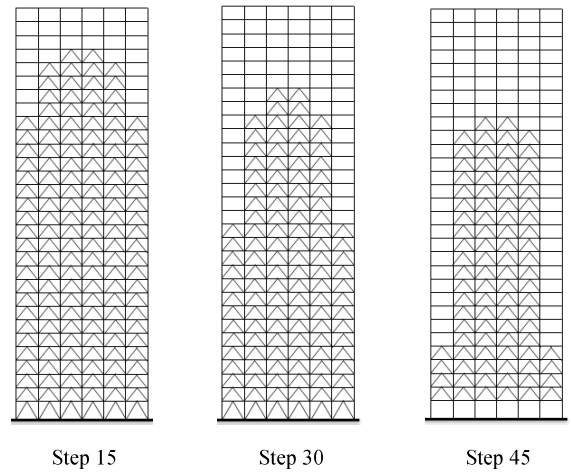


Fig.11 Removal process of dampers (solutions of analysis)

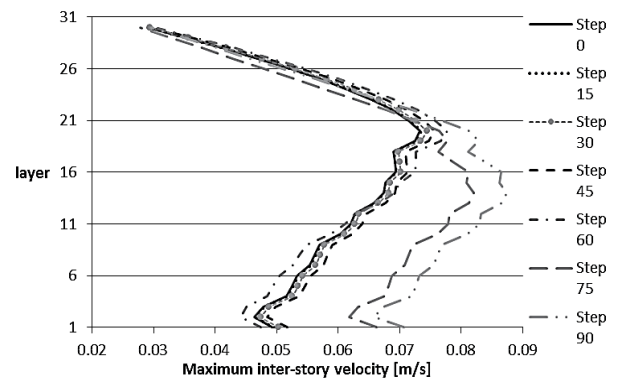


Fig.12 Maximum inter-story velocity of each step in Fig.11

また、Fig.16 は、Fig.11 の model 0 を参考に、これに近い配置モデルを作成したものである。そして、Table 1 は、Fig.11 の model 0 と Fig.16 の各モデルで、骨組全体の最大変位が生じる時刻の各階の変位を比較したものである。なお、Table 1 では、各階で最小となる値の背景をグレーで示している。表からわかるように、すべての階で model 0 の変位が最小値となっていることがわかる。すなわち、Table 1 の結果は、本手法によって得られた解を参考にダンパーの配置計画を行えば、長周期地震動に対する高層ビルの応答を効率的に低減できることを示している。

なお、Fig.11 の Step90 までの全解析時間は、intel Core i7 の CPU で 3 時間 30 分程度であり、通常のパソコンで十分計算可能である。

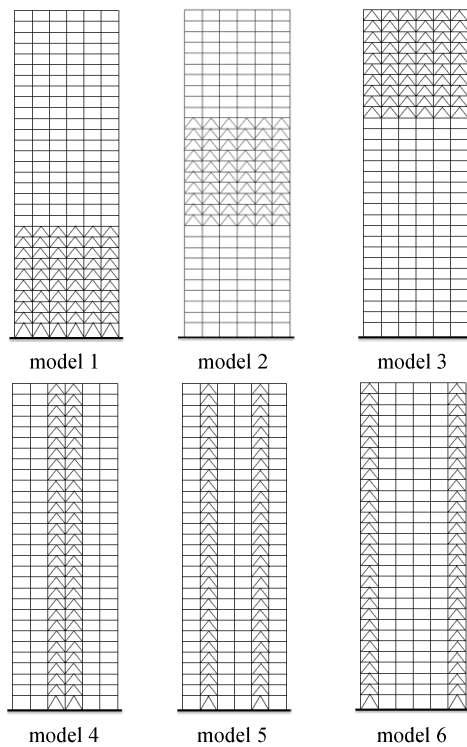


Fig.13 Analysis models to be compared with the solution of Step 60

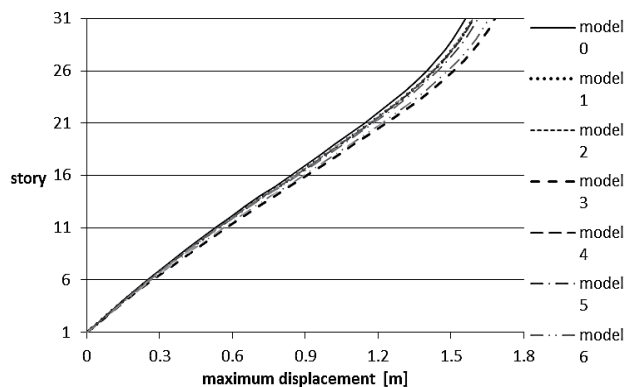


Fig.14 Comparison of maximum displacement

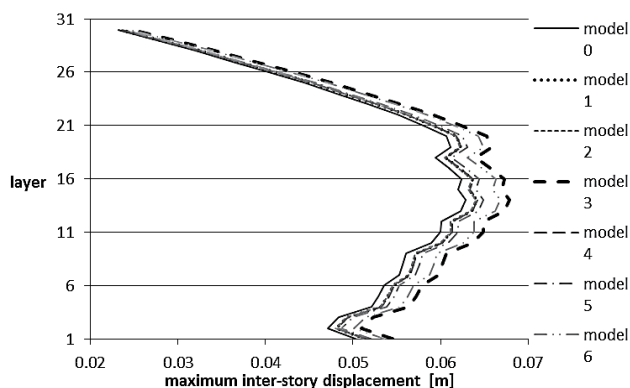


Fig.15 Comparison of maximum inter-story displacement

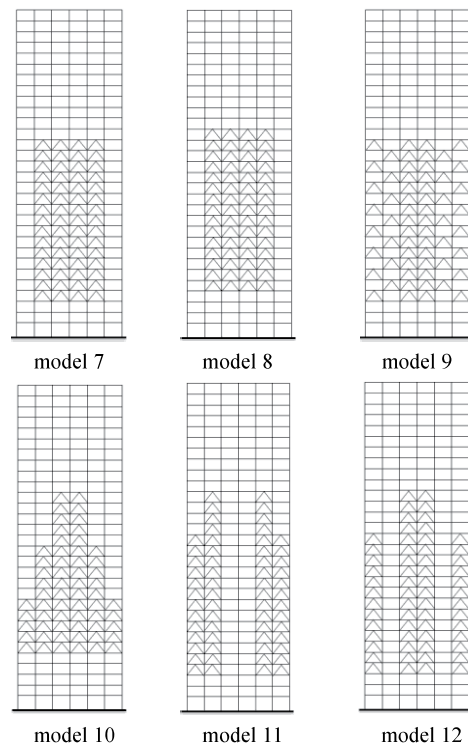


Fig.16 Analysis models to be compared with the solution of Step 60

Table 1 Comparison of maximum displacement [m]

| FL | model 0 | model 7 | model 8 | model 9 | model 10 | model 11 | model 12 |
|----|---------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 2  | 0.050   | 0.050   | 0.050   | 0.051   | 0.051    | 0.051    | 0.051    |
| 3  | 0.097   | 0.098   | 0.098   | 0.098   | 0.098    | 0.100    | 0.099    |
| 4  | 0.146   | 0.146   | 0.146   | 0.147   | 0.147    | 0.149    | 0.148    |
| 5  | 0.198   | 0.198   | 0.198   | 0.200   | 0.199    | 0.202    | 0.201    |
| 6  | 0.251   | 0.251   | 0.251   | 0.253   | 0.252    | 0.256    | 0.255    |
| 7  | 0.304   | 0.305   | 0.305   | 0.307   | 0.306    | 0.311    | 0.309    |
| 8  | 0.360   | 0.360   | 0.360   | 0.363   | 0.361    | 0.368    | 0.365    |
| 9  | 0.415   | 0.416   | 0.416   | 0.420   | 0.417    | 0.425    | 0.422    |
| 10 | 0.471   | 0.472   | 0.472   | 0.476   | 0.474    | 0.482    | 0.479    |
| 11 | 0.530   | 0.531   | 0.531   | 0.536   | 0.533    | 0.542    | 0.538    |
| 12 | 0.590   | 0.591   | 0.591   | 0.596   | 0.593    | 0.604    | 0.599    |
| 13 | 0.650   | 0.651   | 0.651   | 0.657   | 0.654    | 0.665    | 0.660    |
| 14 | 0.713   | 0.713   | 0.714   | 0.720   | 0.716    | 0.729    | 0.724    |
| 15 | 0.776   | 0.776   | 0.777   | 0.784   | 0.780    | 0.793    | 0.788    |
| 16 | 0.838   | 0.839   | 0.839   | 0.846   | 0.842    | 0.857    | 0.851    |
| 17 | 0.900   | 0.901   | 0.901   | 0.909   | 0.905    | 0.920    | 0.914    |
| 18 | 0.961   | 0.962   | 0.962   | 0.971   | 0.966    | 0.983    | 0.976    |
| 19 | 1.020   | 1.021   | 1.022   | 1.031   | 1.026    | 1.043    | 1.036    |
| 20 | 1.082   | 1.083   | 1.083   | 1.093   | 1.087    | 1.106    | 1.098    |
| 21 | 1.142   | 1.143   | 1.144   | 1.154   | 1.148    | 1.168    | 1.160    |
| 22 | 1.200   | 1.202   | 1.202   | 1.213   | 1.207    | 1.227    | 1.219    |
| 23 | 1.255   | 1.257   | 1.257   | 1.269   | 1.262    | 1.284    | 1.275    |
| 24 | 1.307   | 1.309   | 1.309   | 1.321   | 1.314    | 1.337    | 1.327    |
| 25 | 1.355   | 1.357   | 1.357   | 1.370   | 1.363    | 1.386    | 1.376    |
| 26 | 1.400   | 1.401   | 1.401   | 1.415   | 1.407    | 1.431    | 1.421    |
| 27 | 1.440   | 1.442   | 1.442   | 1.456   | 1.448    | 1.473    | 1.463    |
| 28 | 1.476   | 1.478   | 1.478   | 1.492   | 1.484    | 1.510    | 1.499    |
| 29 | 1.508   | 1.510   | 1.510   | 1.525   | 1.517    | 1.543    | 1.532    |
| 30 | 1.536   | 1.538   | 1.538   | 1.553   | 1.544    | 1.571    | 1.560    |
| 31 | 1.559   | 1.561   | 1.561   | 1.576   | 1.568    | 1.595    | 1.584    |

次に、Fig.17 は、他の設計用地震波と近年の巨大地震波の加速度を用いて提案手法の解析を行い、ダンパー数が 60 となる解を示したものである。また、Table 2 は、各地震波 (Taft EW 最大加速度 175.9gal, 八戸 NS 229.7gal, 鷹取 641.7gal, 宮城 262.7gal, 熊本 1156.9gal) に対する Fig.17 に示すダンパー配置と Fig.13 に示す model 1~model 6 のダンパー配置に対する最大応答変位を比較したものを示す。Table 2 に示すように、Fig.17 の解は、model 1~model 6 のような一

一般的な配置に比較して、最大変位が概ね小さくなっていることがわかる。Table 3 は、Table 2 の最大変位が最小になっていない Taft と Kumamoto に対して、最大変位時の全層の平均変位比較したものであるが、Fig.17 の解が最小に近い値となっていることがわかる。また、Fig.17 より、ダンパーの最適配置は、地震波によって異なることがわかる。これは、Fig.18 に示すように入力地震動によって最大層間速度の高さ方向の分布が異なるためである。したがって、本

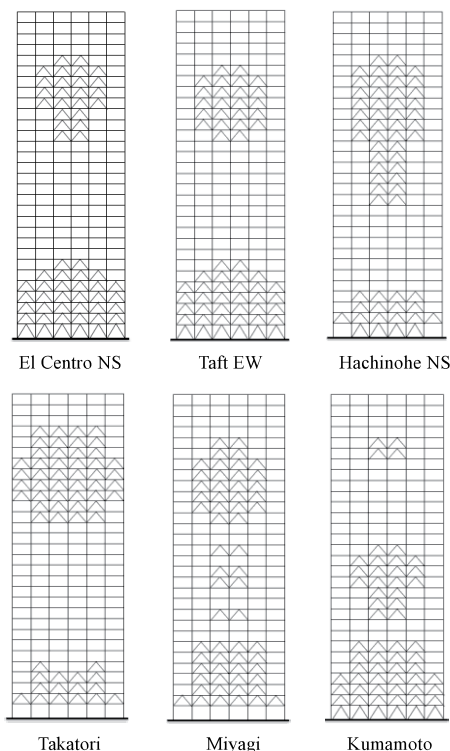


Fig.17 Optimal placement for different ground motions

Table 2 Comparison of maximum displacement [m]

|           | Fig.17 | model 1 | model 2 | model 3 | model 4 | model 5 | model 6 |
|-----------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| El Centro | 0.280  | 0.284   | 0.287   | 0.284   | 0.283   | 0.284   | 0.288   |
| Taft      | 0.322  | 0.321   | 0.321   | 0.327   | 0.321   | 0.322   | 0.326   |
| Hachinohe | 0.325  | 0.327   | 0.327   | 0.329   | 0.326   | 0.327   | 0.330   |
| Takatori  | 1.202  | 1.215   | 1.217   | 1.206   | 1.207   | 1.210   | 1.219   |
| Miyagi    | 1.368  | 1.372   | 1.372   | 1.371   | 1.369   | 1.371   | 1.375   |
| Kumamoto  | 1.055  | 1.058   | 1.053   | 1.076   | 1.058   | 1.061   | 1.068   |

Table 3 Comparison of average maximum displacement [m]

|          | Fig.17 | model 1 | model 2 | model 3 | model 4 | model 5 | model 6 |
|----------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Taft     | 0.173  | 0.173   | 0.173   | 0.176   | 0.173   | 0.173   | 0.175   |
| Kumamoto | 0.559  | 0.560   | 0.560   | 0.568   | 0.560   | 0.562   | 0.567   |

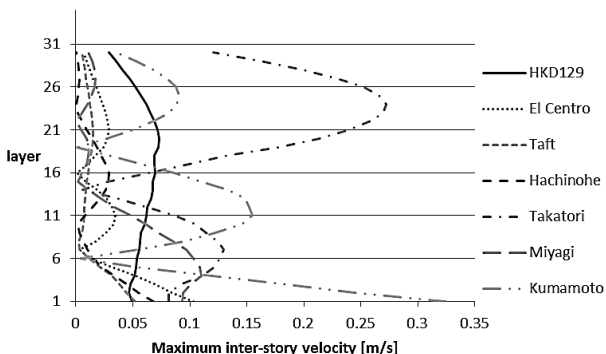


Fig.18 Maximum inter-story velocity of each seismic wave

提案手法で得られる最適配置は、地震動が変わると必ずしも最適配置とはならないことに注意が必要である。

#### 4. まとめ

本論文では、グラウンドストラクチャ法に初期の ESO 法の考え方を適用し、これまでに検討が少ない高層ビル構面の制振ダンパー配置手法を提案した。まず、本手法の有効性を、3層3スパンの鋼構造骨組の例題で検証した結果、本提案手法により、すべてのダンパー数で骨組構造の最大応答変位を最小化する解が得られることがわかった。次に、鋼構造高層ビル構面の例題において、同じダンパー数で、一般的に考えられるダンパー配置と比較した結果、本手法による解は、必ずしも最大変位や最大層間変位を最小化する解にはなっていないが、全層で見ると、変位や層間変位を全体的に小さくする解が得られていることがわかった。また、本手法で得られる解は、地震波の種類によって大きく異なる配置となるため、長周期地震動の応答を低減するためには、長周期地震動を用いて最適配置を求めることが重要であることがわかった。

以上の結果より、本提案手法は、初期の構造計画段階において、ダンパー配置を決定するツールとしては、十分実用的な解を導き出すことができると考えられる。

#### 参考文献

- 1) Masaaki TSUJI, Hidetoshi TANAKA, Shinta YOSHITOMI and Izuru TAKEWAKI : Optimum relief force of oil dampers in multi-story buildings, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ) , Vol.77 No.678, pp.1237-1246, 2012.8
- 2) Ri-Hui Zhang and T. T. Soong : Seismic Design of Viscoelastic Dampers for Structural Applications, J. Struct. Engng., **118**, pp.1375-1392, 1992
- 3) M. Tsuji and T. Nakamura : Optimum viscous dampers for stiffness design of shear buildings, J. Structural Design of Tall Buildings, **5**, pp.217-234, 1996
- 4) I. Takewaki : Optimal damper placement for minimum transfer functions, Earthq. Engng. Struct. Dyn., **26**, pp.1113-1124, 1997
- 5) I. Takewaki : Seismically effective damper placement for shear-flexural building models including soil-structure interaction, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ) , No.530, pp.77-84, 2000.4
- 6) M. P. Singh and Luis M. Moreschi : Optimal placement of dampers for passive response control, Earthq. Engng. Struct. Dyn., **31**, pp.955-976, 2002
- 7) K. Uetani, M. Tsuji, I. Takewaki : Application of an optimum design method to practical building frames with viscous dampers and hysteretic dampers, J. Engng. Struct. **25**, pp.579-592, 2003
- 8) K. Kubo, S. Hiramoto, D. Fujii, K. Ohta : Optimum placement of response control damper using topology optimization method for frame structure, Proceedings of Annual Research Meeting, Chugoku Chapter, AIJ, Vol.35, pp.277-280, Mar., 2012
- 9) K. Kubo, D. Fujii, K. Ohta and T. Nonaka : Optimum placement of response control damper using topology optimization method for frame structure, Research Reports of the Faculty of Engineering, Kinki Univ., No.44, pp.53-58, 2010
- 10) K. Kosaka, S. Matsumoto, D. Fujii : Topology optimization of frame structures using ESO method and ground structure method, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ) , Vol.81, No.721, pp.547-553, 2016.3
- 11) Xie, Y.M., Steven, G.P. : Evolutionary Structural Optimization, Springer, 1997
- 12) Y. Fujitani, D. Fujii, T. Nonaka : Static, dynamic and elasto-plastic analysis of framework solved by personal computer, Maruzen, 2000
- 13) Architectural Institute of Japan : Protecting high-rises against long period motions, -Wisdom to share among designers and engineers-, 2013

# OPTIMIZATION OF PLACEMENT OF RESPONSE CONTROL DAMPER ON PLANE OF HIGH-RISE BUILDING STRUCTURE USING ESO METHOD

*Masataka NOMURA* \*, *Shinya MATSUMOTO* \*\*, *Yoshihiro SAKINO* \*\*  
*and Daiji FUJII* \*\*\*

\* Grad. Student, Graduate School of Kindai University

\*\* Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr.Eng.

\*\*\* Prof., Faculty of Engineering, Kindai University, Dr.Eng.

Recently, response control dampers are used to improve seismic response of high-rise building for long-period ground motion. In general, it is required to arrange the dampers efficiently with small number on the pane of high-rise building structure. However, it is not easy to obtain the optimum placement of the dampers on the plane of structure, because the damper's performance depend on the dynamic behavior of the building. Therefore, in this paper, a method to obtain an optimal placement of the response control dampers on the plane of high-rise building structure is proposed.

In section 2, the proposed method is shown. In the present method, first, the dampers are placed on all possible places in the frame structure (ground structure) of the building (Fig.1a), and then the dampers are gradually removed by evolutionary structural optimization (ESO) method (Fig.1b~Fig.1f). The accumulated damping energy of the damper in the dynamic analysis is used to determine the removal order. In the dynamic analysis, finite element method with numerical time integration method (mean acceleration method) is used. The dampers are modeled in dash-pot (Fig.2 and Fig.3), and the accumulated damping energy is shown in Eq.(3).

In section 3, the effectiveness of the present method is shown. In the numerical example of the building with 3 layers and 3 spans (Fig.4), it is shown that the optimum solutions can be obtained by the present method (Fig.5~Fig.8). In the numerical example of the high-rise building (Fig.10), it is shown that the effective solutions are obtained compared with general placement plans (Fig.11~Fig.16, Table 1). Also, it is shown that the optimum placement obtained by the present method is changed by the types of seismic waves (Fig.17). Therefore, it is necessary to use long-period ground motion for the analysis in order to obtain the optimum placement of dampers in high-rise buildings.

It is concluded from these examples that the present method is useful for determining the placement of response control dampers on the plane of high-rise building structure at the structural planning stage.

(2017年4月10日原稿受理, 2017年9月5日採用決定)



## 第3章

# 位相最適化手法を用いた 制振機構の形態創生

研究業績（論文）

## 均質化設計法を用いた弾性変形機構の位相最適化 TOPOLOGY OPTIMIZATION OF COMPLIANT MECHANISMS USING THE HOMOGENIZATION DESIGN METHOD

藤井大地\*, 江島 晋\*\*, 菊池 昇\*\*\*  
*Daiji FUJII, Susumu EJIMA and Noboru KIKUCHI*

In this paper, we present an effective method for designing the compliant mechanisms by the topology optimization technique using the homogenization design method. In this method, a new multi-objective function which maximizes the relative compliance between input at the loading point and output at a prescribed point is defined. The topology optimization problem formulated using the homogenization design method is solved by SLP method. In this algorithm, with the size of the hole of unit cell, the angle of unit cell is made to be a design variable. The local minima occurring in topology optimization in which SLP method is used and the gray scale densities of optimal solutions are improved by our presented methods. The effectiveness of the present method is demonstrated by numerical examples of the topology optimization on a short cantilever plate.

**Keywords:** *Compliant mechanisms, Homogenization method, Topology optimization, Sequential linear programming method, Numerical instabilities, Multi-objective function*

弾性変形機構, 均質化法, 位相最適化, 逐次線形計画法, 数値的不安定, 多目的関数

### 1. はじめに

均質化設計法(Homogenization Design Method, HDM)は,従来の境界形状の最適化によって連続体の最適形状を求める方法に対して,連続体を構成する材料を最適化することによって最適な形状・位相を求める方法であり,1988年に Bendsøe and Kikuchi<sup>1)</sup>によって提案されて以来,様々な工学問題に応用され,1995年にその集大成が Bendsøe<sup>2)</sup>によってまとめられている。また,均質化設計法の解析プログラムは,1999年に汎用ソフト(NASTRAN)にも組み込まれ,弾性,単一目的(剛性最大化等)の問題に関してはほぼ完成域に達していると言える。

一方,多目的問題への適用例として,西脇<sup>3),4)</sup>,江島ら<sup>5),6),7)</sup>は,均質化設計法を用いた弾性変形機構(Compliant Mechanisms)の位相最適化を試みている。弾性変形機構は,従来の剛性を最大化する構造とは逆に,変形を生み出す構造形態であり,柔軟性が要求される構造を設計する上で重要となる。建築構造分野においても,剛性よりも柔軟性を要求される構造形態は少なからず存在するため,将来,建築分野への応用も期待される。

西脇,江島らの弾性変形機構の位相最適化は,連続体のある点に力を加えた時に,指定した点で指定した方向への変位が最大となるような位相を求める問題となる。ただし,この機構は,その

指定した点に反力(外力)が働くとそれに抗する剛性を有することを条件としている。したがって,この問題は全体機構の柔軟性と,反力に抗する剛性を同時に最大化する多目的問題となる。

多目的最適化問題では,多目的関数の定義と,最適化問題の解法が問題となる。西脇ら<sup>3),4)</sup>は,指定した点の変位を最大化し,かつ反力に抗するための剛性を最大化する多目的関数を定義して,いくつかの例題でその有効性を示している。しかし,この目的関数では,指定点の反力に抗する剛性は考慮されているが,反力がない場合の加力に対する剛性が考慮されていないため,問題によっては,加力による変位が非常に大きくなる。そこで,江島ら<sup>6),7)</sup>は,さらに指定点の変位値を制約する方法を提案しているが,この場合,目的関数と制約条件が相反することになり,大域的最適解が得られない場合がある。

一方,最適化問題の解法としては,多目的関数の場合,凸関数条件が満たされない場合があるため,最適性規準法よりも SLP 法(逐次線形計画法)の方が適用しやすい<sup>8)</sup>。したがって,西脇,江島らは,SLP法を最適化問題の解法として用いている。しかし,既往の解析には二つの問題点がある。一つは,均質化設計法では,設計領域を長方形の有孔ユニットセルで構成される多孔質材料からなると仮定し,この孔の大きさとセルの角度を設計変数として

\* 東京大学工学系研究科環境海洋工学専攻  
助手・博士(工学)

\*\* くいと協技術開発部 博士(工学)

\*\*\* The University of Michigan, 教授・Ph. D.

Research Assoc., Dept. of Environmental and Ocean Engineering, The University of Tokyo, Dr. Eng.

CAE Technology Department, Quint Corporation, Dr. Eng.

Prof., Dept. of Mechanical Eng. and Applied Mech., Ph. D.

最適位相を求めるが、従来、セルの角度は、実際には設計変数とせず、その点の応力の主軸方向に一致させる方法が用いられている<sup>3)~8)</sup>。しかしながら、柔軟性と剛性を同時に最適化する本問題では、必ずしもセルの最適角度は応力の主軸方向とは一致しないという問題。もう一つは、最適化問題の解法として SLP 法を用いる場合、局所解への収束や、最適位相に中間密度が広がり、鮮明な解が容易に得られないという問題である<sup>9)</sup>。

本論文の目的は、以上の問題を解決し、より有効な弾性変形機構の位相最適化手法を示すことにある。目的関数の問題は、西脇、江島らの目的関数が、指定点の絶対的な変位を最大化するものであるため、指定点と加力点が同じ方向に動く問題では、指定点の変位が最大化されると同時に、加力点の変位も最大化されてしまうことに原因がある。そこで、本論文では、指定点の絶対的な変位を最大化するのではなく、最小限の加力で、最大限の変位を生じさせるため、加力側の仕事量と指定点での出力側の仕事量との相対比を目的関数とし、これを最大化する問題とする。なお、この目的関数は、Hetrick and Kota<sup>10)</sup>が弾性変形機構の形状最適化問題で目的関数としている入力エネルギーと出力エネルギーの相対比を参考にして定義している。また、ユニットセルの角度は、設計変数として解析する。局所解への収束と、最適位相の鮮明化に関しては、SLP 法を用いた剛性最大化問題で著者ら<sup>9)</sup>が提案している局所解への収束を回避する方法（設計変数の変動幅の制御と質量制約の緩和）、および重力制御関数(gravity control function)を用いた位相の鮮明化を用いる。

以下、本論文第 2 章では、均質化設計法(HDM)を用いた弾性変形機構の位相最適化問題の定式化と SLP 法による解法を示す。また、局所解への収束を回避する方法、および重力制御関数を用いたフィルタリング法についても示す。第 3 章では、数値解析例により、重力フィルターの効果に関する調査と、本方法の有効性を示す。第 4 章では以上のまとめを述べる。

## 2. 弾性変形機構の位相最適化問題の定式化と解法

ここでは、弾性変形機構の位相最適化問題の定式化と解法について、片持平板を拡張領域とする問題を例に説明する。

### 2.1 目的関数の定義

図 1(a)に示すように、境界条件が与えられた拡張領域  $\Omega$  の A 点に外力が作用する問題を考える。これまで主に行われてきた位相最適化問題は、A 点の変位を最小化（剛性を最大化）する領域内の位相を求めるものであった。この問題の解は、図 1(b)に示すような位相となる。これに対して、西脇、江島ら<sup>3)~7)</sup>の弾性変形機構 (Compliant Mechanisms) の設計では、A 点の外力に対して、例えば、B 点の指定方向への変位を最大化する位相を求める問題となる。ただし、この機構は、B 点に反力が働いた場合に十分な剛性を有することを条件としている。

西脇、江島ら<sup>3)~7)</sup>は、この問題を解くために、この問題を図 2 に示す 4 種の問題に分解して考えている。まず、CASE 1 で生じる B 点の変位を最大化するために、CASE 2 に示すように、B 点に仮想力 1 を与えた問題を解き、相反定理の考え方により、この仮想力と CASE 1 の B 点の変位を掛けた仕事量（相互コンプライアンス）を定義して、これを最大化している。また、B 点に反力が

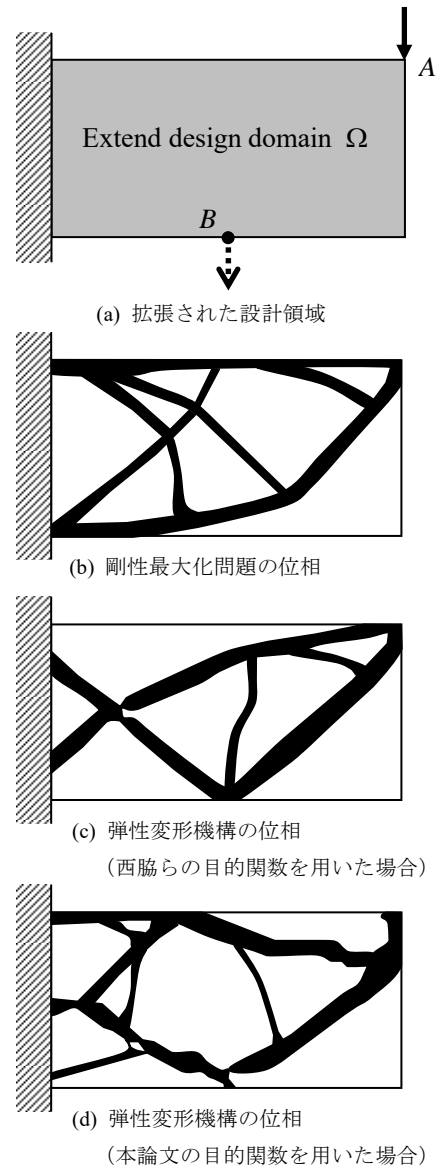


図 1 位相最適化問題の一例

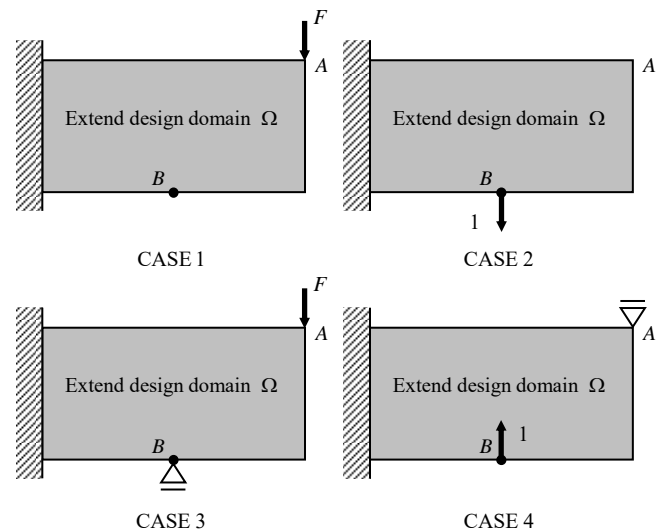


図 2 位相最適化のための境界条件と荷重条件

生じた場合の剛性を確保するために、CASE 3, CASE 4 の問題を解き、CASE 3 の外力  $F$  のなす仕事量と、CASE 4 の仮想力のなす仕事量を最小化している。

以上の仕事量（コンプライアンス）は、それぞれ次式のように表される。

$$\begin{aligned} L^2(\{u^1\}) &= 1 \cdot u_{2(B)}^1 = \int_{\Omega} \{\varepsilon(\{u^2\})\}^T [D^G] \{\varepsilon(\{u^1\})\} d\Omega \\ L^3(\{u^3\}) &= F \cdot u_{2(A)}^3 = \int_{\Omega} \{\varepsilon(\{u^3\})\}^T [D^G] \{\varepsilon(\{u^3\})\} d\Omega \\ L^4(\{u^4\}) &= 1 \cdot u_{2(B)}^4 = \int_{\Omega} \{\varepsilon(\{u^4\})\}^T [D^G] \{\varepsilon(\{u^4\})\} d\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $\{u^j\}^T = \{u_1^j, u_2^j\}$  は、CASE  $j$  の変位場、 $\{\varepsilon\}$  はひずみベクトル、 $[D^G]$  は弾性マトリックスを表す。 $L^2(\{u^1\})$  は、相互コンプライアンス (Mutual Compliance) で、仮想荷重の大きさを 1 に設定すると、CASE 1 の  $B$  点の変位そのものとなる。

このとき、西脇ら<sup>4),5)</sup>の用いた多目的関数は次式で定義される。

$$\text{Maximize} \left( \frac{L^2(\{u^1\})}{w_3 L^3(\{u^3\}) + (1-w_3) L^4(\{u^3\})} \right) \quad (2)$$

ここに、 $w_3 \in [0,1]$  は重み係数である。

このような目的関数によって、最適位相を求めると図 1(c) に示すような結果が得られる。図 1(c) からわかるように、この場合、 $A$  点に荷重が加わると  $B$  点の変位は大きくなり、また、 $B$  点に反力が働いた場合も十分な剛性が得られている。しかしながら、 $B$  点に反力がない場合、 $A$  点の変位も非常に大きくなり、全体構造としての剛性が非常に弱くなる。さらに典型的な例として、この目的関数で、図 3(a) に示すような例題を解くと、図 3(b) のような結果が得られ、この場合、全体構造としての剛性は 0 となる。

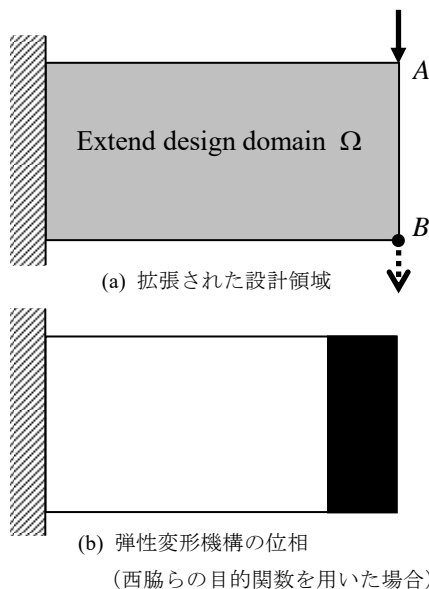


図 3 位相最適化問題の一例

以上のような問題は、目的関数に CASE 1 の  $A$  点の外力仕事量、

$$L^1(\{u^1\}) = F \cdot u_{2(A)}^1 = \int_{\Omega} \{\varepsilon(\{u^1\})\}^T [D^G] \{\varepsilon(\{u^1\})\} d\Omega \quad (3)$$

が考慮されていないために生じる。そこで、本論文では、単に、

CASE 1 の  $B$  点の変位を最大化するのではなく、Hetrick and Kota<sup>10)</sup> が弾性変形機構の形状最適化問題の目的関数に用いている入力エネルギーと出力エネルギーの相対比を参考に、 $A$  点から入力される仕事量と  $B$  点から出力される仕事量の比をとり、これを最大化する問題に置き換える。すなわち、 $A$  点における最小限の力で、 $B$  点の指定した方向に最大限の変位を生じさせる弾性変形機構を求める問題とする。この場合の目的関数は次式で定義される。

$$\text{Maximize} \left( \frac{L^2(\{u^1\}) - L^4(\{u^4\})}{L^2(\{u^1\}) + L^3(\{u^3\})} \right) \quad (4)$$

(4) 式の分母は、CASE 1, CASE 3 の外力  $F$  による入力側の仕事量（コンプライアンス）であり、分子は、CASE 2, CASE 4 の仮想力 1 による出力側の仕事量である。この目的関数では、(3) 式の構造全体の剛性も考慮されており、後に示す解析により図 1(d) に示すような全体剛性を保ちつつ  $A$  点と  $B$  点の相対変位を大きくする位相が得られる。

## 2.2 均質化設計法を用いた位相最適化問題の定式化

次に均質化設計法 (HDM) を用いた位相最適化問題の定式化について述べる。均質化設計法では、拡張領域  $\Omega$  の材料のマイクロ構造が図 4 に示すように長方形の穴を有するユニットセルの配列から構成されるものとする。そして、このユニットセルの穴の寸法  $a, b$  と傾き  $\theta$  が、各有限要素ごとに異なるものとし、 $a_i, b_i, \theta_i$  ( $i=1, \dots, N$ ,  $N$ : 有限要素数) を位相最適化問題の設計変数とする。このとき、各有限要素の弾性マトリックス  $[D^G]$  は均質化法によって求められる。

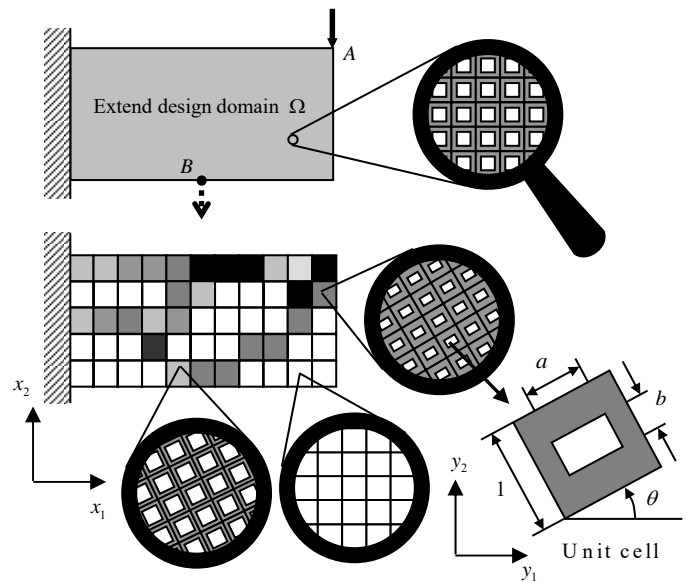


図 4 均質化設計法による位相最適化

均質化法では、マクロ構造の参照座標系  $\{x\}^T = \{x_1, x_2\}$  と、材料のマイクロ構造の参照座標系  $\{y\}^T = \{y_1, y_2\}$  が定義され、両座標間には  $\{y\} = \{x\} / \varepsilon$  の関係があるものとする。ここで、 $\varepsilon$  はマイクロ構造の代表寸法であり、マクロ構造の単位寸法に比較して十分小さいものとする。このとき、マイクロ構造の周期性を仮定すると、マクロ構造の変位場を摂動展開により次式のように近似できる<sup>1),8),11)</sup>。

$$\{v^\varepsilon(\{x\})\} = \{v(\{x\}, \{y\})\} \approx \{v_0(\{x\})\} + \varepsilon \{v_1(\{x\}, \{y\})\} \quad (5)$$

ここに、上添字の  $\varepsilon$  は、マクロ構造の任意の1点を拡大するとそこにミクロ構造が存在することを意味する。 $\{v_0\}$  はユニットセルの平均的な変位、 $\{v_1\}$  は平均変位からの1次の変動成分である。

このとき、最小ポテンシャルエネルギーの原理により、マクロ構造の均質化された弾性マトリックス  $[D^H]$  は次式により求められる<sup>1),8),9)</sup>。

$$[D^H] = \min_{\text{Periodic}} \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y ([I] - [\partial_y][\chi])^T [D] ([I] - [\partial_y][\chi]) dY \right] \quad (6)$$

ここに、 $|Y|$  はユニットセルの面積、 $[I]$  は単位マトリックス、 $[D]$  はユニットセルを構成する材料の弾性マトリックス、 $[\chi]$  は次式で定義されるミクロ構造の特性変位関数、

$$\{v_1\} = -[\chi(\{y\})][\partial_x]\{v_0(\{x\})\} \quad (7)$$

また、 $[\partial_x], [\partial_y]$  は次式で定義される微分演算子である。

$$[\partial_x] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix}, \quad [\partial_y] = \begin{bmatrix} \partial/\partial y_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y_2 \\ \partial/\partial y_2 & \partial/\partial y_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

図5に示すように、(6)式の  $[\chi]$  を有限要素法で離散化し、 $[\chi]$  について変分をとると、離散化された各節点の  $[\chi]$  を求めるための連立方程式が得られる。これをユニットセルの周期性境界条件の下で解いて、(6)式に代入すれば、均質化された弾性マトリックス  $[D^H]$  が得られる。また、ユニットセルの角度を  $\theta$  とすると、弾性マトリックス  $[D^G]$  は、次式より求められる。

$$[D^G(a, b, \theta)] = [R(\theta)]^T [D^H(a, b)] [R(\theta)] \quad (9)$$

ここに、

$$[R(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

制約条件を物質の総質量として、均質化設計法による弾性変形機構の最適化問題を定式化すると次のようになる。

$$\text{Maximize}_{\{X\}} C(\{X\}) = \frac{L^2(\{u^1(\{X\})\}) - L^4(\{u^4(\{X\})\})}{L^1(\{u^1(\{X\})\}) + L^3(\{u^3(\{X\})\})} \quad (11)$$

$$\{X\} = \{a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N, \theta_1, \dots, \theta_N\}$$

$$\text{subject to } \bar{m}(\{X\}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - a_i b_i) \leq \bar{m}_s \quad (12)$$

$$10^{-4} \leq a_i \leq 1 - 10^{-4}, \quad 10^{-4} \leq b_i \leq 1 - 10^{-4} \quad (i=1, \dots, N)$$

ここに、 $\{X\}$  は設計変数、 $C$  は多目的コンプライアンス関数、 $\bar{m}$  は物質の無次元化質量、 $\bar{m}_s$  はその制約値である。(11)式の各コンプライアンスの計算は、有限要素法によって行う。

### 2.3 SLP 法による最適化問題の解析法

(11)、(12)式で示される最適化問題の解法として、SLP 法<sup>12)</sup>を用いる。図6に本方法を用いた場合の解析の流れ図を示す。まず、設計変数の初期値を与え、図2に示すCASE 1~CASE 4の境界条件、荷重条件のもとで、各コンプライアンス値を計算する。

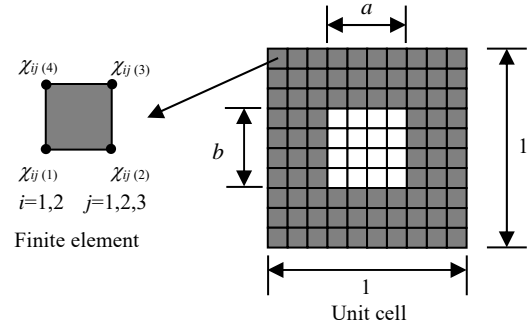


図5 有限要素法による  $[\chi]$  の離散化

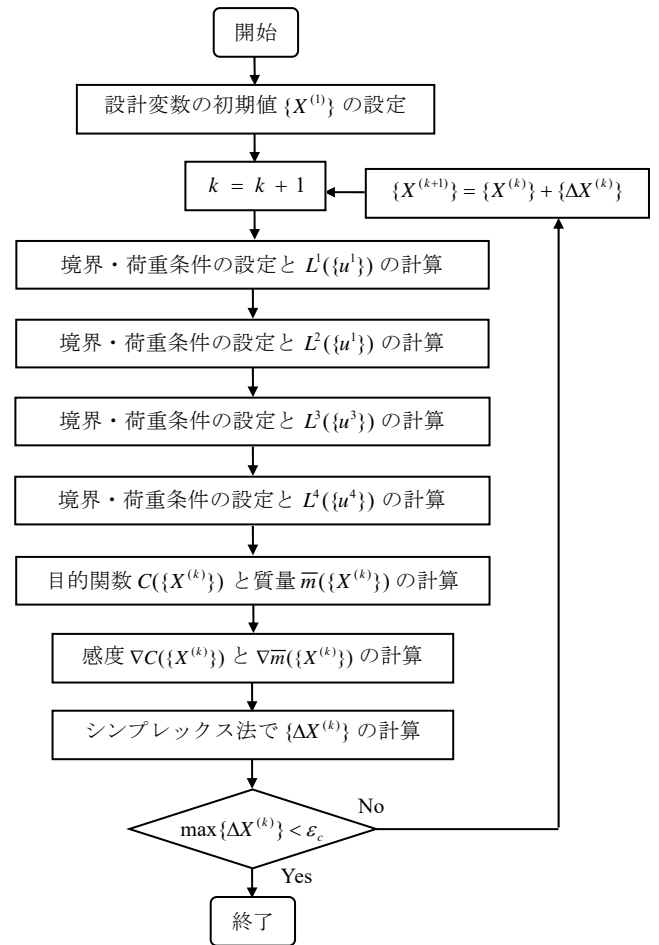


図6 SLP 法による解析フロー

次に、各コンプライアンスの感度を次式により計算する<sup>8)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^k(\{u^k\})}{\partial a_i} &= - \int_{\Omega^i} \{\varepsilon(\{u^k\})\}^T \frac{\partial [D^G]}{\partial a_i} \{\varepsilon(\{u^k\})\} d\Omega^i \\ \frac{\partial L^k(\{u^k\})}{\partial b_i} &= - \int_{\Omega^i} \{\varepsilon(\{u^k\})\}^T \frac{\partial [D^G]}{\partial b_i} \{\varepsilon(\{u^k\})\} d\Omega^i \\ \frac{\partial L^k(\{u^k\})}{\partial \theta_i} &= - \int_{\Omega^i} \{\varepsilon(\{u^k\})\}^T \frac{\partial [D^G]}{\partial \theta_i} \{\varepsilon(\{u^k\})\} d\Omega^i \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 $i=1, \dots, N$  であり、 $\Omega^i$  は  $i$  要素の領域を表す。 $[D^G]$  の  $a_i, b_i$  に関する感度は、均質化法によって計算された  $[D^H]$  のデータペー

スから近似的に計算する。本論文では、ユニットセルを  $20 \times 20$  分割し、孔の大きさ  $a, b$  に関して、 $51 \times 51$  (0.02 刻み) の  $[D^H]$  の値を計算し、これをデータベースとした。そして、中間値および感度は 9 点の Lagrange 補間によって計算している。 $\theta_i$  に関する感度は、(9)式から解析的に計算する。無次元化質量  $\bar{m}$  の各設計変数に関する感度は、(12)式から解析的に計算する。

以上の感度を用いて、シンプレックス法により、設計変数の最適増分値を求め、これらの増分値が十分小さくなるまで計算を繰り返す。

## 2.4 局所解への収束の回避と最適位相の鮮明化

SLP 法で局所解への収束を回避するためには、設計変数のムーブリミットの設定が重要となる。ここでは、文献 9) に示したムーブリミットの設定法を用いる。この方法では、設計変数のムーブリミットを次式のように設定する。

$$-a_i \bar{\varepsilon} \leq \Delta a_i \leq a_i \bar{\varepsilon}, \quad -b_i \bar{\varepsilon} \leq \Delta b_i \leq b_i \bar{\varepsilon}, \quad -\phi_i \bar{\varepsilon} \leq \Delta \phi_i \leq \phi_i \bar{\varepsilon} \quad (14)$$

ただし、 $\bar{\varepsilon}$  は定数、 $\Delta a_i, \Delta b_i$  は  $a_i, b_i$  の増分量、 $\Delta \phi_i$  は  $\theta_i = \pi \phi_i$  で定義される  $\phi_i$  ( $0 \leq \phi_i \leq 1$ ) の増分量である。(14)式は、 $a_i, b_i, \phi_i$  が 0 に近づくにしたがって、ムーブリミットを小さくする設定である。

さらに、次式の変数変換を行う。

$$\Delta \tilde{a}_i = \frac{\Delta a_i}{a_i} + \bar{\varepsilon}, \quad \Delta \tilde{b}_i = \frac{\Delta b_i}{b_i} + \bar{\varepsilon}, \quad \Delta \tilde{\phi}_i = \frac{\Delta \phi_i}{\phi_i} + \bar{\varepsilon} \quad (15)$$

$$0 \leq \Delta \tilde{a}_i \leq 2\bar{\varepsilon}, \quad 0 \leq \Delta \tilde{b}_i \leq 2\bar{\varepsilon}, \quad 0 \leq \Delta \tilde{\phi}_i \leq 2\bar{\varepsilon}$$

ここで、 $\bar{\varepsilon}$  は、初期値を 0.5 とし、30 ステップまでは  $\bar{\varepsilon}/1.05^n$  ( $n$ : ステップ数)、30 ステップ以上では  $\bar{\varepsilon}/1.05^{30}/1.1^{n-30}$  で絞り込みを行う。収束判定に用いる  $\varepsilon_c$  は 1/400 とする (この場合 72 ステップ以下で収束する)。

局所解への収束を回避するもう一つの方法として、繰り返し計算初期の段階における制約条件を緩和する方法を用いる。この方法では、質量制約値を次式のようにおく 9)。

$$\bar{m}_s = \bar{m}_s^* \left[ 1 + \left( 1 - \frac{n-1}{n_s} \right) \left( \frac{1}{\bar{m}_s^*} - 2 \right) \right] \quad \text{and} \quad \bar{m}_s \geq \bar{m}_s^* \quad (16)$$

ここに、 $\bar{m}_s$  は緩和された質量制約値、 $\bar{m}_s^*$  は与えられた質量制約値、 $n$  は最適化のステップ数、 $n_s$  は緩和を行う最終ステップ数である。(16)式の設定では、質量制約値が 0.5 以下の場合に制約値が緩和される。本論文では、 $n_s = 20$  とする。

また、位相を鮮明化するために、文献 9) で提案した重力制御関数を次式のように目的関数に付加する。

$$C^* (\{X\}) = \sqrt{C(\{X\})^2 + (w_g \tilde{C} \bar{g}(\{X\}))^2} \quad (17)$$

ここに、 $w_g$  は重み係数、 $\tilde{C}$  は  $C(\{X\})$  と等しいが、 $\{X\}$  に関する感度を 0 としたスケーリング係数、 $\bar{g}$  は次式で定義される無次元重力制御関数である。

$$\bar{g}(\{X\}) = g(\{X\}) / \sum_{i=1}^N m_i \quad (18)$$

$$g(\{X\}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} \left\{ \bar{\rho}_i^2 \bar{\rho}_j^2 + (1 - \bar{\rho}_i)^2 (1 - \bar{\rho}_j)^2 \right\}$$

ここに、 $\bar{\rho}_i = 1 - a_i b_i$ 、 $m_i$  は  $i$  要素と辺を共有する要素の数である。

## 2. 数値解析例

以上で示した方法の有効性を示すために、片持平板を拡張領域とする例題の解析を行う。まず、図 7 に示す例題に関して、重力制御関数によるフィルタリングの効果について調査する。質量制約値  $\bar{m}_s^*$  は 0.2、ユニットセルの孔の大きさ  $a, b$  の初期値は、 $a = b$  として全要素で均等とし、ユニットセルの角度パラメータ  $\phi$  の初期値は 0.25 とする。また、材料のヤング係数は 100GPa、ポアソン比は 0.3、板厚は 1、荷重  $F$  の大きさは 1 に設定する。有限要素分割数は  $30 \times 60$  とする。なお、解析に用いる有限要素は、Wilson と Taylor ら<sup>13),14)</sup>によって提案された 4 節点非適合四辺形要素<sup>15)</sup>とする。

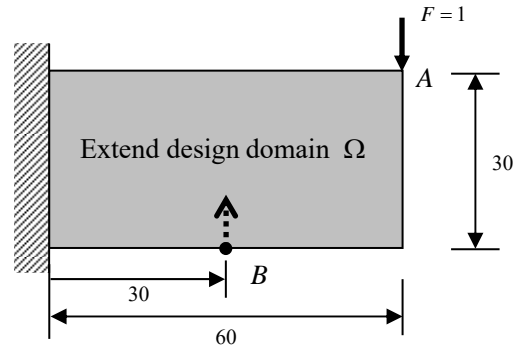
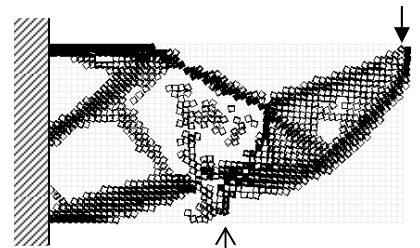
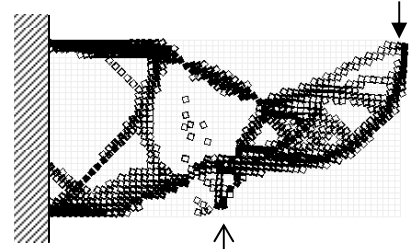


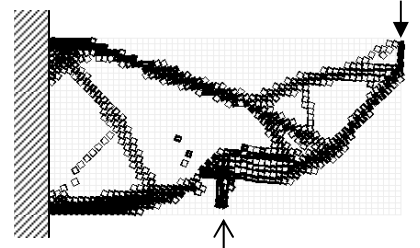
図 7 位相解析領域とその解析条件



(a)  $w_g = 0$ ,  $C = 5.03$ ,  $u_{2(A)} = -294$ ,  $u_{2(B)} = 785$



(b)  $w_g = 0.1$ ,  $C = 4.17$ ,  $u_{2(A)} = -245$ ,  $u_{2(B)} = 552$



(c)  $w_g = 0.15$ ,  $C = 3.29$ ,  $u_{2(A)} = -70.3$ ,  $u_{2(B)} = 146$

図 8 重み  $w_g$  の変化に対する重力フィルターの効果

図8は、(17)式の重み係数  $w_g$  が、0, 0.1, 0.15 の場合の最適位相解を示している。ただし、図では、各有限要素の密度  $\bar{\rho}_i (=1-a_i b_i)$  が0.05以上になるものに対して、ユニットセルを有限要素の大きさで表現して、変形後の位相形状を示している。ただし、変位にはスケーリングをかけている。また、図には、多目的コンプライアンス値  $C$  と、A点とB点の鉛直方向の変位  $u_2$  を示している。

これらの図より、重力フィルターの効果により、 $w_g$  が大きくなるにしたがって、中間密度が少なくなり、より明解な位相が得られることがわかる。ただし、コンプライアンス値は、 $w_g$  が大きくなるにしたがって小さくなり、A点とB点の間の相対変位もこれに伴って小さくなる。しかし、これらの位相から実際の構造物を設計するには、フィルターをかけた方がわかりやすい。

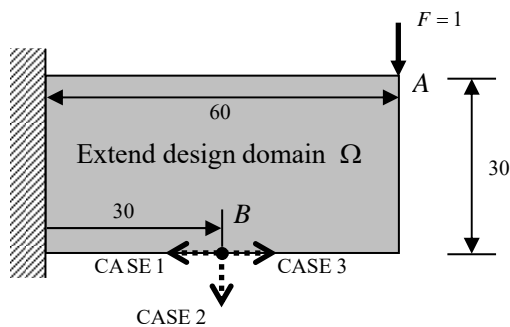


図9 位相解析領域と条件 (B点の変位方向を変えた場合)

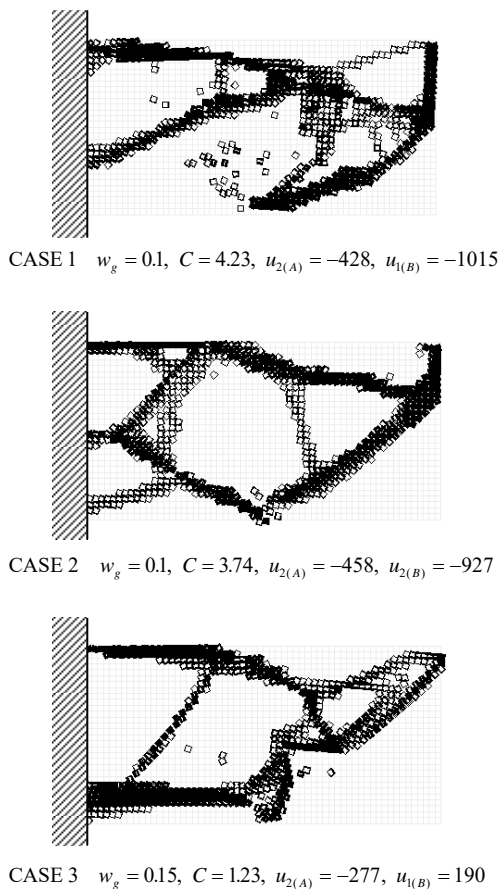


図10 弾性変形機構の最適位相解

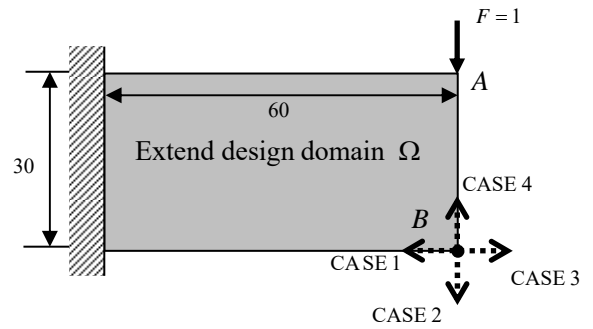


図11 位相解析領域と条件 (B点の位置を変えた場合)

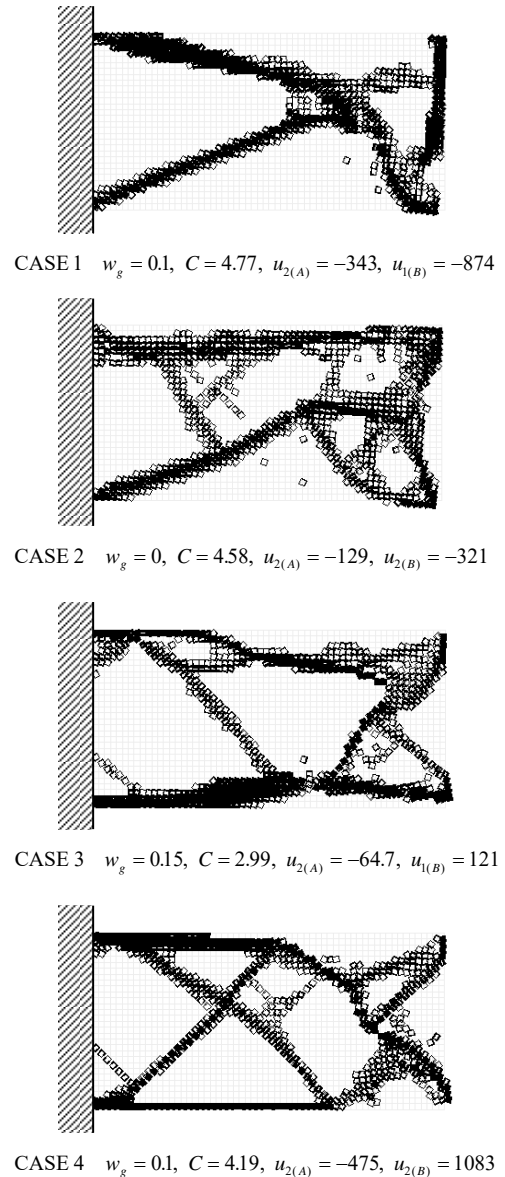


図12 弾性変形機構の最適位相解

次に、同じ解析モデルにより、図9に示すようにB点の変位の方向を変えた場合の解析を行う。図10は、CASE1~CASE3の方向の変位を生じさせる弾性変形機構の最適位相解を示したものである。図より、どの場合も目的の方向の変位が実現されており、

CASE 1 および CASE 2 では加力点の変位よりも大きな変位を  $B$  点に生じさせる機構が求まっている。また、各所にヒンジに近い形態が形成されていることがわかる。

最後に、図 11 に示すように、 $B$  点の位置を  $A$  点の真下にする問題を解析する。図 12 は、この問題の解析結果を示している。図からわかるように、この場合もすべての指定した方向に対して、効率のよい変位を生じさせる機構が形成されている。特に、CASE 2 は、西脇らの方法では妥当な結果が得られなかった問題であるが、本解析では有効な解が得られている。ただし、この場合は、重力フィルターをかけると境界とのつながりが無くなってしまいうため、フィルターの重み  $w_g$  を 0 にしている。したがって、他の位相と比較してやや不鮮明になっている。

また、以上の結果より、弾性変形機構では、剛性最大化問題と異なり、中間密度材料を完全に除くことは難しく、中間密度材料もヒンジを形成したり、変形を制御する役割を担っていることがわかる。

#### 4. まとめ

本論文では、均質化設計法を用いた位相最適化により弾性変形機構を求める有効な方法を提案した。本論文に示した方法の新しい点は、多目的関数に全体剛性を考慮する項を加え、単に指定点の変位を最大化するのではなく、加力点と指定点の相対仕事量を最大化する目的関数にしたこと、ユニットセルの角度を設計変数としたこと、および最適化問題の解法として SLP 法を用いる場合に問題となる局所解への収束と最適位相解の中間密度の問題を文献 9) の方法で改善した点にある。

本論文に示した方法の有効性を示すために、片持平板の解析領域内に弾性変形機構の位相を求める問題を解析した。まず、重力制御関数によるフィルタリングの効果を調査した結果、重み係数  $w_g$  を 0.1~0.15 にすることによってより明解な位相が得られることがわかった。次に、指定点の変位方向を変化させて、それぞれの機構の最適位相を解析し、すべての方向に対して変位効率の良い位相が得られることが確かめられた。最後に、指定点の位置が加力点の真下となる、既往の解析では妥当な解が得られなかった問題を解析し、本論文で提案した方法によれば、このような問題に対しても有効な解が得られることが確かめられた。

なお、本論文で提案した方法は、2 次元、3 次元の一般的な問題に適用できることを付記しておく。

**謝辞：**本研究を遂行するにあたり、平成 9 年度能村膜構造技術振興財団の助成金の補助を頂いた。また、トヨタ中央研究所の西脇眞二氏より貴重な助言を頂いた。ここに記して謝意を表します。

また、本研究は、第一著者が共著者とともに昨年度ミシガン大学において研究した内容を発展させたものであるが、このような研究の機会を与えて頂いた広島大学藤谷義信教授に深く感謝致します。

#### 参考文献

- 1) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi : Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 2) M. P. Bendsøe : *Optimization of structural topology, shape and material*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1995
- 3) 西脇眞二, Mary. I. Frecher, S. Min, 菊池昇 : 柔軟性を考慮した構造の最適化(第 1 報 定式化とコンプライアントメカニズムへの応用), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 96-1569, pp.2657-2664, 1997
- 4) S. Nichiwaki : Optimum structural topology design considering flexibility, Ph.D Thesis, Mechanical Engineering in The University of Michigan, 1998
- 5) 江島晋, 西脇眞二, 関口美奈子, 菊池昇 : コンプライアントメカニズムの最適設計法, 計算工学講演会論文集, Vol.3, No.2, pp.545-548, 1998
- 6) 江島晋, 西脇眞二, 菊池昇, 石井恵三 : 位相最適化手法を用いたコンプライアントメカニズムの設計, 計算工学講演会論文集, Vol.4, 1999
- 7) 江島晋, 西脇眞二, 関口美奈子, 菊池昇 : コンプライアントメカニズムの最適設計 (定量的な変位制約を考慮した場合), 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.65, No.663, 1999
- 8) K. Suzuki and N. Kikuchi : A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 9) 藤井大地, 菊池昇 : SLP 法を用いた位相最適化における数値的不安定の改善, 日本建築学会構造系論文集, No.521, pp.65-72, 1999
- 10) J. A. Hetrick and S. Kota : Size and shape optimization of compliant mechanisms : An efficiency formulation, *Proceedings of DETC'98, ASME Design Engineering Technical Conference*, Atlanta, 1998
- 11) 日本建築学会編 : 構造形態の解析と創生, 日本建築学会, pp.110-115 (山田貴博分担執筆), 1998
- 12) 例えば, 山川宏 : 最適化デザイン, 培風館, pp.144-145, 1993
- 13) E. L. Wilson, R. L. Taylor, W. P. Doherty, and J. Ghaboussi : Incompatible displacement models, in *Num. and Comp. Meth. in Struct. Mech.* (eds S. T. Fennes et al.), Academic Press, pp.43-57, 1973
- 14) R. L. Taylor, P. J. Beresford, and E. L. Wilson : A non-conforming element for stress analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.10, pp.1211-1220, 1976
- 15) 鷺津久一郎他編 : 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, pp.250-253, 1981

(1999 年 6 月 3 日原稿受理, 1999 年 9 月 3 日採用決定)



## 骨組の位相最適化手法を用いたリンク機構の創生

### CREATION OF LINK MECHANISMS USING TOPOLOGY OPTIMIZATION METHOD OF FRAME

藤井大地\*, 原田卓哉\*\*, 平田裕一\*\*\*  
Daiji FUJII, Takuya HARADA and Yuichi HIRATA

In this paper, the topology optimization method of link mechanisms is shown. In the link mechanisms composed of rigid bodies and hinges, the displacement of the output point can be controlled by the load of the input point. In the present method, the ground structure composed of beams is used in order to obtain the optimum topology of the link mechanisms. In the optimization problem, the sectional areas of the beams are chosen as design variables. The stiffness between the input point and the output point is maximized under the constraints of the displacement of the output point, the relativity displacement of the output point and input point, and the material usage. The optimization problem with different initial design variables are solved using the SLP optimizer, because the solution of this problem depends on the initial design variables. The initial design variables are given by random numbers or GA. Some examples are shown to demonstrate the effectiveness of the present method.

**Keywords:** link mechanism, topology optimization, ground structure method, SLP, GA

リンク機構, 位相最適化, グランドストラクチャー法, 逐次線形計画法, 遺伝的アルゴリズム

#### 1. はじめに

構造物の最適な形態を求める位相最適化手法は, 主として, 構造物の剛性, 固有振動数, 座屈荷重, 強度などを最適化する手法として発展してきた<sup>1)</sup>。これらは, より強い構造形態を求めようとするものであるが, 一方で, より柔軟な構造形態を求める研究も行われている<sup>2)-10)</sup>。前者は, 一般に構造物の変形を小さく抑えようとするのに対し, 後者は, 逆に変形を拡大したり, 変形の方法を変換したりする形態を創生しようとするものである。このような手法は, 機械分野では, 剛体とヒンジを組み合わせたリンク機構や材料の弾性変形を利用するコンプライアントメカニズムの新しい形態を創生する技術として注目されている。

一方, 建築分野においても, 最近, 建物の制震装置などに, 変形を拡大するトグル機構などが導入されており, より合理的な制震機構を開発する手法として, このような位相最適化手法を利用した機構創生技術が応用できる可能性が出てきた。そこで, 本論文では, 特に制震技術への応用を目的として, 位相最適化手法を利用したリンク機構の創生法を提案する。

メカニズム(機構)の創生法には, 大きく, 連続体をベースにする方法<sup>2)-7)</sup>と, 骨組をベースにする方法<sup>8)-10)</sup>がある。建築分野では, 構造が骨組で扱われることが多いため, 制震機構の創生には, 骨組をベースにする方法の方が適用しやすいと考えられる。骨組ベースの位相最適化手法は, 位相を求めるための背景の構造を設定し, その背景の構造から, 最適化計算によって, 条件に適した

構造を浮かび上がらせる方法(不必要な部材を消して行く方法)である。このような方法は, 一般にグランドストラクチャー法と呼ばれており, 本論文でもこの方法を用いる。

メカニズムを創生するための最適化問題の定式化には様々なものが提案されているが, ここでは, メカニズムの出力点の変位, 加力点と出力点の相対変位, および創生するメカニズム部材の総体積を制約条件として, メカニズムの動きを止めた時の剛性を最大化する最適化問題として定式化する。本最適化問題は, 藤井らの研究<sup>10)</sup>に示されるように, 最適解が設計変数の初期値に依存する多峰性問題となる。このため, 本論文においても, 藤井らの示した方法<sup>10)-11)</sup>と同様に, 設計変数の初期値が異なる問題を多数解くことによってグローバル最適解を求める。

以上の方法は, 変形を拡大するための加力点と出力点の相対変位制約を付加したこと以外は, 藤井らの示した方法<sup>10)-11)</sup>と同様である。しかし, この方法にはいくつかの問題点がある。1つは, このような方法で得られた最適解から実際のメカニズムを制作すると, 解析どおりに動かない場合があるということである<sup>12)</sup>。これは, グランドストラクチャーの解析が微小変形理論にもとづくためである。例えば, 微小変形理論では, 部材角が生じても部材長さが変化しないが, これがリンク機構を制作した時の変形拘束の原因となる。このような問題を解決するために大変形理論にもとづく位相最適化手法もいくつか提案されているが<sup>13)-15)</sup>, 多峰性問題の場合, 計算時間が膨大となり, 実用的ではない。そこで,

\* 近畿大学工学部 助教授・博士(工学)

\*\* 近畿大学工学部 大学院生

\*\*\* 三井住友建設技術研究所 主任研究員・工修

Assoc. Prof., School of Engineering, Kinki University, Dr. Eng.  
Graduate Student, School of Engineering, Kinki University  
Chief Researcher, Technical Research Institute, Mitsui-Sumitomo Construction Co., M. Eng.

本論文では、多峰性問題であることを逆に利用して、初期値の異なる局所最適解の骨組構造の大変形解析を簡易的に行うことで部材長さの変化を計算し、部材長さが増える局所最適解をグローバル最適解（複数の局所最適解の中で目的関数値が最小となる解）の候補に残さない方法を提案する。他の1つの問題は、設計変数の初期値の与え方である。初期値を単に乱数で与える方法では、グローバル最適解の収束が非常に遅いため、藤井ら<sup>10),11),12)</sup>は、それまでに得られている最も良い解をもとに次の問題の初期値を与える方法を用いている。しかし、さらに合理的な方法として、局所最適解の適応度を評価することで、優秀な初期値群を、GAを利用して生成することも考えられる。そこで、本論文では、このような2つの方法を比較することで、GAによる初期値生成法の有効性を検討する。

以下、本論文第2章では、グランドストラクチャー法によるリンク機構の創生理論を示す。第3章では、本論文に示す最適化問題が多峰性問題であることを示し、グローバル最適解の探索法を示す。また、大変形時の変形拘束の原因となる部材長さの変化に対する処理法を示す。第4章では、ラーメン構造内部に制震機構を想定したリンク機構を創生する例題で、本論文で提案する手法の有効性を検討する。第5章では、以上の結論を述べる。

## 2. リンク機構創生理論

### 2.1 位相最適化問題の定式化

リンク機構を創生するための位相最適化問題の例として、図1のCase1に示すラーメン構造内に制震機構を創生する問題を考える。図1の例題は、 $P_1$ 点（入力点）に加わる水平荷重  $F$  により、 $P_2$ 点（出力点）に鉛直上向の変位を生じさせるリンク機構を創生する問題である。なお、ここでは、 $P_2$ 点と柱脚間の梁との間に減衰装置を設置することを想定している。図中のラーメン構造内部の部材群が、リンク機構を創生するための背景構造（グランドストラクチャー）で、リンク機構を創生する場合は、背景構造の接合部はピン接合とし、部材には軸力のみが働くものとする。

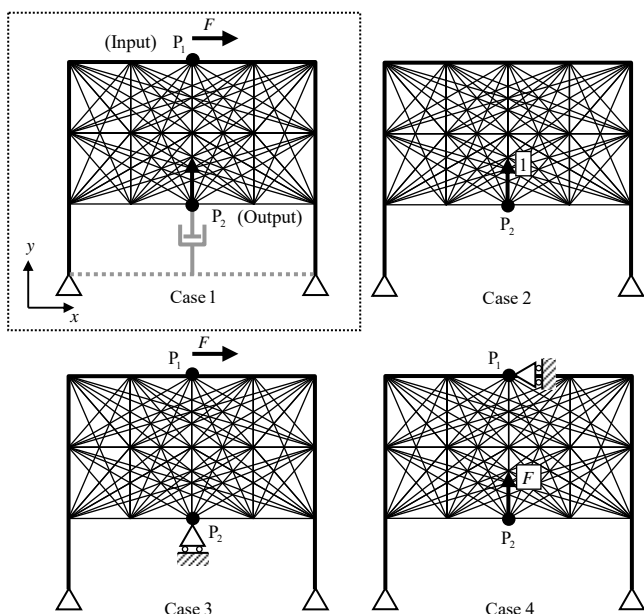


図1 位相最適化問題の定式化を説明するための例題

創生されるリンク機構の必要条件としては、まず、 $P_2$ 点の変位が確保されることと、 $P_1$ 点の変位が $P_2$ 点で拡大されることが挙げられる。後者の条件は、減衰効率の高い制震機構を創生するために必要である。次に、 $P_2$ 点に減衰装置（ダンパー）が装着されるものとする、 $P_2$ 点を引き上げるための力がラーメン構造から十分に伝えられる必要がある。この条件を満足させるためには、図1のCase3に示すように、 $P_2$ 点を変位方向に拘束した場合に $P_1$ 点の外力に対する剛性を確保する必要があり、また、逆にCase4に示すように、 $P_1$ 点を外力方向に拘束した場合に $P_2$ 点の変位方向の外力に対する剛性を確保する必要がある<sup>7)</sup>。以上の条件を満たす骨組構造を図1に示す背景構造から浮かび上がらせる。

背景構造から目的のリンク機構を創生する最適化問題を定式化すると次のようになる。

$$\min_{\alpha} [C^3(\alpha) + C^4(\alpha)] \quad (1)$$

where

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_N\} \quad (2)$$

subject to

$$V = \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) A_i^0 l_i \leq V^{\max} \quad (\text{体積制約}) \quad (3)$$

$$d_{\text{out}}^{\min} \leq C^{21}(\alpha) \leq d_{\text{out}}^{\max} \quad (\text{絶対変位制約}) \quad (4)$$

$$r_{\text{inout}}^{\min} \leq \frac{C^1(\alpha)}{C^1(\alpha)/F} \leq r_{\text{inout}}^{\max} \quad (\text{相対変位制約}) \quad (5)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N) \quad (\text{設計変数制約}) \quad (6)$$

ここに、 $A_i^0, l_i$ は背景構造の*i*番目部材の初期断面積と長さ、 $\alpha_i$ は*i*番目部材の設計変数、 $N$ は背景構造の部材数、 $V^{\max}$ は背景構造の部材総体積の上限値、 $d_{\text{out}}^{\min}, d_{\text{out}}^{\max}$ は出力点の変位の上下限值、 $r_{\text{inout}}^{\min}, r_{\text{inout}}^{\max}$ は入力点と出力点の相対変位の上下限值を表す。また、 $C^3, C^4$ は、Case3とCase4の外力  $F$  のなす仕事量で、 $F$ が一定の場合、外力作用点の変位に比例することからコンプライアンス（撓性：剛性の逆数）と呼ばれている。 $C^{21}$ は、 $P_2$ 点の鉛直上方の変位を表すコンプライアンスで、Case2の $P_2$ 点の外力にCase1の $P_2$ 点の変位を掛けた仕事量を表す。また、 $C^1$ は、Case1のコンプライアンスを表す。以上の各コンプライアンスは次式から計算される。

$$\begin{aligned} C^1 &= F \cdot u_{p1}^{\text{Case1}} = \mathbf{d}^{(1)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(1)} & C^{21} &= 1 \cdot v_{p2}^{\text{Case1}} = \mathbf{d}^{(2)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(1)} \\ C^3 &= F \cdot u_{p1}^{\text{Case3}} = \mathbf{d}^{(3)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(3)} & C^4 &= F \cdot v_{p2}^{\text{Case4}} = \mathbf{d}^{(4)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(4)} \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 $u_{p1}, v_{p2}$ は、各Caseの $P_1, P_2$ 点の*x*方向変位と*y*方向変位を表す。また、 $\mathbf{K}$ は構造全体の剛性マトリクス、 $\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{d}^{(2)}, \mathbf{d}^{(3)}, \mathbf{d}^{(4)}$ は、図1のCase1～Case4の問題を有限要素法で解いた時の節点変位ベクトルを表す。なお、(1), (4), (5)式等をコンプライアンスで表すのは、後に示す感度解析を容易にするためである。

また、各Caseの問題を解く場合、背景構造の*i*番目部材の要素剛性マトリクスは、次式の断面積  $A_i$  を用いて計算する<sup>16)</sup>。

$$A_i = \left(1 - \sqrt{1 - (1 - \alpha_i)^2}\right) A_i^0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (8)$$

(8)式は円の方程式となっており、 $\alpha_i$ が0の時は $A_i = A_i^0$ 、 $\alpha_i$ が1の時は $A_i = 0$ となるが、例えば  $\alpha_i$ が0.5の場合は、 $A_i = 0.134A_i^0$ と

なり、体積計算に用いられる断面積  $0.5A_i^0$  よりも小さくなる。すなわち、(8)式を用いると、背景構造の剛性を高めるためには、設計変数が 0 または 1 に分かれる方が有利となる。これは、位相最適化問題では、部材の有無（設計変数の 0/1）により最適位相を求めることが理想であるが、ここでは連続緩和によって 0/1 以外の値も許容しているため、できるだけ最適解の設計変数が 0/1 になるようにする方法の一つである<sup>10)</sup>。

## 2.2 最適化問題の解法

(1)~(6)式の最適化問題は、非線形性が強く、収束解が得られにくい。したがって、解の収束に関してロバスト性の高い SLP 法（逐次線形計画法）を用いて解く。

SLP 法では、まず、(1)式および(3)~(6)式を第  $k$  ステップの解の近傍でテーラー展開し、その 1 次項のみを採用する。この場合、(1)式および(3)~(6)式は次式のように書き換えられる。

$$\min_{\Delta\alpha} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\partial C^3}{\partial \alpha_i} \Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial C^4}{\partial \alpha_i} \Delta\alpha_i \right] \quad (9)$$

subject to

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \Delta\alpha_i \leq V^{\max} - V(\alpha^{(k)}) \quad (10)$$

$$d_{\text{out}}^{\min} - C^{21}(\alpha^{(k)}) \leq \sum_{i=1}^N \frac{\partial C^{21}}{\partial \alpha_i} \Delta\alpha_i \leq d_{\text{out}}^{\max} - C^{21}(\alpha^{(k)}) \quad (11)$$

$$\frac{r_{\text{inout}}^{\min}}{F} - \frac{C^{21}(\alpha^{(k)})}{C^1(\alpha^{(k)})} \leq \sum_{i=1}^N \left( \frac{\frac{\partial C^{21}}{\partial \alpha_i} C^1 - C^{21} \frac{\partial C^1}{\partial \alpha_i}}{(C^1)^2} \right) \Delta\alpha_i \leq \frac{r_{\text{inout}}^{\max}}{F} - \frac{C^{21}(\alpha^{(k)})}{C^1(\alpha^{(k)})} \quad (12)$$

$$\max[-\alpha_i^{(k)}, -\varepsilon] \leq \Delta\alpha_i \leq \min[1 - \alpha_i^{(k)}, \varepsilon] \quad (i=1, \dots, N) \quad (13)$$

ここに、 $\Delta\alpha_i$  は設計変数の増分値、 $\alpha$  の上添え字 ( $k$ ) は第  $k$  ステップの解であることを表す。また、 $\varepsilon$  は設計変数の変動幅を規定するものでムープリミットと呼ばれる。本論文では、 $\varepsilon=0.1$  とし、収束が始まったら 1.1 で割ることにより徐々に小さくしている。また、(9)~(12)式中の設計変数に関するコンプライアンスおよび体積の感度係数は次式から求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^3}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}_i^{(3)r} \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{d}_i^{(3)}, & \frac{\partial C^4}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}_i^{(4)r} \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{d}_i^{(4)}, & \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} &= -A_i^0 I_i \\ \frac{\partial C^{21}}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}_i^{(2)r} \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{d}_i^{(1)}, & \frac{\partial C^1}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}_i^{(1)r} \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{d}_i^{(1)} \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、 $\mathbf{k}_i, \mathbf{d}_i$  は、 $i$  番目要素の剛性マトリクスと節点変位ベクトルである。

(9)~(13)式は、 $\Delta\alpha_i$  が十分小さいとすれば、線形計画問題と見なせるため、シンプレックス法を用いて解くことができる。そして、得られた増分解を第  $k$  ステップの設計変数に加え、これを  $k+1$  ステップの解として同様の計算を繰り返す。そして、すべての設計変数の増分解が十分 0 に近づいた時点で収束と見なし、最適解が求まる。本論文では、50 ステップ改修計算を行っている。

## 3. グローバル最適解の探索法

### 3.1 多峰性問題の解法

(1)~(6)式の最適化問題は、(2)式の  $\alpha$  の初期値によって最適解が

変化する多峰性問題となる<sup>10)</sup>。例えば、図 2 は、後の 4.1 節に示す解析例で、 $\alpha$  の初期値を乱数で変化させて、300 の異なる初期値に対する最適化問題を解き、それぞれの最適解の目的関数値 ( $C^3 + C^4$ ) をプロットしたものである。図に示すように、 $\alpha$  の初期値によってそれぞれの最適解の目的関数値が異なることがわかる。また、図中に示した太線は、初期値の異なる問題を解くことに見つかった最小の目的関数値を結んだものであるが、初期値の異なる問題を数多く解くことによって、より目的関数値が小さい最適解が求まることがわかる。なお、以下では、各初期値に対する最適解を局所最適解と呼び、その局所最適解の中で最小の目的関数値となる解をグローバル最適解と呼ぶことにする。

このような多峰性問題の解法としては、GA（遺伝的アルゴリズム）などの発見的方法を用いることも考えられるが、位相最適化問題の場合、設計変数の数が非常に多くなるため計算効率がよくない。したがって、藤井ら<sup>10)</sup>は、複数の異なる初期値に対する最適化問題を解いて、目的関数がより最小となる最適解を探索する方法を用いている。

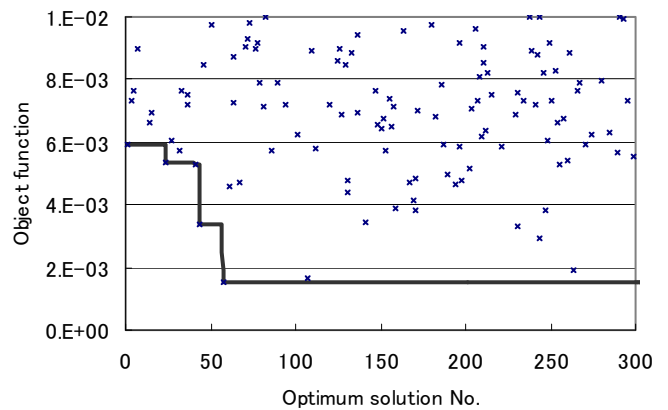


図 2  $\alpha$  の初期値を変化させた場合の  $C^3 + C^4$  の最適値

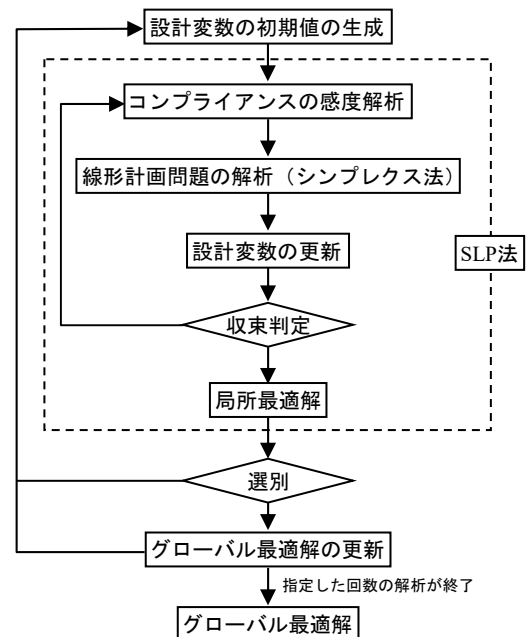


図 3 グローバル最適解を求めるための計算フロー

図 3 は、本方法の計算アルゴリズムを示している。まず、設計変数の初期値を乱数で生成し、2 章に示した方法により局所最適解を求める。得られた局所最適解の内、制約条件の満足度によって選別を行い、選別の判定に合格し、かつ目的関数値が、これまでの解より小さいならばグローバル最適解を更新する。以上の計算を指定した回数繰り返すことにより、グローバル最適解を得る。

### 3.2 初期値の生成法

設計変数の初期値を単に乱数で与える方法では、グローバル最適解の探索効率がよくない。そこで、本論文では、設計変数の初期値をそれまでに得られている最も優秀な局所最適解を利用して生成するエリート戦略的方法と、GA を用いて生成する方法を示し、次章でその有効性を検討する。

#### a) エリート戦略的方法

エリート戦略的方法では、それまでに得られている最も優秀な局所最適解の半分の部材を乱数で選定し、その部材の設計変数が 0.1 以下の場合には 0.9 に、それ以外は 0 に変更する。また、乱数で選択されなかった部材の設計変数はそのままにする。また、乱数による選択数は、異なる初期値に対する最適化問題を 50 以上解いた時点で 1/4 に、100 以上解いた時点で 1/8 に減じ、それ以降は 1/8 とする。そして、以上の方法で生成された設計変数に背景構造の部材の総体積が上限値  $V^{\max}$  に等しくなるように均等な倍率を掛け、次ステップの設計変数の初期値とする。

#### b) GA を用いる方法

GA を用いる方法では、まず、設計変数の初期値集団を乱数により生成し、SLP 法による解析により、各初期値に対する局所最適解を求める。ただし、生成された設計変数には、背景構造の部材の総体積が上限値  $V^{\max}$  に等しくなるように均等な倍率を掛ける。次に、得られた局所最適解から次世代の初期値を生成する。具体的には、局所最適解の設計変数が 0.7 以上の場合を 1 とし、それ以外を 0 とし設計変数の遺伝子を作る。次に、それぞれの局所最適解の目的関数値を各初期値に対する適応度とし、ルーレット方式による淘汰を行う。淘汰をパスした初期値同士を交叉し、次世代の初期値の遺伝子とする。次に、この 2 世代目の初期値集団から、SLP 法により局所最適解を求め、得られた局所最適解から次世代の初期値を生成する。以上の過程を繰り返して、より適応度の高い最適解を探索する。ただし、交叉は 1 点交叉とし、交叉率は 0.6 とする。また、突然変異率を 0.05 とする。また、交叉した設計変数は、体積制約の上限値  $V^{\max}$  を超える場合があるので、このような場合は、再度背景構造の総体積が上限値  $V^{\max}$  に等しくなるように均等な倍率を掛ける。また、この場合もエリート戦略を導入し、初期値集団の個体数の 1/2 は、適応度の高いものを残す（淘汰しない）。

### 3.3 局所最適解の選別

SLP 法で求められた局所最適解には、生成された初期値によって、制約条件を満たす解が見つからない場合がある。したがって、このような解は、目的関数値が良くてもグローバル最適解として採用しないようにする必要がある。本論文では、(4)、(5)式の制約条件で、局所最適解が次式を満足しない場合には、グローバル最適解を更新しないようにしている。

$$\begin{aligned} 0.8 \cdot d_{\text{out}}^{\min} &\leq C^{21}(\boldsymbol{\alpha}^{\text{opt}}) \leq 1.2 \cdot d_{\text{out}}^{\max} \\ 0.8 \cdot r_{\text{inout}}^{\min} &\leq \frac{C^{21}(\boldsymbol{\alpha}^{\text{opt}})}{C^1(\boldsymbol{\alpha}^{\text{opt}})/F} \leq 1.2 \cdot r_{\text{inout}}^{\max} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 $\boldsymbol{\alpha}^{\text{opt}}$  は局所最適解の設計変数を表す。なお、(15)式では、上下限値に 2 割のトレランスを設定している。また、(3)式の体積制約はほとんどの場合満足されるため、このような判定は省略している。

また、本手法では、背景構造の解析を微小変形理論にもとづく有限要素法で行うため、実際にリンク機構の模型を作成した場合、変形拘束が生じて、解析どおりの動きをしない場合がある<sup>12)</sup>。この原因の多くは、微小変形理論では、部材と直交方向の変位によって部材角が生じて部材長さが変化しないと仮定しているが、実際には部材長さが変化し、部材の軸方向の剛性によって変形が拘束されることによる。例えば、図 4 に示すような構造では、微小変形理論では、節点 B で大きな変位が生じ(実際には解けない)、部材 AB、AC には軸力は働かない。しかし、大変形時には、部材の軸力によって変形は拘束され、大きな変位は生じない。これがリンク機構の変形拘束の原因となる。

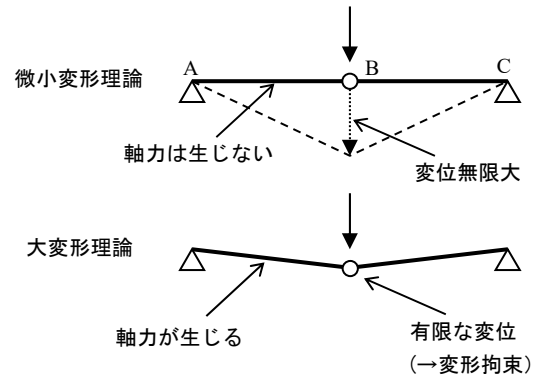


図 4 大変形時の変形拘束の原因

このような変形拘束を生じさせないためには、背景構造を大変形理論にもとづく解析法で解析すれば良いが、この場合、最適化計算の繰り返しと異なる初期値に対する繰り返しに加えて、大変形解析の繰り返し計算が必要になるため実用的ではない。そこで、本論文では、局所最適解に対して、大変形時の部材の軸力を近似的に計算し、大変形時に大きな軸力を生じる部材があれば、グローバル最適解の候補に残さない方法を用いる。

大変形時の軸力を近似的に求めるために、まず、局所最適解の骨組構造を、図 1 の Case1 の条件で解析を行う。ただし、この場合は、大変形を生じさせるために、荷重に倍率を掛けて大きくする。そして、得られた節点変位を元の節点座標に加えることによって、新たな節点座標を求める。この新たな節点座標からすべての要素の長さを計算し、これから大変形時の軸力を次式から計算する。

$$P_i^L = EA_i \frac{l_i^L - l_i}{l_i} \quad (16)$$

ただし、 $P_i^L$  は大変形時の軸力、 $l_i^L$  は新たな節点座標から計算された要素長さを表す。リンク機構では、大変形時にも部材の軸力

は生じないため、(16)式から得られる軸力が大きくなれば、大変形時に変形拘束が生じる可能性が高い。そこで、本論文では、次式の係数

$$r_p = 1 + \max(|P_1^t|, |P_2^t|, \dots, |P_i^t|, \dots, |P_N^t|) / F \quad (17)$$

を計算し、これを(1)式の目的関数値( $C^3 + C^4$ )に掛けることで、局所最適解の目的関数を評価する。ただし、(17)式の  $F$  は加えた外力値を表す。したがって、 $r_p$  が大きくなれば、グローバル最適解は更新されない。なお、本論文では、(16)式の軸力計算では原問題の1万倍の荷重を与えている。

## 4. 解析例

### 4.1 解析モデル

解析例として、図5に示す問題の解析を行う。本問題は、梁に加わる水平力によって、 $P_2$ 点を引き上げるリンク機構を求めるものである。設計対象は、柱・梁ラーメン構造内のトラス構造で、部材の初期断面積はすべて同一とする。また、ヤング係数を10000、柱・梁の断面積を10000、断面2次モーメントを795.8、背景構造の部材は、初期断面積を100として解析を行っている。なお、部材の材料・断面定数は、最適位相にほとんど影響しないため適当な値を与えている(単位も省略)。

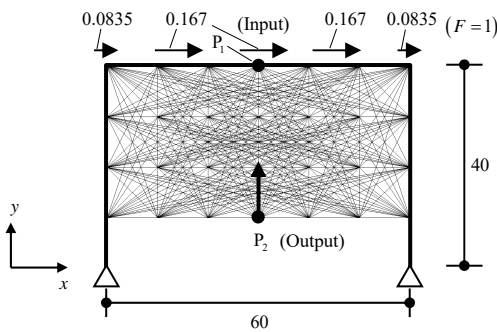


図5 解析モデル

### 4.2 大変形時の変形拘束の検討

まず、図5の問題で、(17)式を用いた局所最適解の選別の有効性を検討する。ただし、初期値生成法は、3.2節 a)の方法を用いる。

図6、図7は、同じ解析条件の下で、(17)式によるペナルティを課した場合と課さない場合のグローバル最適解の位相と解析上の変形を示している。ただし、(3)式の  $V^{\max}$  は14000、(4)式の  $d_{out}^{\min}$ 、 $d_{out}^{\max}$  は0.01と1、(5)式の  $r_{inout}^{\min}$ 、 $r_{inout}^{\max}$  は3と10で与えている。また、初期値の異なる最適化問題は1500回解いている。図より、どちらの解もほぼ制約条件を満足し変形拡大が得られていることがわかる。

また、図8、図9は、それぞれの最適解を参考にして作成した模型の変形前と変形後の写真を示している。ただし、模型では、大変形を実現するため、ラーメン構造の柱・梁接合部はピン接合としている。図8、9から、図6から得られたメカニズムでは変形拘束が生じるのに対して、図7から得られたメカニズムでは大きな変形まで拘束が生じないことがわかる。このことから、(17)式の条件を加えることで、変形拘束を回避でき、より大きな変形に対応できるメカニズムが創生されることがわかる。

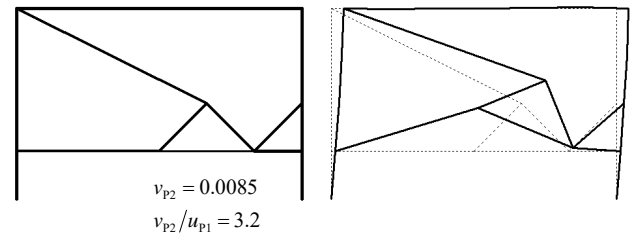


図6 解の位相と変形(大変形を考慮しない場合)

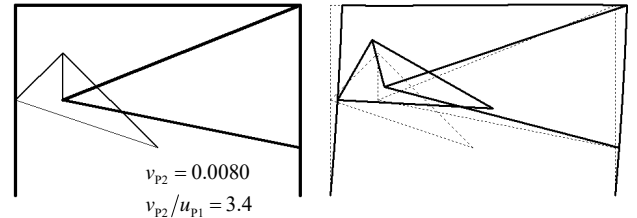


図7 解の位相と変形(大変形を考慮した場合)

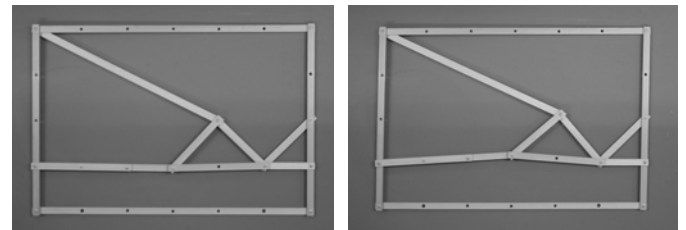


図8 図6の解を参考に作成した模型とその変形

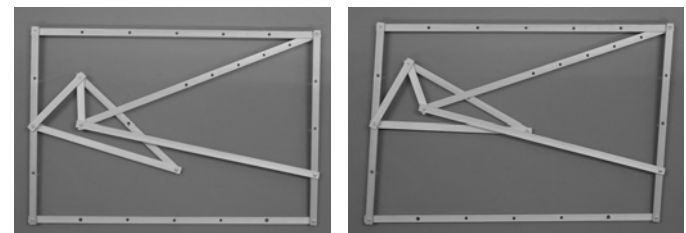


図9 図7の解を参考に作成した模型とその変形

### 4.3 初期値の生成法に関する検討

次に、3.2節 b)に示したGAによる初期値生成法の有効性を検討する。GAにおいても、(17)式を固体の適応度として考慮する。

図10は、前節と同じ解析条件の下で、3.2節 b)のGAを用いた方法で初期値生成を行った場合の優秀な局所最適解群から3個を選択して示したものである。ただし、本解析では、初期値の個体数は20とし、1000世代の更新を行っている。これは、初期値の異なる最適化問題を  $20 \times 1000 = 20000$  回解くことに相当する。計算時間は、Pentium M 1.8GHzのパソコンで約10時間であった。

図中のNoは、適応度の順位を示している。なお、適応度が高くても、部材数が多く複雑な機構となっているものもあり、ここでは、よりシンプルな機構となっていたNo.2, 6, 13を採用している。また、図には、これらの位相をもとに作成した模型とその左右両方向の変形挙動を示している。図より、いずれの模型も変形拘束を起こしていないことがわかる。また、これらの図より、GA

による初期値生成法では、一度の解析で、多様な解が得られることがわかる。実際の製品開発では、本最適化問題では考慮されていないヒンジの数や制作の容易さなどが必要となるため、多様な解から目的のものを選択することが必要になる。したがって、このような観点からすれば、3.2節 a)の方法よりも、3.2節 b)のGAによる初期値生成法は有利であると考えられる。

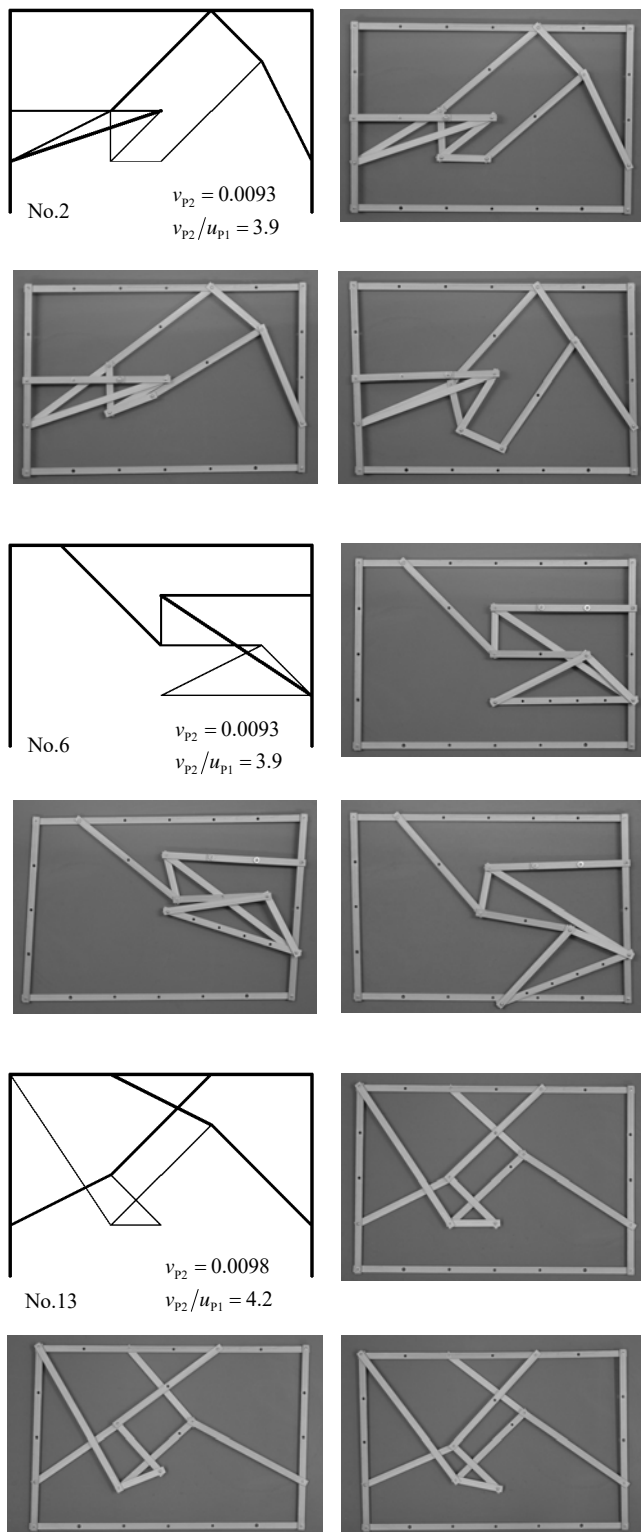


図 10 GA による初期値生成法で得られた優秀な解とその模型

## 5. まとめ

本論文では、制震技術への応用を目的として、位相最適化手法を利用したリンク機構の創生法を提案し、ラーメン構造内にリンク機構を創生する例題により、その有効性を検討した。その結果、本方法により、ラーメン構造の変形を拡大するリンク機構を創生することが可能であることが確かめられた。

また、本方法の最適化問題は、多峰性問題となるため、グローバル最適解の探索法として、2 種の設計変数の初期値生成法を示し、その有効性を検討した。その結果、どちらの方法も効率のよい探索が可能であるが、多様な解を得ようとする場合は、GAによる初期値生成法が有利であることがわかった。

また、本方法の構造解析が微小変形理論にもとづくために生じる大変形時の変形拘束の問題は、局所最適解の選別で、近似的な大変形解析時の軸力を評価することで解決できることが示された。

本方法は、これまでに考えられていない新しいリンク機構を創生することができるため、制震装置の他にも様々な応用が期待される。

## 参考文献

- 1) Bendsoe, M. P., *Optimization of structural topology, shape and material*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1995
- 2) Nishiwaki, S., Frecker, M.I., Min, S. and Kikuchi, N., Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 42, pp.535-559, 1998
- 3) Nishiwaki, S., Min, S., Yoo, J. and Kikuchi, N., Optimal structural design considering flexibility, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 190, pp.4457-4504, 2001
- 4) 西脇眞二, Frecker, M. I. and Min, S., 菊池昇, 柔軟性を考慮した構造の最適化 (第1報 定式化とコンプライアントメカニズムへの応用), 日本機械学会論文集 (C編), 63(612), pp.81-88, 1997
- 5) 江島晋, 西脇眞二, 関口美奈子, 菊池昇, コンプライアントメカニズムの最適設計 (定量的な変位制約を考慮した場合), 日本機械学会論文集 (A編), 65(663), pp.1164-1171, 1999
- 6) 藤井大地, 江島晋, 菊池昇, 均質化設計法を用いた弾性変形機構の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, 528, pp.99-105, 2000.2
- 7) 細山亮, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 松井和己, 寺田賢二郎, コンプライアントメカニズムのトポロジー最適設計法 (荷重入力位置の変位と出力位置の変位の比を考慮した場合), 日本機械学会論文集 (C編), 70巻, 696号, pp.2384-2391, 2004
- 8) Frecker, M. I., Anathasuresh, G. K., Nishiwaki, S., Kikuchi, N and Kota, S.: Topological Synthesis of Compliant Mechanisms Using Multi-Criteria Optimization, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, 119, pp.238-245, 1997
- 9) Frecker, M. I., Kikuchi, N. and Kota, S.: Topology optimization of compliant mechanisms with multiple outputs, *Structural Optimization*, 17, pp.269-278, 1999
- 10) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣, 石川雅意, 弾性リンク機構の形態最適化 (変位を制約条件とする骨組構造の位相最適化), 日本機械学会論文集 (C編), 67(664), pp.3730-3737, 2001
- 11) 藤井大地, パソコンで解く構造デザイン, 丸善, 2002
- 12) 日本建築学会編, 空間構造におけるコンピュータ利用の新しい試み, 1.3節, 日本建築学会, 2005.3
- 13) Bruns, T.E., Tortorelli, D.A., Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 190, pp.3443-3459, 2001
- 14) Pedersen, C.B.W., Buhl, T. and Sigmund, O., Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 50, pp.2683-2705, 2001
- 15) Yoon, G. H. and Kim, Y, Element connectivity parameterization for topology optimization of geometrically nonlinear structures, *Int. J. of Solids and Structures*, 42, pp.1983-2009, 2005
- 16) 鳥垣俊和, スカラー計算機上でのボクセルを用いたトポロジー最適化, 計算工学講演会論文集, Vol.7, pp.565-568, 2002

(2005年4月6日原稿受理, 2005年8月3日採用決定)

## 連続体の位相最適化手法を用いた制震機構の創生 CREATION OF DAMPING MECHANISMS USING TOPOLOGY OPTIMIZATION METHOD OF CONTINUUM

藤井大地\*, 谷澤 毅\*\*  
*Daiji FUJII and Tsuyoshi TANIZAWA*

In this paper, a topology optimization method to create damping mechanism of a building is shown. The topology is created on continuum divided in finite elements. In the optimization problem, the densities of the elements are chosen as design variables. The stiffness between the input point and the output point is maximized under the constraints of the displacement of the output point, the relativity displacement of the output point and input point, and the material usage. The optimization problem with different initial design variables is solved using the SLP optimizer, because the solution of this problem depends on the initial design variables. The initial design variables are given by random numbers. Some examples are shown to demonstrate the effectiveness of the present method.

**Keywords:** Topology optimization, Damping mechanism, Density approach, Many peaks-related problem, SLP, SA

位相最適化, 制震機構, 密度法, 多峰性問題, 逐次線形計画法, 疑似焼き鈍し法

### 1. はじめに

近年、東海沖、南海沖地震などの大地震に備えて既存建物の耐震改修が重要な課題となっている。このような耐震改修の主なものには、ブレースや耐震壁を付加することによって建物の剛性を高める耐震工法と、制震ダンパーを付加することによって建物の減衰性を高める制震工法がある。特に、最近では、制震工法の発展がめざましく、様々な形態のものが提案されている。

既存建物の耐震・制震工法では、設置できる壁面等が限られているため、小スペースで効率のよい装置の開発が望まれている。このため、石丸、久保田ら<sup>1)</sup>は、トグル機構を利用して変形を拡大する制震装置を開発し、実用化している。

このような背景から、藤井、原田、平田<sup>2)</sup>は、さらに減衰効率の高い制震機構を開発することを目的として、位相最適化手法をこのような制震機構の創生に用いることを提案し、骨組をベースとするリンク機構創生法を開発している。このような方法により、柱・梁からなるラーメン構造内部にラーメンの変形を拡大する様々な機構を創生することが可能になった。しかしながら、最近では、天井裏などのさらに小スペースの減衰機構の開発が目指されており<sup>3)</sup>、このような小スペースの問題では、骨組をベースとする手法ではシンプルな機構が得られにくいという問題が生じた。

そこで、本研究では、連続体をベースとする手法により、制震機構を創生することを試みる。連続体をベースにする機構創生法は、菊池ら<sup>4)</sup>の提案した位相最適化手法を発展させた方法が、西

脇ら<sup>8-10)</sup>によって提案されている。また、藤井ら<sup>11)</sup>は、目的関数と位相の鮮明化を行うフィルタリング法を改良することで、より明確な位相を求める方法を提案している。さらに、最近では、細山、西脇ら<sup>12)</sup>が、従来の方法を改良し、より安定的な解法に発展させている。

しかしながら、これまでの方法では、制約条件や目的関数の重み係数等はかなり試行錯誤しなければ指定した方向に変位を生じさせる明解な位相が得られない場合が多かった。藤井ら<sup>9)</sup>は、骨組をベースとする手法で、このような原因は、機構を生成する最適化問題が初期値に依存する多峰性問題であるためと考え、初期値を変化させて、より最適解を探索することで、多様な制約条件下でも明解な位相が得られることを示した。

そこで、本研究では、骨組をベースとする手法で提案した方法を連続体をベースとする方法に適用し、制約条件に対してロバスト性の高い機構創生手法を開発する。そして、この方法により、小スペースの制震機構の創生を試みる。

以下、本論文第2章では、連続体の位相最適化手法による機構の創生理論を示す。第3章では、本論文に示す最適化問題が多峰性問題であることを示し、グローバル最適解の探索法を示す。第4章では、まず、基本的な例題により、本論文の提案手法の有効性を検証し、次に、ラーメン構造内部の限られたスペースに制震機構を創生する例題により、これまでにない変位拡大機構が創生できることを示す。第5章では、以上の結論を述べる。

\* 近畿大学工学部 准教授・博士(工学)

\*\* 近畿大学工学部 大学院生

Assoc. Prof., School of Engineering, Kinki University, Dr. Eng.  
Graduate Student, School of Engineering, Kinki University

## 2. 連続体の位相最適化手法による機構創生理論

### 2.1 位相最適化問題の定式化

制震機構を創生するための位相最適化問題の例として、図1のCase1に示すように、ラーメン構造内の限られた領域(グレー部分)に制震機構を創生する問題を考える。図1の例題は、 $P_1$ 点(入力点)に加わる水平荷重 $F$ により、 $P_2$ 点(出力点)に水平左向の変位を生じさせるリンク機構を創生する問題である。なお、ここでは、 $P_2$ 点と柱の間に減衰装置(ダンパー)を設置することを想定している。図中のラーメン構造内のグレー部分が、機構を創生するための設計領域で、本論文では、2次元平面応力要素で有限要素分割を行う。また、ラーメン構造の柱・梁は、はり要素で分割し、設計領域境界部で平面応力要素と節点を共有することで連続性を確保する。

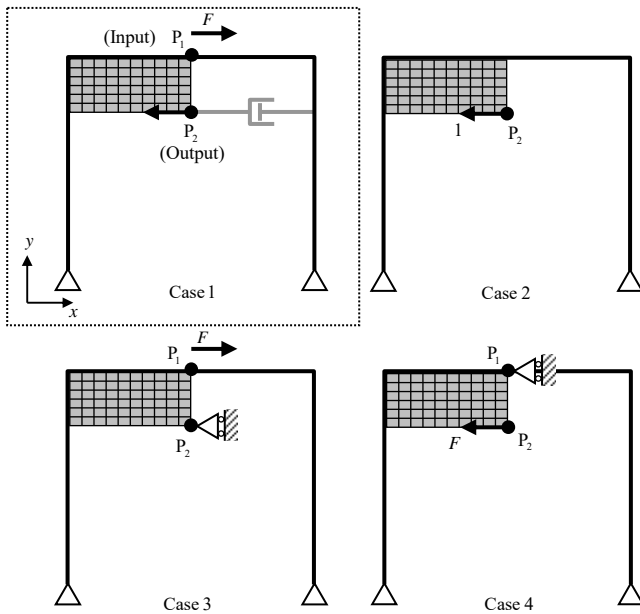


図1 位相最適化問題の定式化を説明するための例題

創生される機構の必要条件としては、まず、 $P_2$ 点の変位が確保されることと、 $P_1$ 点の変位が $P_2$ 点で拡大されることが挙げられる。後者の条件は、減衰効率の高い制震機構を創生するために必要である。次に、 $P_2$ 点に減衰装置が装着されるものとする、 $P_2$ 点に繋がるダンパーを動かすための力がラーメン構造から十分に伝えられる必要がある。この条件を満足させるためには、図1のCase3に示すように、 $P_2$ 点を変位方向に拘束した場合に $P_1$ 点の外力に対する剛性を確保する必要がある、また、逆にCase4に示すように、 $P_1$ 点を外力方向に拘束した場合に $P_2$ 点の変位方向の外力に対する剛性を確保する必要がある<sup>12)</sup>。以上の条件を満たす機構を図1に示す設計領域内に創生する。

設計領域に目的の機構を創生する最適化問題を定式化すると次のようになる。

$$\min_{\alpha} [C^3(\alpha)/\bar{C}^3 + C^4(\alpha)/\bar{C}^4] \quad (1)$$

where

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_N\} \quad (2)$$

subject to

$$m = \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) \leq m^{\max} \quad (\text{総密度制約}) \quad (3)$$

$$d_{\text{out}}^{\min} \leq C^{21}(\alpha)/\bar{C}^{21} \leq d_{\text{out}}^{\max} \quad (\text{絶対変位制約}) \quad (4)$$

$$r_{\text{inout}}^{\min} \leq C^{21}(\alpha)/\{C^1(\alpha)/F\} \quad (\text{相対変位制約}) \quad (5)$$

$$G^{\min} \leq G(\alpha) \quad (\text{フィルタリング制約}) \quad (6)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N) \quad (\text{設計変数制約}) \quad (7)$$

ここに、 $\alpha_i$ は*i*番目要素の設計変数( $1 - \alpha_i$ は要素密度に相当)、 $N$ は設計領域の要素数、 $m$ と $m^{\max}$ は設計領域の総密度とその上限値(要素体積は均一としている)、 $d_{\text{out}}^{\min}$ 、 $d_{\text{out}}^{\max}$ は出力点の変位の上下限値、 $r_{\text{inout}}^{\min}$ は入力点と出力点の相対変位の下限値を表す。また、 $C^3$ 、 $C^4$ は、Case3とCase4の外力 $F$ のなす仕事量で、 $F$ が一定の場合、外力作用点の変位に比例することからコンプライアンス(撓性:剛性の逆数)と呼ばれている。 $C^{21}$ は、 $P_2$ 点の水平変位を表すコンプライアンスで、Case2の $P_2$ 点の外力にCase1の $P_2$ 点の変位を掛けた仕事量を表す。また、 $\bar{C}^3$ 、 $\bar{C}^4$ 、 $\bar{C}^{21}$ は、無次元化に用いている定数で、本論文では、総密度制約下で、すべての要素密度が均一の場合のコンプライアンス(絶対値)を用いている。また、 $C^1$ は、Case1のコンプライアンスを表す。以上の各コンプライアンスは次式から計算される。

$$\begin{aligned} C^1 &= F \cdot u_{P1}^{\text{Case1}} = \mathbf{d}^{(1)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(1)} & C^{21} &= 1 \cdot u_{P2}^{\text{Case1}} = \mathbf{d}^{(2)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(1)} \\ C^3 &= F \cdot u_{P1}^{\text{Case3}} = \mathbf{d}^{(3)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(3)} & C^4 &= F \cdot u_{P2}^{\text{Case4}} = \mathbf{d}^{(4)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(4)} \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 $u_{P1}$ 、 $u_{P2}$ は、各Caseの $P_1$ 、 $P_2$ 点の*x*方向変位を表す。また、 $\mathbf{K}$ は構造全体の剛性マトリクス、 $\mathbf{d}^{(1)}$ 、 $\mathbf{d}^{(2)}$ 、 $\mathbf{d}^{(3)}$ 、 $\mathbf{d}^{(4)}$ は、図1のCase1~Case4の問題を有限要素法で解いた時の節点変位ベクトルを表す。なお、(1)、(4)、(5)式等をコンプライアンスで表すのは、後に示す感度解析を容易にするためである。また、(6)式の $G$ は結果の位相がチェッカーボード状の密度分布になることを防ぐためのフィルタリング関数で、次式で定義される<sup>11)、13)</sup>。

$$G(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^{s_i} [\alpha_i \bar{\alpha}_j + (1 - \alpha_i)(1 - \bar{\alpha}_j)] \right\} \quad (9)$$

ただし、(9)式の $\bar{\alpha}_j$ は*i*番目の要素と辺を共有する要素の設計変数値で、 $s_i$ は辺を共有する要素数を表す。本論文で扱う2次元問題の場合、内部の要素では $s_i = 4$ 、端の要素では $s_i = 3$ 、隅の要素では $s_i = 2$ となる。また、 $0 < G(\alpha) \leq 1$ となる。(6)式の $G^{\min}$ は $G$ の下限値で、0.7~0.9程度に設定するとチェッカーボードが減少する。

また、*i*番目要素の要素剛性マトリクス $\mathbf{k}_i$ は次式によって計算されるものとする。

$$\mathbf{k}_i = \rho_i \mathbf{k}_i^e \quad (10)$$

ここに、 $\mathbf{k}_i^e$ は*i*番目要素の平面応力要素剛性マトリクスで、 $\rho_i$ は次式で定義される密度関数である<sup>14)</sup>。

$$\rho_i = 1 - \sqrt{1 - (1 - \alpha_i)^2} \quad (i=1, \dots, N) \quad (11)$$

(11)式は円の方方程式で、 $\alpha_i$ が0と1の時は $\rho_i = 1$ と $\rho_i = 0$ となるが、例えば $\alpha_i$ が0.5の場合は $\rho_i = 0.134$ となり、0.5よりも小さくなる。すなわち、設計領域の剛性を高めるためには、設計変数が0と1に分かれる方が有利になる。これは、位相最適化問題では要素密度の0/1により最適位相を求めることが理想であるが、こ



では連続緩和によって 0/1 以外の値も許容しているため、できるだけ最適解の要素密度が 0/1 になるようにする方法の一つである。

## 2.2 最適化問題の解法

(1)~(7)式の最適化問題は、非線形性が強く、収束解が得られにくい。したがって、解の収束に関してロバスト性の高い SLP 法(逐次線形計画法)を用いて解く。

SLP 法では、まず、(1)式および(3)~(7)式を第  $k$  ステップの解の近傍でテーラー展開し、その 1 次項のみを採用する。この場合、(1)式および(3)~(7)式は次式のように書き換えられる。

$$\min_{\Delta\alpha} \left[ \frac{1}{\bar{C}^3} \sum_{i=1}^N \frac{\partial C^3}{\partial \alpha_i} \Delta\alpha_i + \frac{1}{\bar{C}^4} \sum_{i=1}^N \frac{\partial C^4}{\partial \alpha_i} \Delta\alpha_i \right] \quad (12)$$

subject to

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial m}{\partial \alpha_i} \Delta\alpha_i \leq m^{\max} - m(\alpha^{(k)}) \quad (13)$$

$$d_{\text{out}}^{\min} - C^{21}(\alpha^{(k)}) / \bar{C}^{21} \leq \frac{1}{\bar{C}^{21}} \sum_{i=1}^N \frac{\partial C^{21}}{\partial \alpha_i} \Delta\alpha_i \leq d_{\text{out}}^{\max} - C^{21}(\alpha^{(k)}) / \bar{C}^{21} \quad (14)$$

$$\frac{r_{\text{inout}}^{\min}}{F} C^1(\alpha^{(k)}) - C^{21}(\alpha^{(k)}) \leq \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial C^{21}}{\partial \alpha_i} - \frac{r_{\text{inout}}^{\min}}{F} \frac{\partial C^1}{\partial \alpha_i} \right) \Delta\alpha_i \quad (15)$$

$$G^{\min} - G(\alpha^{(k)}) \leq \sum_{i=1}^N \frac{\partial G}{\partial \alpha_i} \Delta\alpha_i \quad (16)$$

$$\max[-\alpha_i^{(k)}, -\varepsilon] \leq \Delta\alpha_i \leq \min[1 - \alpha_i^{(k)}, \varepsilon] \quad (i=1, \dots, N) \quad (17)$$

ここに、 $\Delta\alpha_i$  は設計変数の増分値、 $\alpha$  の上添え字 ( $k$ ) は第  $k$  ステップの解であることを表す。また、 $\varepsilon$  は設計変数の変動幅を規定するものでムープリミットと呼ばれる。本論文では、 $\varepsilon=0.1$  とし、毎ステップ 1.1 で割ることにより徐々に小さくしている。また、(12)~(16)式中のコンプライアンス、総密度、フィルタリング関数、および(11)式の密度関数の感度係数は次式から求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^3}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}_i^{(3)T} \frac{\partial \rho_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{k}_i^* \mathbf{d}_i^{(3)}, & \frac{\partial C^4}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}_i^{(4)T} \frac{\partial \rho_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{k}_i^* \mathbf{d}_i^{(4)} \\ \frac{\partial C^{21}}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}_i^{(2)T} \frac{\partial \rho_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{k}_i^* \mathbf{d}_i^{(1)}, & \frac{\partial C^1}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}_i^{(1)T} \frac{\partial \rho_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{k}_i^* \mathbf{d}_i^{(1)} \\ \frac{\partial m}{\partial \alpha_i} &= -1, & \frac{\partial G}{\partial \alpha_i} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{s_i} (2\bar{\alpha}_j - 1), & \frac{\partial \rho_i}{\partial \alpha_i} &= -\frac{1 - \alpha_i}{\sqrt{1 - (1 - \alpha_i)^2}} \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 $\mathbf{d}_i$  は  $i$  番目要素の節点変位ベクトルである。

(12)~(17)式は、シンプレックス法を用いて解くことができる。そして、得られた増分を第  $k$  ステップの設計変数に加え、これを  $k+1$  ステップの解として同様の計算を繰り返す。本論文に示す解析例では 30 ステップ改修計算を行っている。

## 3. グローバル最適解の探査法と出力点の設定法

### 3.1 多峰性問題の解法

(1)~(7)式の最適化問題は、(2)式の  $\alpha$  の初期値によって最適解が変化する多峰性問題となる。例えば、図 2 は、後の 4.1 節に示す解析例で、 $\alpha$  の初期値を乱数で変化させて、50 の異なる初期値に対する最適化問題を解き、それぞれの最適解の目的関数値 ( $C^3/\bar{C}^3 + C^4/\bar{C}^4$ ) をプロットしたものである。図に示すように、 $\alpha$  の初期値によってそれぞれの最適解の目的関数値が異なることがわかる。なお、以下では、各初期値に対する最適解を局所最適

解と呼び、その局所最適解の中で最小の目的関数値となる解をグローバル最適解と呼ぶことにする。

このような問題で、グローバル最適解を求める方法として、多数の異なる初期値に対する最適化問題を解いて、目的関数がより最小となる最適解を探査する方法が考えられる<sup>5)</sup>。図 3 は、本方法の計算フローを示している。まず、設計変数の初期値を乱数で生成し、2 章に示した方法により局所最適解を求める。得られた局所最適解の内、制約条件の満足度によって選別を行い、選別の判定に合格し、かつ目的関数値が、これまでの解より小さいならばグローバル最適解を更新する。以上の計算を指定した回数繰り返すことにより、グローバル最適解を得る。

なお、本論文では、混合合同法による図 4 のプログラムにより乱数を生成している。

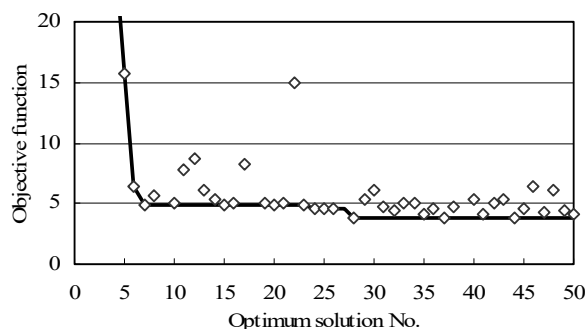


図 2  $\alpha$  の初期値を変化させた場合の  $C^3/\bar{C}^3 + C^4/\bar{C}^4$  の最適値

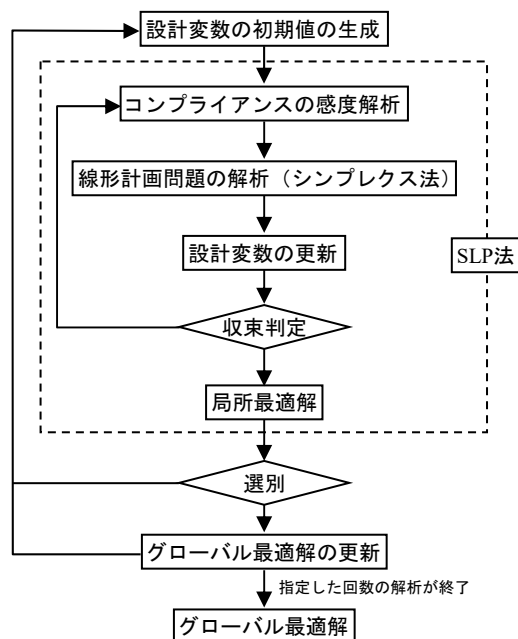


図 3 グローバル最適解を求めるための計算フロー

```
Function RAND(I)
I = 843314861*I+453816693
if ( I.lt.0 ) I = ( I+2147483647 ) + 1
RAND = float(I)*4.656612873d-10
return
end
```

図 4 混合合同法による乱数の生成プログラム

### 3.2 初期値の生成法

設計変数の初期値を単に乱数で与える方法では、グローバル最適解の探索効率がよくない。そこで、藤井ら<sup>9)</sup>は、設計変数の初期値をそれまでに得られている最も優秀な局所最適解を利用して生成するエリート戦略的方法と GA を用いて生成する方法を提案している。後者の GA を用いた探索法では、複数の優良な解を得ることができる反面、多数の解を交差して次世代の解を生成するため、最低限の解析回数が多くなる。一方、前者の方法では、1つの解を手がかりに最適解を探していくため、より速く優良解を見つけることができるが、最適解が最初に見つかった優良解に依存してしまうという問題がある。そこで、本論文では、前者の1つの解をもとに探索する方法に SA (Simulated Annealing) の手法を加える。

本方法は、異なる初期値に対する解析で、それまでに得られている優良な局所最適解 ( $\alpha^{\text{better}}$ ) に対して、1/4 の要素を乱数 (図 4) で選定し、その要素の設計変数が 0.1 以下の場合には 0.9 に、それ以外は 0.1 に変更する。また、乱数で選択されなかった要素の設計変数はそのままにする。そして、以上の方法で生成された設計変数に設計領域の総密度が上限値  $m^{\text{max}}$  に等しくなるように均等な倍率を掛け、次ステップの設計変数の初期値とする。ただし、優良な局所最適解 ( $\alpha^{\text{better}}$ ) は、SA の式を用いて、次式により選択されるものとする<sup>15)</sup>。

$$\text{If } Q=1 \text{ or } Q > \text{RAND then } \alpha^{\text{better}} = \alpha^{(n)} \quad (19)$$

ここに、

$$Q = \begin{cases} 1 & \Delta E \leq 1 \\ \exp(-\Delta E/T^{(n)}) & \Delta E > 1 \end{cases} ; \Delta E = \frac{f^{(n)}}{f^{\text{best}}} \quad (20)$$

ここで、 $Q$  は置換確率を表し、 $n$  は異なる初期値に対する解析ステップ数、 $\Delta E$  は評価値の改善量、 $f^{(n)}$  は  $n$  ステップの目的関数値、 $f^{\text{best}}$  は  $n-1$  ステップまでに得られている最小の目的関数値、 $T^{(n)}$  は  $n$  ステップの温度、 $\text{RAND}$  は乱数 (図 4) を表す。ただし、本論文では、温度  $T^{(n)}$  は次式で更新するものとする<sup>15)</sup>。

$$T^{(n+1)} = 0.8T^{(n)} \quad (21)$$

また、 $T^{(0)}$  は、改善解が全体の解析で 3~5 回程度選択されるように問題ごとに設定する。なお、本論文では、図 4 の乱数発生引数  $I$  は  $7n$  で与えている。

また、各ステップの局所最適解は、目的関数値が小さい順に 10 番目までを保存するものとする。ただし、ほぼ同位相の解の保存を避けるため、すでに保存されている解 (設計変数) との差の平均値が 0.2 以下のものは保存しないものとする。

### 3.3 局所最適解の選別

SLP 法で求められた局所最適解には、生成された初期値によって、制約条件を満たす解が見つからない場合がある。したがって、このような解は、目的関数値が良くてもグローバル最適解として採用しないようにする必要がある。本論文では、(4)、(5)式の制約条件で、局所最適解が次式を満足しない場合には、グローバル最適解を更新しない(初期値生成にも採用しない)ようにしている。

$$\begin{aligned} 0.5 \cdot d_{\text{out}}^{\text{min}} &\leq C^{21}(\alpha^{\text{opt}}) / \bar{C}^{21} \leq 2 \cdot d_{\text{out}}^{\text{max}} \\ 0.5 \cdot r_{\text{inout}}^{\text{min}} &\leq C^{21}(\alpha^{\text{opt}}) / \{C^1(\alpha^{\text{opt}}) / F\} \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、 $\alpha^{\text{opt}}$  は局所最適解の設計変数を表す。なお、(22)式では、(19)式の最初の  $\alpha^{\text{better}}$  をより早く見つけるため、上下限値に 5 割のトレランスを設定している。また、(3)式と(6)式の制約はほとんどの場合満足されるため、このような判定は省略している。

### 3.4 出力点の設定法

効率のよい制震機構を創生するには、ダンパーの起点となる図 1 に示す  $P_2$  点 (出力点) をどこに設定し、どの方向に動かすかが鍵となる。これまでは、この出力点の設定を手探りで行っていたが、本論文では、このような出力点の設定を補助するプログラムを別に開発した。本プログラムでは、ユーザーが複数の位置・方向に出力点を設定すると、その一つ一つについて同じ制約条件下で図 3 に示す解析を行い、それぞれのグローバル最適解を保存する。ユーザーは、それぞれの出力点に関する目的関数値を比較し、どのように出力点を設定すれば、より剛性の高い機構を得ることができるかの情報を取得できる。そして、これをもとに出力点の位置と方向を決定し、詳細な解析を行う。なお、詳細解析を行うプログラムでは出力点は固定し、複数点を同時に動かすことができるようにしている。

## 4. 解析例

### 4.1 基本的な例題

まず、本解析法の有効性を確かめるため、図 5 に示す基本的な例題の解析を行う。本問題は、 $P_1$  点に加わる鉛直下向きの力により、 $P_2$  点を引き上げる機構を求めるものである。本問題は、 $P_2$  点の変位方向が力の方向と逆になるため、位相を求めることが難しい問題である。設計領域の分割数は  $30 \times 20$  分割として、要素板厚は 1cm、ヤング係数は  $20580 \text{ kN/cm}^2$ 、ポアソン比は 0.3 としている。

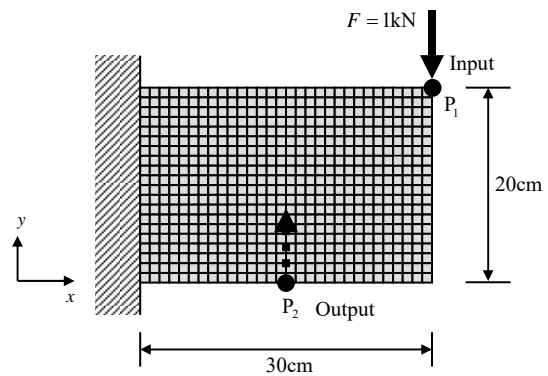


図 5 解析モデル

図 6, 7, 8 は、制約条件を  $m^{\text{max}} = 0.3 \times 600$ 、 $d_{\text{out}}^{\text{min}} = 1$ 、 $d_{\text{out}}^{\text{max}} = 10$ 、 $r_{\text{inout}}^{\text{min}} = 1$ 、 $G^{\text{min}} = 0.85$  として、解析を行った結果を示している。ただし、(6)式の制約はフィルタリングによる最適解への影響を抑えるため SLP 法改修計算の 15 ステップから適用している。

図 6 は、設計変数の初期値をすべて 0.7 として最適解を求めた結果を示しているが、非常に不鮮明な位相となっていることがわかる。文献 11)では、(6)式のフィルタリングの制約値や多目的関

数の重みを微調整することで明瞭な位相を求めているが、このような方法ではかなりの試行錯誤が必要であった。

これに対して、図7は、本論文に示す方法により求めた50の異なる初期値に対するグローバル最適解を示している。ただし、(19)式の初期温度  $T^{(0)}$  は20に設定した。この場合、改悪解は4回選択されている。図に示すように、図6の解に比較して明瞭な位相が得られている。したがって、図6の解は一つの局所最適解であり、多数の初期値からグローバル最適解を探索することで、より剛性の高い明瞭な位相を求めることが可能であることがわかる。

図8は、(19)式のSAの効果を見るために、(19)式で  $\Delta E > 1$  の解を選択しない場合、すなわち改悪解を選択しない従来法<sup>11)</sup>のグローバル最適解を示している。図より、図7とは異なる位相が得られていることがわかる。また、図7と図8の位相の目的関数値を比較すると、4.18と5.67で図7の方が小さい値となっていた。このことから、SAにより改悪解を選択することで、より優秀な解が得られていることがわかる。

図9と図10は、SAを用いた場合と従来法で、目的関数値が2位~10位までの解の位相を示したものである。図9より、SAを用いた場合は、図8の解も5位の解として含まれていることがわかる。なお、5位の解の目的関数値も5.67となっていた。これに対して、図10では、6位と9位に図7と類似の解が含まれているが、不鮮明な位相となっており、目的関数値も高くなっていた。したがって、SAにより改悪解を選択することが多様な解を得るためにも効果的であることがわかる。

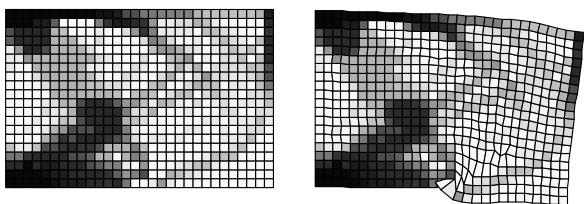


図6 最適解の位相と変形 (均一な初期値に対する解)

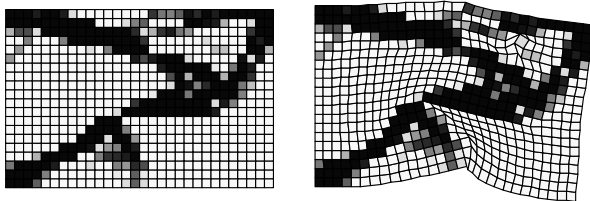


図7 最適解の位相と変形 (50の異なる初期値に対する最適解)

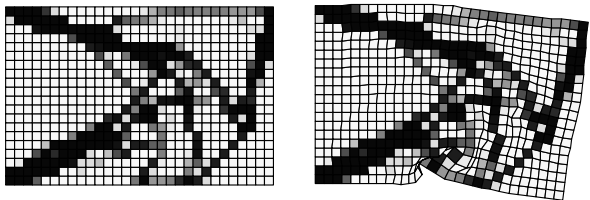


図8 最適解の位相と変形 (改悪解を選択しない場合: 従来法)

ところで、図7の位相は模型を作成するには多少複雑である。これに対して、図9の4位の位相がシンプルでヒンジの位置を特定しやすい。そこで、これを参考に模型を作成した。図11は、図

9の4位の解の位相と変形を示しており、図12がその模型と模型の変形を示している。なお、図11の変形図には、要素のゆがみから特定したヒンジ位置を○で示している。これらの図より、模型においても解析どおりの変形が実現されていることがわかる。

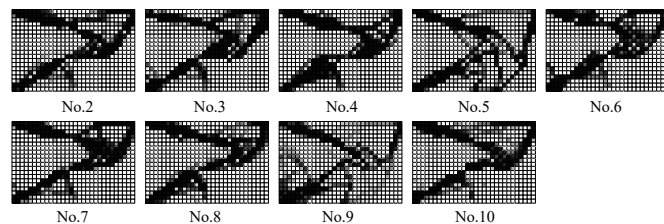


図9 SAを用いた場合の2位~10位の解の位相

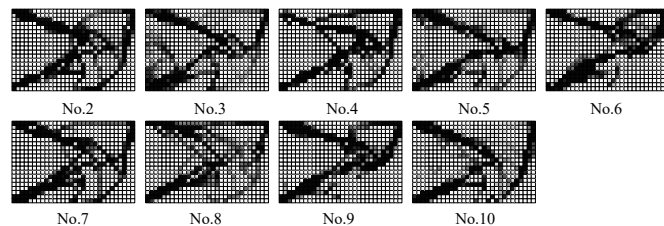


図10 SAを用いない場合 (従来法) の2位~10位の解の位相

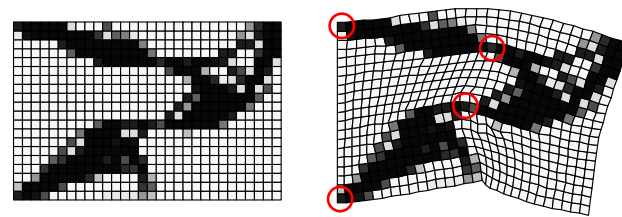
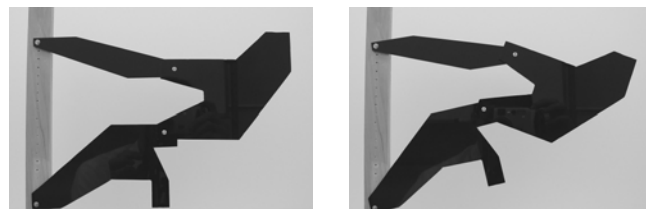


図11 SAを用いた場合の4位の解の位相と変形



(a) 変形前 (b) 変形時

図12 位相を参考に作成した模型とその変形

#### 4.2 制震機構の創生例題

制震機構の創生モデルとして、図13に示すような問題を考える。これは、1層1スパンラーメンを示し、領域Aを制震機構を創生する設計領域とする。設計領域のヤング係数は  $20580 \text{ kN/cm}^2$ 、ポアソン比は0.3、板厚は  $0.5 \text{ cm}$  とする。また、柱、梁のヤング係数は  $2058 \text{ kN/cm}^2$ 、ポアソン比は0.3とし、柱の断面積は  $4957 \text{ cm}^2$ 、断面2次モーメントは  $1846000 \text{ cm}^4$ 、梁の断面積は  $5144 \text{ cm}^2$ 、断面2次モーメントは  $3127000 \text{ cm}^4$  とする。荷重は水平方向に  $1 \text{ kN}$  与えるものとする。

設計領域の要素分割は  $20 \times 10$  分割とし、出力点  $P_2$  の位置と変位方向は、図14に示すCase AとCase Bの2種類とした。ただし、Case Aでは2点、Case Bでは9点を指定している。この場合、複

数点の変位を加えたものが出力点 (P<sub>2</sub>) の変位となり、これが制約される。また、Case B では、水平方向力 (F) を左方向に変えている。なお、図 14 の出力点の設定は、3.4 節に示す方法で、図 15 の●または○で示す節点を 1 点ずつ出力点として、グローバル最適解の目的関数値を調査し、より小さい目的関数値が得られた節点 (図中の○) を指標に定めている。

図 16~19 は、Case A と Case B で、100 の異なる初期値に対する目的関数値が 1 位~10 位の局所最適解を示している。ただし、Case A では、制約条件を  $m^{\max} = 0.3 \times 200$ ,  $d_{\text{out}}^{\min} = 2$ ,  $d_{\text{out}}^{\max} = 10$ ,  $r_{\text{inout}}^{\min} = 5$ ,  $G^{\min} = 0.85$  とし、Case B では、 $m^{\max} = 0.3 \times 200$ ,  $d_{\text{out}}^{\min} = 0$ ,  $d_{\text{out}}^{\max} = 300$ ,  $r_{\text{inout}}^{\min} = 1.5$ ,  $G^{\min} = 0.85$  としている。また、(6)式のフィルタリング制約は SLP 法改修計算の 10 ステップから適用している。また、SA を用いた場合 (図 16, 18) では、(19)式の初期温度  $T^{(0)}$  を Case A では 100, Case B では 20 に設定した。この場合、改悪解は Case A では 4 回、Case B では 3 回選択されている。なお、SA を用いない従来法 (図 17, 19) では改悪解の選択はしていない。

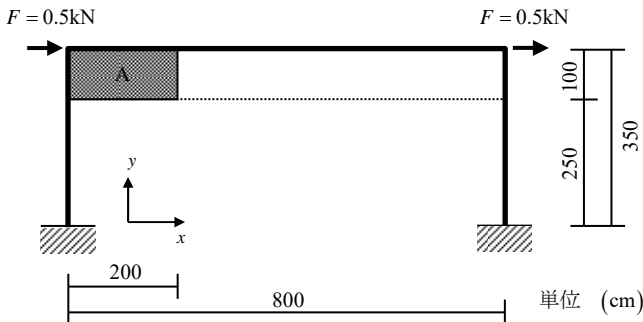


図 13 解析モデル

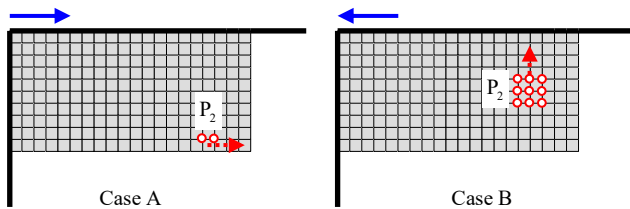


図 14 出力点の設定

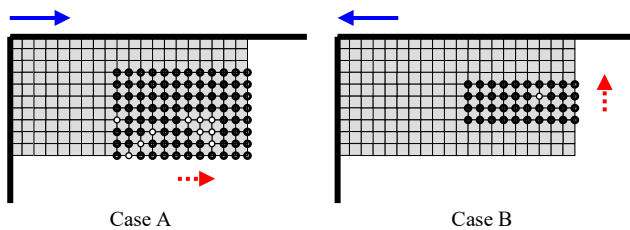


図 15 出力点の設定に関する調査に用いた出力点位置

図 16 と図 17 を比較すると、図 16 では、No.1, No.4, No.5 等で多様な形態が見られるのに対して、図 17 ではこのような多様性はあまり見られない。また、図 18 と図 19 を比較すると、図 18 の No.1, No.3 と同じヒンジ位置の機構は、図 19 には見られないことなどがわかる。また、No.1 の目的関数値を比較すると、図 16 の No.1 が 34.0 に対し図 17 の No.1 は 38.0, 図 18 の No.1 が 24.6 に対して

図 19 の No.1 が 32.2 となっており、いずれも SA を用いた場合の方が小さい値となっていた。したがって、初期値の選択に SA を適用する効果が、この例題でも見られることがわかる。

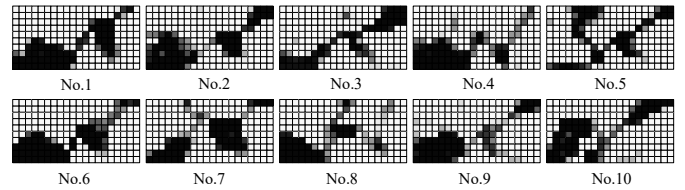


図 16 SA を用いた場合の 1 位~10 位の解の位相 (Case A)

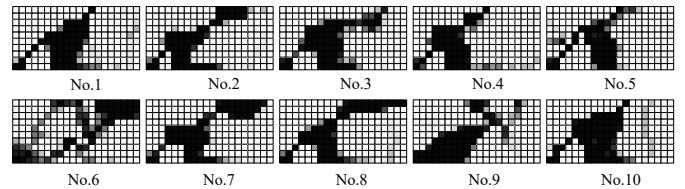


図 17 従来法の 1 位~10 位の解の位相 (Case A)

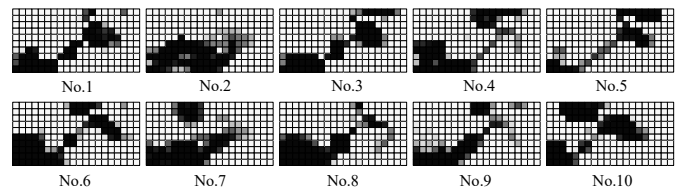


図 18 SA を用いた場合の 1 位~10 位の解の位相 (Case B)

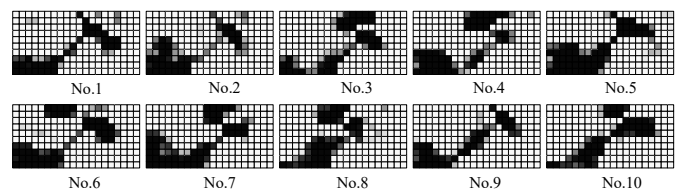


図 19 従来法の 1 位~10 位の解の位相 (Case B)

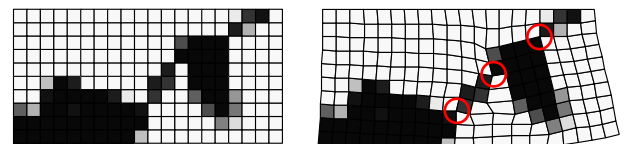


図 20 最適解の位相と変形 (Case A)

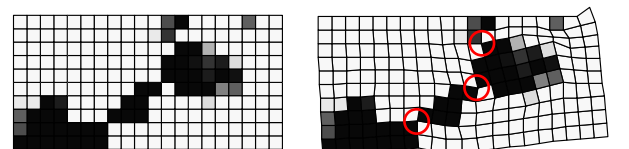


図 21 最適解の位相と変形 (Case B)

次に、図 16 と図 18 の No.1 の位相を参考に模型を作成した。図 20, 21 は、図 16, 18 の No.1 の位相を拡大した図とその変形図を示している。図 22, 23 は、これを参考に作成した模型と左右両方向の荷重に対する変形を示している。なお、図 18, 19 の変形図には、特定したヒンジ位置を○で示している。これらの図より、作成した模型も解析と同様の変位を生じることがわかる。また、柱、梁

の相対的な角度の変化に対して、出力部分で変形が拡大されていることがわかる。また、これらの模型はいずれも3ヒンジであり、この程度のヒンジ数であれば実用化も可能であると考えられる。

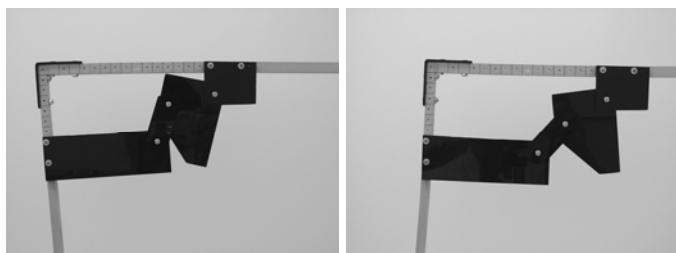
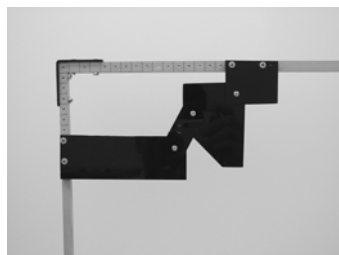


図 22 位相を参考に作成した模型と左右方向の変形 (Case A)



図 23 位相を参考に作成した模型と左右方向の変形 (Case B)

## 5. まとめ

本論文では、制震技術への応用を目的として、連続体の位相最適化手法を利用した機構の創生法を提案した。本方法では、最適化問題が、多峰性問題となることに着目し、最適化問題の初期値を変更していくことで、グローバル最適解の探索を行う。また、初期値の生成法としては、解析の過程で得られた最も優秀な解をもとに初期値を生成する従来法<sup>5)</sup>に、SA のアイデアを取り入れ、よりグローバルな解が得られる方法に改善した。さらに、出力点の設定を容易にするため、複数の出力点に対するグローバル最適解を自動計算するプログラムを開発した。

機構の位相が得られにくい基本例題で、本方法の有効性を検討した結果、均一密度の初期値から得られた最適位相に比較して、複数の異なる初期値から得られたグローバル最適解の位相はより明解であることがわかった。また、SA のアイデアの導入により、

より多様な解が得られることが確かめられた。

また、同じ手法で、ラーメン構造内の梁下の小スペースにおける制震機構を創生する例題により、小スペースの設計領域においても、シンプルで明解なリンク機構が得られることが確かめられた。また、このような機構の創生には、複数の出力点のグローバル最適解を自動計算するプログラムが有効であった。

以上のことから、本論文で示した連続体の位相最適化手法を用いることにより、小スペースでもシンプルでラーメンの変形を拡大するリンク機構を創生することが可能であることがわかった。

## 謝辞

本研究は、三菱重工とリョーセンエンジニアズからの受託研究として行ったものである。本研究を進めるにあたり、三菱重工の尾木靖夫氏、原田秀秋氏、リョーセンエンジニアズの阿比留久徳氏、山本利弘氏に、貴重な助言を頂いた。また、出力点位置の自動評価に関するアイデアは、三重大学の高田豊文先生からヒントを頂いた。ここに記して感謝いたします。

## 参考文献

- 1) 秦一平他, 増幅機構を用いた制震構造システムに関する基礎的研究 (その2 トグル機構の増幅率について), 日本建築学会大会梗概集, B-2 分冊, p.871-872, 1997
- 2) 久保田雅春他, 増幅機構を用いた制震構造システムに関する基礎的研究 その4 トグル機構の振動実験, 日本建築学会大会梗概集, B-2 分冊, p.823-824, 1998
- 3) 久保田雅春他, ダンパーを用いた制震改修に関する設計検討 (その3) トグル制震装置を用いた検討例, 日本建築学会大会梗概集, C-2 分冊, p.139-140, 1999
- 4) 久保田雅春他, トグル制震ブレースを組み込んだ鉄骨架構の振動実験—制震, 振動実験, エネルギー吸収, トグル機構, 粘性減衰, 日本建築学会大会梗概集, B-2 分冊, p.877-878, 2000
- 5) 藤井大地, 原田卓哉, 平田裕一, 骨組の位相最適化手法を用いたリンク機構の創生, 日本建築学会構造系論文集, 第597号, pp.63-68, 2005.11
- 6) 尾木靖夫他, はり下空間を利用した RC 建物制震補強システムの開発 (その1~その4), 日本建築学会大会梗概集, C-2 分冊, p.499-506, 2005
- 7) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N.: Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 8) Nishiwaki, S., Frecker, M. I., Min, S. and Kikuchi, N., Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 42 (1998) 535-559
- 9) 西脇眞二, Frecker, M. I. and Min, S., 菊池昇, 柔軟性を考慮した構造の最適化(第1報 定式化とコンプライアントメカニズムへの応用), 日本機械学会論文集 (C編), 63(612), pp.81-88, 1997
- 10) Nishiwaki S., Min, S., Yoo, J. and Kikuchi, N., Optimal structural design considering flexibility, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, pp.4457-4504, 2001
- 11) 藤井大地, 江島晋, 菊池昇, 均質化設計法を用いた弾性変形機構の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.528, pp.99-105, 2000.2
- 12) 細山亮, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 松井和己, 寺田賢二郎, コンプライアントメカニズムのトポロジー最適設計法 (荷重入力位置の変位と出力位置の変位の比を考慮した場合), 日本機械学会論文集 (C編), 70 巻, 696 号, pp.2384-2391, 2004
- 13) 藤井大地, 菊池昇, SLP 法を用いたトポロジー最適化における数値的不安定の改善, 日本建築学会構造系論文集, No.521, pp.65-72, 1999.7
- 14) 鳥垣俊和, スカラー計算機上でのボクセルを用いたトポロジー最適化, 計算工学講演会論文集, Vol.7, pp.565-568, 2002
- 15) 三井和男, 大崎純, 大森博司, 田川浩, 本間俊雄共著, 「発見の最適化手法による構造フォルムとシステム」, pp.69-94, コロナ社, 2004

(2007年1月29日原稿受理, 2007年6月19日採用決定)

# HMPS 法と IESO 法を用いた有限変形を伴う弾性構造体の位相最適化

## TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR ELASTIC STRUCTURES WITH FINITE DEFORMATION USING HMPS METHOD AND IESO METHOD

藤井大地\*1, 山下真輝\*2, 眞鍋匡利\*3  
Daiji FUJII, Masaki YAMASHITA, Masatoshi MANABE

The topology optimization method using voxel finite element method can be used for computational morphogenesis of structures. However, in this method, it is difficult to consider geometric nonlinearity, because the convergence solution cannot be easily obtained. Therefore, in this paper, we propose a topology optimization method using particle method. In the proposed method, HMPS (Hamiltonian Moving Particle Semi-implicit) method is used for the particle method and IESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) method is used for the topology optimization. In this paper, numerical examples for elastic structures with finite deformation are shown in order to verify the proposed method.

**Keywords :** Topology optimization, ESO method, Particle method, HMPS method, Voxel FEM, Finite deformation  
位相最適化, ESO 法, 粒子法, HMPS 法, ボクセル有限要素法, 有限変形

### 1. はじめに

ボクセル有限要素法を用いた位相最適化手法は、3次元の直方体固定設計領域から力学的合理性を有する多様な構造形態を創生できる手法である。藤井ら<sup>1,2)</sup>は、このような手法を用いて建築構造の形態創生を試みている。また、藤井ら<sup>3)</sup>は、このような位相最適化手法をトグル制振装置のように入力変位を増幅させるリンク機構の創生にも応用している。しかしながら、リンク機構に関しては、リンクの数が増えると製造コストやメンテナンスコストが増えるため、リンクを設けずに構造体の弾性変形によって入力変位を増幅させるコンプライアントメカニズムへの発展が望まれる。このようなコンプライアントメカニズムの位相最適化は、西脇ら<sup>4,5)</sup>が長年の研究で大きな成果をあげているが、国内の建築分野への応用は進んでいない。そこで著者らは、文献3)で提案した手法を3次元のコンプライアントメカニズムの創生法に発展させ、新しい形の制振機構の開発につなげたいと考えている。

ところで、このようなコンプライアントメカニズムの創生で問題となるのは、メカニズムの変形は有限変形であるのに対し、ほとんどのコンプライアントメカニズムの位相最適化手法は微小変形理論にもとづいている点である。したがって、得られた形態が有限変形に対して最適なのかどうかは別の検証が必要となる。このため、コンプライアントメカニズムの形態創生に関しては、有限変形を考慮できる手法の開発が望まれている。したがって、本研究を遂行するためには、まず、ボクセル有限要素法を用いた位相最適化手法を有限変形を考慮できる手法に発展させる必要がある。

しかしながら、ボクセル有限要素法で有限変形を扱う場合、変形が進むにしたがって要素の歪みが大きくなり、計算の途中で解が発散することが頻繁に生じる。このような問題を解決するため、2009年に眞鍋と藤井<sup>6)</sup>は、有限要素法の代わりに粒子法を用い、位相最適化手法として発見的手法(CA-ESO法)を用いる方法を提案している。その後、2011年に眞鍋ら<sup>7)</sup>は、この方法を位相最適化手法として数理計画法(レベルセット法)を用いる方法に発展させ、2次元問題に対する有効性を検証している。そこで本論文の目的は、これを3次元問題に対応できる手法に発展させることにある。

有限変形を考慮した位相最適化手法については、2015年の研究として文献8~10)が挙げられるが、いずれも有限要素法にもとづく手法で2次元問題を対象としている。また、粒子法を用いた位相最適化手法は、眞鍋らの研究<sup>6,7)</sup>以外にはほとんど見あたらず、未だ3次元問題への拡張はなされていない。そこで本論文では、文献6)の手法を発展させて、有限変形を考慮した3次元の位相最適化手法を新たに開発する。すなわち、文献6)では、粒子法としてMPS法<sup>11)</sup>を用いていたが、これをその発展手法であるHamiltonian MPS法(以下HMPS法と略記)<sup>12~14)</sup>に代える。また、文献6)では、位相最適化手法としてCA-ESO法を用いていたが、これをその発展手法であるIESO法(+仕上アルゴリズム)<sup>2)</sup>に代える。ここで、HMPS法およびIESO法はすでに提案されている手法であるが、これらを組み合わせることで、これまででない有限変形を考慮した3次元の位相最適化手法を開発できれば、3次元のコンプライアントメカニズムを利用した制振機構の開発等、今後の発展につながると考えられる。

\*1 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

\*2 北條建築構造研究所 修士(工学)

\*3 (株)木村建築設計事務所 修士(工学)

Professor, Faculty of Engineering, Kindai University, Dr. Eng.  
Staff member, Hojo Structure Research Institute, M. Eng.  
Staff member, Kimura Architects and Engineers Office, M. Eng.

以下、本論文2章では、粒子法の一つである HMPS 法の概要を示す。本論文で用いる HMPS 法は、鈴木、越塚<sup>12)</sup>によって開発され、近藤ら<sup>13)</sup>および菊池ら<sup>14)</sup>によって改良を加えられた方法であるが、建築分野で粒子法を用いた研究は少ないため、ここでは著者らが独自に作成したプログラムの中身がわかるように多少詳しい解説を加える。3章では、位相最適化手法の一つである IESO 法 (+仕上アルゴリズム)<sup>2)</sup>の概要および HMPS 法とのリンク方法を示す。4章では、2次元および3次元の解析例を示し、本手法の有効性を検証する。5章では以上のまとめを述べ結論を導く。

## 2. HMPS 法の概要

まず、Fig.1 に示すような初期時刻の粒子配置において、粒子  $i$  と粒子  $j$  の相対位置ベクトルを  $\mathbf{r}_{ij}^0$  とする。これを座標成分で表示すると次のようになる。なお、以下の定式化におけるテンソル表記については文献 15)等を参照。

$$\mathbf{r}_{ij}^0 = \begin{Bmatrix} x_{ij}^0 \\ y_{ij}^0 \\ z_{ij}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_j^0 - x_i^0 \\ y_j^0 - y_i^0 \\ z_j^0 - z_i^0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

また、粒子が運動後の現在時刻の粒子配置における粒子  $i$  と粒子  $j$  の相対位置ベクトルを  $\mathbf{r}_{ij}$  とする。これを座標成分で表示すると、

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{Bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

このとき、 $\mathbf{r}_{ij}^0$  と  $\mathbf{r}_{ij}$  の関係は、変形勾配テンソル  $\mathbf{F}_i$  を用いると次式のように表される<sup>15)</sup>。

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{F}_i \mathbf{r}_{ij}^0 \quad (3)$$

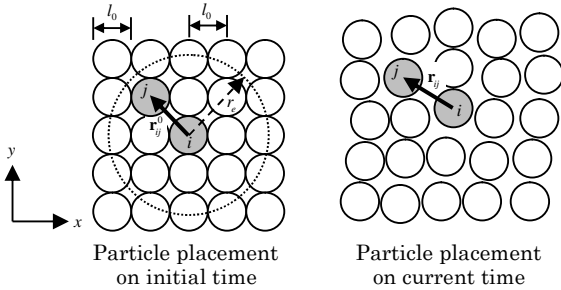


Fig.1 Particle placement on initial time and on current time

この時、現在時刻の粒子  $i$  近傍の変形は、複数の粒子  $j$  との関係から定まる。そこで、MPS 法<sup>13)</sup>では、粒子  $i$  を中心とする影響半径を与え、その影響半径内の粒子との相互関係から変形を定義する。すなわち、粒子  $i$  と複数の粒子  $j$  の関係を次式の重み関数  $w_{ij}^0$  を用いて重み付けする。

$$w_{ij}^0(\mathbf{r}_{ij}^0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\mathbf{r}_{ij}^0|}{r_e} & (0 < |\mathbf{r}_{ij}^0| < r_e) \\ 0 & (r_e \leq |\mathbf{r}_{ij}^0|) \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $r_e$  は影響半径を表し、粒子間距離  $l_0$  の倍数で与える。また、 $|\mathbf{r}_{ij}^0|$  は次式から計算される。

$$|\mathbf{r}_{ij}^0| = \sqrt{(x_{ij}^0)^2 + (y_{ij}^0)^2 + (z_{ij}^0)^2} \quad (5)$$

なお、 $r_e$  は小さいほど相互作用する粒子の数が減るので計算時間が短くなるが、小さすぎると計算が不安定になる。本論文では、計算時間を考慮し  $r_e$  を粒子間距離  $l_0$  の 2.1 倍に設定する。

また、HMPS 法<sup>12-14)</sup>では、次式の誤差関数  $e_i$  が最小となる  $\mathbf{F}_i$  を粒子  $i$  の変形勾配テンソルとして定義する。

$$e_i(\mathbf{F}_i) = \sum_j |\mathbf{F}_i \mathbf{r}_{ij}^0 - \mathbf{r}_{ij}|^2 w_{ij}^0 \quad (6)$$

ここで、(6)式が最小となるためには、次式が成り立つ必要がある。

$$\frac{\partial e_i(\mathbf{F}_i)}{\partial \mathbf{F}_i} = 2 \sum_j (\mathbf{F}_i \mathbf{r}_{ij}^0 - \mathbf{r}_{ij}) \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0 = 0 \quad (7)$$

(7)式より  $\mathbf{F}_i$  は次式から計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= \sum_j \mathbf{r}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0 \left( \sum_j \mathbf{r}_{ij}^0 \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0 \right)^{-1} \\ &= \left[ \sum_j \mathbf{r}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0 \right] \mathbf{A}_i^{-1} = \sum_j \begin{Bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} x_{ij}^0 & y_{ij}^0 & z_{ij}^0 \end{matrix} \right\} w_{ij}^0 \mathbf{A}_i^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、

$$\mathbf{A}_i = \sum_j \mathbf{r}_{ij}^0 \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0 = \sum_j \begin{Bmatrix} x_{ij}^0 \\ y_{ij}^0 \\ z_{ij}^0 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} x_{ij}^0 & y_{ij}^0 & z_{ij}^0 \end{matrix} \right\} w_{ij}^0 \quad (9)$$

次に、弾性体における粒子  $i$  の支配運動方程式は次式で表される。

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = - \frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (10)$$

ここで、 $\rho_i$  は粒子  $i$  の密度、 $\mathbf{v}_i$  は粒子  $i$  の速度ベクトル、 $\mathbf{r}_i$  は粒子  $i$  の現在時刻の位置ベクトルであり、成分で表すと次式となる。

$$\mathbf{r}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T, \quad \mathbf{v}_i = [\dot{x}_i \ \dot{y}_i \ \dot{z}_i]^T \quad (11)$$

また、 $W_i$  は粒子  $i$  の歪みエネルギー関数で、次式で表される。

$$W_i = \mathbf{\Pi}_i : \mathbf{F}_i \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{\Pi}_i$  は粒子  $i$  の第1 Piola-Kirchhoff 応力テンソルで、これを第2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル  $\mathbf{S}_i$  で表すと次式となる。

$$\mathbf{\Pi}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{S}_i \quad (13)$$

また、 $\mathbf{S}_i$  は、等方均質弾性体の場合、次式の Green-Lagrange 歪み

$$\mathbf{E}_i = (1/2)(\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i - \mathbf{I}) \quad (14)$$

を用いて次式で表される。

$$\mathbf{S}_i = 2\mu \mathbf{E}_i + \lambda \text{tr}(\mathbf{E}_i) \mathbf{I} \quad (15)$$

ここに、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $\lambda$  は Lamé の第一定数で、ポアソン比  $\nu$  とヤング係数  $E$  を用いて次式で表される。

$$\mu = E / \{2(1 + \nu)\}, \quad \lambda = \nu E / \{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\} \quad (16)$$

また、(15)式の  $\mathbf{I}$  は  $3 \times 3$  の単位マトリクス、 $\text{tr}(\mathbf{E}_i)$  は  $\mathbf{E}_i$  の対角項の和を表す。

(12)、(13)式を(10)式に代入し、粒子  $i$  の歪みエネルギーを、粒子  $i$  を中心とする影響半径内の粒子との相互関係から計算するものとすれば、(10)式は次式のように表せる<sup>14)</sup>。

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = - \sum_j \mathbf{\Pi}_j : \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_j (\mathbf{F}_j \mathbf{S}_j \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{r}_{ij}^0 + \mathbf{F}_j \mathbf{S}_j \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{r}_{ij}^0) w_{ij}^0 \quad (17)$$

また、静的解に収束させるための減衰力として、粒子  $i$  に次式の粘性力を付加する<sup>14)</sup>。

$$\mathbf{f}_{i,\text{visco}} = \rho_i \nu_{\text{MPS}} \frac{2d}{\lambda_{\text{MPS}} \Omega^0} \sum_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) w_{ij}^0 \quad (18)$$

ただし、 $v_{\text{MPS}}$  は粘性係数、 $d$  は空間次元数で3次元では3となる。また、 $n^0$  は、初期粒子配置において十分内部にある粒子数密度<sup>11)</sup>で次式から計算される。

$$n^0 = \max[n_i^0] \quad (i=1, \dots, N), \quad n_i^0 = \sum_j w_{ij}^0 \quad (19)$$

ここに、 $N$  は全粒子数、 $n_i^0$  は粒子  $i$  の初期粒子数密度である。また、(18)式の  $\lambda_{\text{MPS}}$  は次式で定義される<sup>11)</sup>。

$$\lambda_{\text{MPS}} = \sum_j |r_{ij}^0|^2 w_{ij}^0 / \sum_j w_{ij}^0 \quad (20)$$

したがって、粒子  $i$  の支配方程式は次式となる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_i} \left[ \sum_j (\mathbf{F}_i \mathbf{S}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{r}_{ij}^0 + \mathbf{F}_j \mathbf{S}_i \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{r}_{ji}^0) w_{ij}^0 + \mathbf{f}_{i,\text{visco}} \right] \quad (21)$$

なお、(18)式の  $v_{\text{MPS}}$  は、大きいほど解の収束は早まるが、大きすぎると解が発散する。本論文では、試解析を繰り返し、解が発散しない範囲で  $v_{\text{MPS}}$  を 0.02 に設定している。

(21)式の右辺にステップ外力  $\mathbf{f}_{i,\text{STEP}}$  を粒子質量  $m_i (= \rho_i l_0^3)$  で割った加速度を加え、次式による更新を行えば、時々刻々の動的応答解析が可能となる。

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_i^k + \Delta t \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right]^k \quad (22)$$

$$\mathbf{r}_i^{k+1} = \mathbf{r}_i^k + \Delta t \mathbf{v}_i^{k+1} \quad (23)$$

なお、本論文では、 $\Delta t$  を、Courant 条件を十分に満たすように粒子間距離  $l_0$  と縦波速度の比を指標として次式で与える。

$$\Delta t = 0.5 l_0 / \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho_i} \quad (24)$$

また、本論文では、静的な釣合状態の解を求めることが目的であるため、文献 13)と同様に、次式の総歪みエネルギー

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{S}_i : \mathbf{E}_i) l_0^3 \quad (25)$$

を指標に用い、(24)、(25)式の更新で  $V$  が増加に転じた場合に、すべての粒子の速度をゼロにするアルゴリズムを導入する。

また、本論文で用いている静的解への収束判定は、(22)、(23)式の更新 100 回ごとの次式のコンプライアンス  $C$

$$C = \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_i^T \mathbf{f}_{i,\text{STEP}}, \quad \mathbf{d}_i^T = [x_i - x_i^0 \quad y_i - y_i^0 \quad z_i - z_i^0] \quad (26)$$

の変化量(更新 1 回ごとの増減値(絶対値))の 100 回の総和で定義)が、初期の 100 回の変化量の 1%以下となった場合を静的な釣り合い状態と見なし、HMPS 法の計算を終了する。

### 3. IESO 法の概要と HMPS 法とのリンク方法

本論文に用いる位相最適化手法は、ボクセル有限要素法にもとづいており、物体領域を包含する直方体固定設計領域を考え、これを均等なボクセル(以下要素と呼ぶ)で分割する<sup>1)</sup>。ただし、本論文では、HMPS 法を適用するため、要素を立方体とし、要素の頂点(節点)に粒子を配置する。したがって、要素の各辺の長さは  $l_0$  となる。そして、物体領域は要素の材料密度の有無(1/0)で与える。

IESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) 法<sup>1,2)</sup> は、ESO 法<sup>16)</sup>を改良した方法であり、固定設計領域の要素の材料密度を要素の感度指標にしたがって少しずつ 0 (除去) していく方法

である。IESO 法と ESO 法の違いは、ESO 法は与えられた一定の除去率で各ステップの要素除去を行うのに対して、IESO 法は次のように閾値を用いて除去を行うところにある。

$$\rho_i^e = 0 \quad \text{if} \quad \alpha_i < X_{cr} \quad ; i=1, \dots, N_L \quad (27)$$

ここに、 $\rho_i^e$  と  $\alpha_i$  は要素  $i$  の材料密度(0 or 1)と感度指標、 $N_L$  は残存要素数、 $X_{cr}$  は次式で定義される閾値である。

$$X_{cr} = \alpha_{av} - \eta \cdot \phi \quad (28)$$

ただし、 $\alpha_{av}$  と  $\phi$  は残存要素の感度指標の平均値と標準偏差。また、 $\eta$  は除去量を制御するパラメータで、IESO 法では各ステップの目標除去要素数に近くなるようにプログラム内で自動計算される<sup>1,2)</sup>。また、この各ステップの目標除去要素数は、入力データとして除去率を与え、これと各ステップの残存要素数を掛けたものとなる。

また、IESO 法では、感度指標としてコンプライアンスの要素密度に対する正式な感度である要素歪みエネルギー(実際には 2 倍)を用いる(最適化問題の定式化に関しては文献 1)を参照)。ただし、本論文では、HMPS 法により、要素の節点に配置された粒子の歪みエネルギーが最初に求まるので、これを次のように定義する。

$$\alpha_k^{(i)} = \mathbf{S}_k : \mathbf{E}_k \quad (29)$$

ここに、 $\alpha_k^{(i)}$  は要素  $i$  の節点  $k$  の感度を表し、また、 $\mathbf{S}_k$ 、 $\mathbf{E}_k$  は、本論文の(14)、(15)式から計算される応力と歪みテンソルである。次に(29)式の節点の歪みエネルギーから要素  $i$  の歪みエネルギー  $\alpha_i^e$  を次式から求める。

$$\alpha_i^e = \left( \sum_{k=1}^8 \alpha_k^{(i)} \right) / 8 \quad (30)$$

また、IESO 法では、よりシンプルな形態を求めるために BESO 法<sup>17)</sup>に用いられているフィルタリング法を用いる。このフィルタリング法は、まず要素の感度を節点の感度に変換し、要素中心から影響半径(ここでは  $b_r \times l_0$  で定義する)内の節点感度の重み付き平均から要素感度を求めるものである。詳しくは文献 1)を参照。

また、以上の IESO 法は、非常に収束は速いが、得られた解形態の収束(進化)が十分でない場合は、CA 法でノイマン近傍要素を増やし、そこから再度 IESO 法で削るという過程を繰り返す仕上アルゴリズム<sup>2)</sup>を適用する。

### 4. 解析例

まず、以上の提案手法の有効性を検証するため、文献 7),9)等を取り上げられている Fig.2 に示す 2 次元解析モデルに対して解析を行う。ただし、本論文で開発したプログラムは 3 次元専用であるため、ブリプロセッサの都合上、板厚方向を 2 要素(ボクセル)に分割し、面外方向の自由度を拘束することで解析を行う。また、対称性を保つため、設計変数(要素の材料密度)に対称条件を与える。

解析モデルの諸元は、ヤング係数を 205 GPa、ポアソン比を 0.3、単位体積質量を 7850 kg/m<sup>3</sup> とする。また、固定設計領域のボクセル分割数は 184×60×2 とし、各節点に粒子を配置する。ただし、この内、両端の 2×60×2 要素は粒子法で固定境界を表すための要素となる(粒子法で回転拘束を与えるための処置)。また、本論文では、要素の各辺の長さを 1m とし、HMPS 法の計算時間を現実的なものとするため、プログラム内で要素長を 1/10<sup>3</sup>、ヤング係数と外力を 1/10<sup>5</sup> とするスケールリングを行っている。この場合、HMPS 法の更新計算



は大変形時においても 20000 回以内で収束する。したがって、本解析の応力やコンプライアンス等を他の解析と直接比較することは難しいが、得られる解形態にスケーリングの影響がないことは Voxel FEM を用いた解析法との比較で確認している。

まず、Fig.3 は、鉛直荷重  $P$  を 15N (はり中央上面の  $3 \times 5$  節点に 1N ずつ载荷) に設定して、微小変形解析を行った結果を示している。なお、微小変形かどうかは、HMPS 法で求まる変形を 1000 倍に拡大して確認している。また、IESO 法の目標要素数比 (目標要素数/初期要素数) は 0.2, 除去率は 0.05, 影響半径倍率  $b_r$  は 3 としている。図には、比較として微小変形理論にもとづく Voxel FEM を用いた場合の解形態も示している。なお、HMPS 法の場合は 31 ステップ、FEM の場合は 32 ステップで収束し、仕上アルゴリズムは適用していない。図に示すように、微小変形範囲の荷重では、HMPS 法と Voxel FEM の解形態はほぼ一致することがわかる。

次に、有限変形における提案手法の有効性を検証するため、鉛直荷重  $P$  を  $15N \times [\text{倍率}]$  として解析を行う。まず、Fig.3 左の解形態に対して、HMPS 法による解析を行ったところ、13030 倍~13040 倍の間で飛び移り座屈が生じることがわかった。Fig.4 は、13040 倍の荷重における HMPS 法による解析結果を示したものである。図に示すように、更新回数 800 と 9600 の後にリバウンドが生じている。このように HMPS 法では、振動しながら静的解に収束する。

次に Fig.5 は、荷重の大きさを 15N の 20000 倍と 30000 倍にした場合の IESO 法による位相最適化の結果を示している。ただし、IESO 法の影響半径倍率  $b_r$  は 1 とし、他のパラメータは 15N の場合と同じである。なお、本解析で影響半径倍率  $b_r$  を 1 としたのは、大変形の場合、 $b_r$  を 3 にした場合には消えてしまう Fig.5 の右図中の細い斜線が後の進化過程に大きな影響を及ぼすためである。

Fig.6, 7 は、それぞれの解析の進化過程を示したものである。図より、どちらも同様な進化過程をたどっていることがわかる。これは、残存要素が少なくなるまで、Fig.4 に示すような飛び移り座屈が生じないためと考えられる。

Fig.8, 9 は、Fig.5 の解形態に CA 法+IESO 法の仕上アルゴリズム  $\mathcal{A}$  を適用した場合の進化過程とコンプライアンス比を示している。ただし、CA 法の付加率と IESO 法の除去率は共に 0.05 とし、200 ステップまで計算している。なお、Fig.8, 9 の進化過程では、コンプライアンスは高くなったり低くなったりするが、その中で、コンプライアンスがより低く進化したもののみを選択して示している。

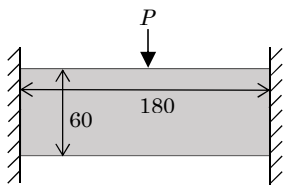


Fig.2 Analysis model for two-dimensional problem

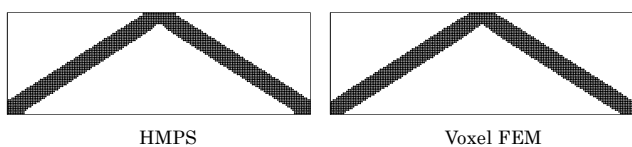


Fig.3 Comparison of topology optimization results using HMPS and using Voxel FEM ( $P=15[N]$ )

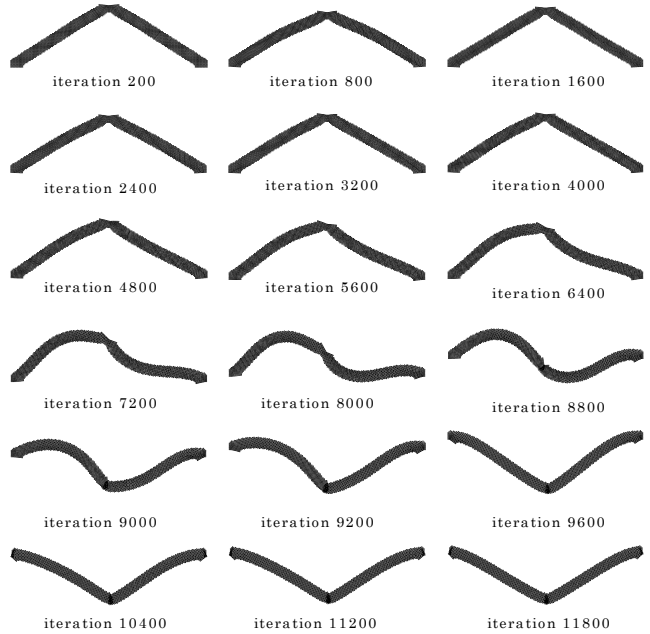


Fig.4 Simulation results by HMPS method ( $P=15 \times 13040N$ )

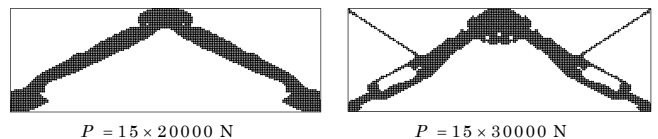


Fig.5 Topology optimization results in finite deformation analysis

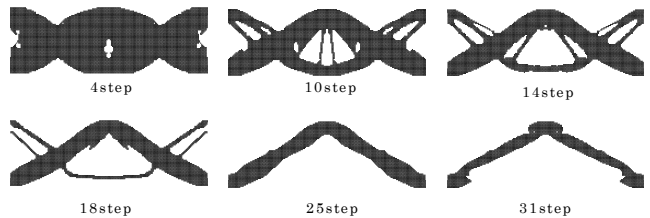


Fig.6 Evolution process of IESO analysis ( $P=15 \times 20000N$ )

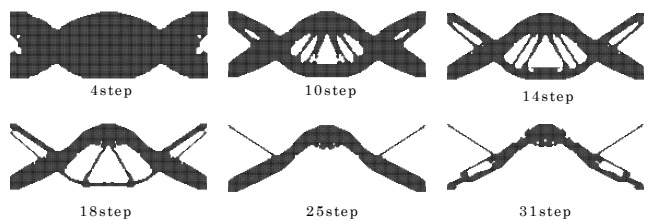


Fig.7 Evolution process of IESO analysis ( $P=15 \times 30000N$ )

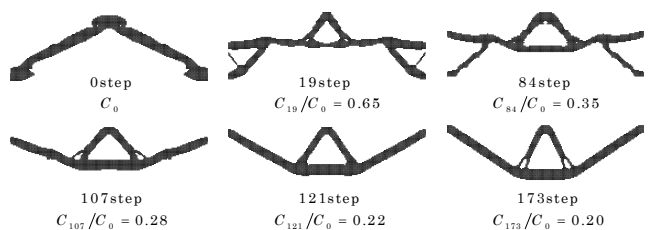


Fig.8 Evolution process of finishing algorithm ( $P=15 \times 20000N$ )

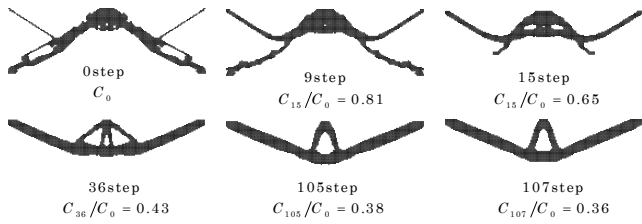


Fig.9 Evolution process of finishing algorithm ( $P=15 \times 30000N$ )

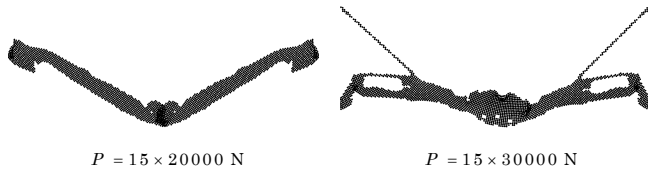


Fig.10 Deformations of the results in Fig.5

Fig.8,9 に示すように、この場合は、Fig.5 の仕上というよりも、別の形態に進化している。これは、Fig.5 の解形態では、Fig.10 に示すように座屈を伴う大きな変形が生じるため、仕上過程における CA 法と IESO 法の繰り返しにより、徐々に座屈が生じない、より剛性の高い形態に進化を遂げたためである。

Fig.11 は、Fig.8 から 121step の解、Fig.9 から 107 ステップの解を選択し、CA 法の付加率と IESO 法の除去率を共に 0.01 とした仕上アルゴリズムを適用し、さらに進化させた解を示している。ただし、Fig.8 の 173 ステップの解は、コンプライアンスは最小となるが、シンプルさに欠けるため除外している。図より、これらの形態は、文献 7),9) に示される解形態と同位相となっており、大きな荷重に対して座屈の生じにくい形態となっている (HMPS 法で座屈しないことを確認済)。以上の結果から、本手法により、座屈抵抗型の解形態が得られることが確かめられた。

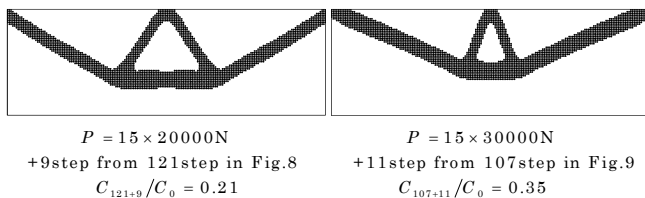


Fig.11 Topology optimization results using finishing algorithm

次に、Fig.12 に示す解析モデルにより、3次元問題における有効性を検証する。解析モデルの材料定数、要素長等の解析諸元は2次元問題と同じである。固定設計領域のボクセル分割数は  $94 \times 30 \times 94$  とし、各節点に粒子を配置する。ただし、この内、四隅の  $2 \times 30 \times 2$  要素は粒子法で固定境界を表すための要素となる。

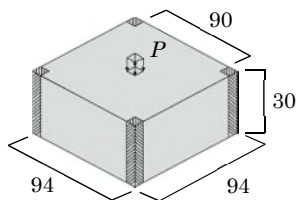


Fig.12 Analysis model for three-dimensional problem

まず、Fig.13 は、鉛直荷重  $P$  を 25N (上面中央の  $5 \times 5$  節点に 1N ずつ载荷) に設定して微小変形解析を行った結果を示している。なお、微小変形かどうかは、HMPS 法で求まる変形を 1000 倍に拡大して確認している。また、IESO 法の目標要素数比は 0.05、除去率は 0.05、影響半径倍率  $b_r$  は 3 としている。ただし、目標要素数比は、創生された形態の部材太さが 2 次元解析モデルとほぼ同等となるように設定している。図には、比較として微小変形理論にもとづく Voxel FEM を用いた場合の解形態も示している。なお、HMPS 法の場合は 54 ステップ、FEM の場合は 55 ステップで収束した。図に示すように、微小変形範囲では、HMPS 法と Voxel FEM の解形態はほぼ同様の位相となることがわかる。

次に Fig.14 は、荷重の大きさを 25N の 20000 倍と 30000 倍にした場合の IESO 法による位相最適化の結果を示している。ただし、IESO 法のパラメータは 25N の場合と同じである。なお、これらは 20000 倍の場合が 53 ステップ、30000 倍の場合が 51 ステップで収束した。図より、Fig.13 とは異なる位相となっていることがわかる。

Fig.15 は、Fig.14 の解形態に仕上アルゴリズムを適用した場合の結果を示している。ただし、CA 法の付加率と IESO 法の除去率は共に 0.05 とし、100 ステップまで計算している。図に示す結果は、荷重倍率 20000 倍の場合が 8 ステップ、30000 倍の場合が 97 ステップの解で、100 ステップの中で最もコンプライアンスの低い解である。なお、図中には Fig.14 の解とのコンプライアンスの比を示している。

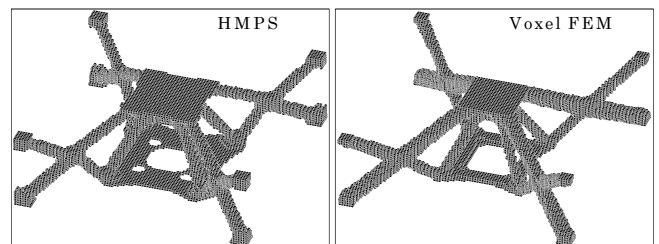


Fig.13 Comparison of topology optimization results using HMPS and using Voxel FEM ( $P=25N$ )

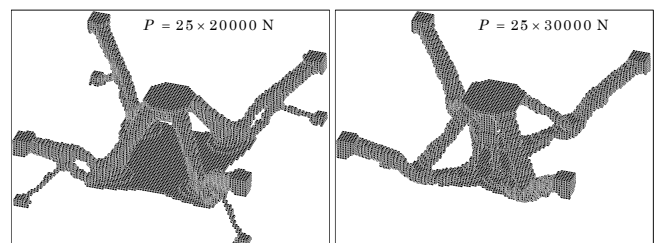


Fig.14 Topology optimization results in finite deformation analysis

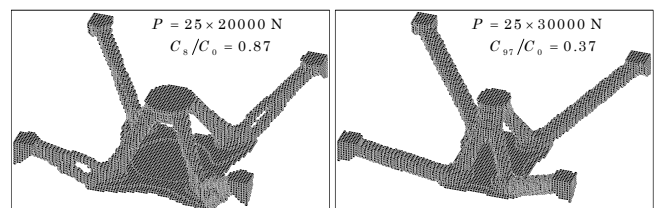


Fig.15 Topology optimization results by finishing algorithm

Fig.16 は、荷重倍率 30000 倍の場合の進化過程とコンプライアンス比を示しているが、この場合は、Fig.14 の結果とは異なる位相に進化している。これは、Fig.17 に示す Fig.14 の解形態の変形状態からわかるように、荷重倍率 20000 倍の場合は座屈が生じていないのに対して、荷重倍率 30000 倍の場合は座屈を伴う大変形を生じているためである。

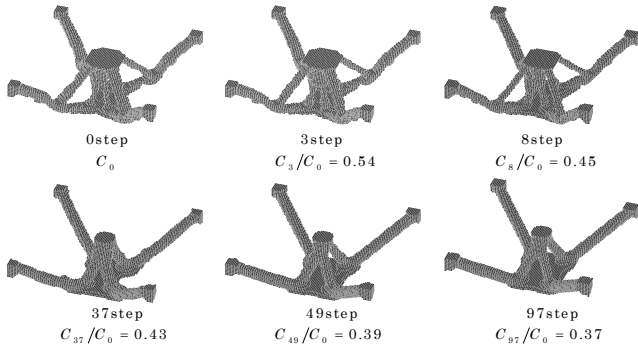


Fig.16 Evolution process of finishing algorithm ( $P=25 \times 30000N$ )

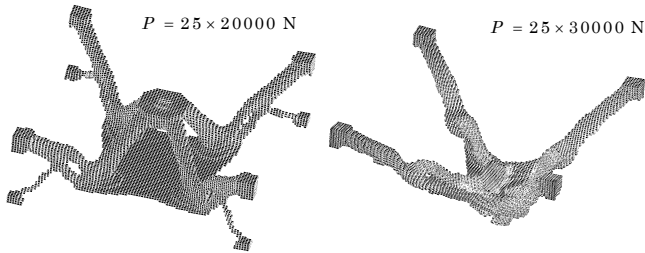


Fig.17 Deformations of the results in Fig.14

また、Fig.15 の結果と Fig.11 の結果を比較すると、どちらも中央の三角形部分が 20000 倍の場合は底辺の広い三角形となり、30000 倍の場合は底辺が狭い三角形となっていることがわかる。このことから、Fig.15 の結果が座屈抵抗型の解形態となっており、提案手法が 3 次元解析においても有効であることが確認できる。

## 5. まとめ

本論文では、3 次元のコンプライアントメカニズムを利用した制振機構の開発を目指して、まず、HMPS法とIESO法を組み合わせた有限変形が考慮できる 3 次元の位相最適化手法を開発した。そして、2 次元および 3 次元の基本的な解析例により、提案手法の有効性を検討し、以下の知見を得た。

- (1) 微小変形問題におけるIESO法の位相最適化では、2 次元問題ではHMPSとVoxel FEMの解形態はほぼ一致し、3 次元問題では多少形状は異なるが、ほぼ同位相の解形態となる。
- (2) 飛び移り座屈が生じる大変形問題の位相最適化では、2 次元、3 次元問題ともに、IESO法のみでは十分な解形態は得られず、その後のCA法+IESO法による仕上アルゴリズムにより、座屈に対応したよりシンプルな解形態に進化する。また、2 次元問題では、既往の論文の解と同位相となり、また、荷重の大きさにより形状が変化する。さらに、2 次元問題の結果と 3 次元問

題の結果には、形態の類似性が見られる。

また、本論文に示す解析例の解析時間は、3 次元解析でも一般のパソコン (CPU: Intel Core i7-4790K) で最大 14 時間程度であり、どの例題に対しても解の発散はなかった。したがって、提案手法は、有限変形が考慮できる 3 次元の位相最適化手法として十分実用化が可能である。

今後は、本手法を有限変形を考慮したコンプライアントメカニズムの位相最適化手法に発展させて行く予定である。

## 謝辞

本解析のプリプロセッサには、(株) くいとんのVOXCELCONを利用している。(株) くいとんの石井恵三氏、月野誠氏、英山寛之氏の研究協力に感謝の意を表す。

## 参考文献

- 1) Niiuchi, Y., Matsumoto S., Fujii, D.: Topology optimization of 3D structures using Improved ESO method, Journal of Structural and Construction Engineering (Transaction of AIJ), Vol.81, No.723, pp.851-858, 2016. 5 (in Japanese)  
新内洋平, 松本慎也, 藤井大地: 改良型 ESO 法を用いた 3 次元構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.81, No.723, pp.851-858, 2016. 5
- 2) Niiuchi, Y., Matsumoto, S., Fujii, D.: Computational morphogenesis of building structures using IESO method - Natural shape of buildings which resist vertical and seismic load, Journal of Structural and Construction Engineering (Transaction of AIJ), Vol.82, No.731, pp.97-103, 2017. 1 (in Japanese)  
新内洋平, 松本慎也, 藤井大地: IESO 法を用いた建築構造の形態創生 鉛直荷重と地震荷重に抵抗する建物の自然形態, 日本建築学会構造系論文集, Vol.82, No.731, pp.97-103, 2017. 1
- 3) Fujii, D., Tanizawa, T.: Creation of damping mechanisms using topology optimization method of continuum, Journal of Structural and Construction Engineering (Transaction of AIJ), Vol.72, No.619, pp.73-79, 2007. 9 (in Japanese)  
藤井大地, 谷澤 毅: 連続体の位相最適化手法を用いた制震機構の創生, 日本建築学会構造系論文集, Vol.72, No.619, pp.73-79, 2007. 9
- 4) Nishiwaki, S., Fecher, M. I., Min, S. and Kikuchi, N.: Structural Optimization Considering Flexibility (1st report, Formulation of Equation and Application to Compliant Mechanisms), Transactions of the Japan society of mechanical engineers. C., Vol.63, No.612, pp.81-88, 1997. 8 (in Japanese)  
西脇眞二, Frecher, M. I., Min, S., 菊池昇: 柔軟性を考慮した構造の最適化 (第 1 報 定式化とコンプライアントメカニズムへの応用), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.63, No.612, pp.81-88, 1997. 8
- 5) Yamada, T., Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Izui, K. and Yoshimura M.: Structural Optimization of Compliant Mechanisms Based on the Level Set Method, Transactions of JSCES, Paper No.20080001, 2008. 1 (in Japanese)  
山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井浩, 吉村允孝: レベルセット法に基づくコンプライアントメカニズムの構造最適化, Transactions of JSCES, Paper No.20080001, 2008. 1
- 6) Manabe, M., Fujii, D.: Heuristics based Topology Optimization using Particle Method for Elastic Materials with Finite Deformation, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of Japan, Structures I, pp.349-350, 2009. 8 (in Japanese)  
真鍋匡利, 藤井大地: 粒子法を用いた発見的手法に基づく有限変形を伴う弾性体のトポロジー最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集 構造 I, pp.349-350, 2009. 8
- 7) Manabe, M., Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S.: Topology

- Optimization Incorporating Level Set Boundary Expressions Using a Particle Method, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A, Vol.77, No.784, pp.2054-2066, 2011. 12 (in Japanese)
- 真鍋匡利, 山田崇恭, 泉井一浩, 西脇眞二: 粒子法を用いたレベルセット法による形状表現に基づくトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 (A編), 77巻 784号, pp.2054-2066, 2011. 12
- 8) Fernandes, W. S., Almeida, V. S., Neves, F. A., Greco, M.: Topology optimization applied to 2D elasticity problems considering the geometrical nonlinearity, Engineering Structures, Vol.100, pp.116-127, 2015
  - 9) Luo, Y., Wang, M. Y., Kang, Z.: Topology optimization of geometrically nonlinear structures based on an additive hyperelasticity technique, Comput Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.286, pp.422-441, 2015
  - 10) Jansen, M., Lombaert, G., Schevenels, M.: Robust topology optimization of structures with imperfect geometry based on geometric nonlinear analysis, Comput Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.285, pp.452-467, 2015
  - 11) Koshizuka, S.: Particle method: Maruzen, 2005 (in Japanese)  
越塚誠一: 粒子法, 丸善, 2005
  - 12) Suzuki, Y., Koshizuka, S.: Development of a Particle Method for Nonlinear Elastodynamics, Transactions of JSCES, Paper No.2007001, 2007. 1 (in Japanese)  
鈴木幸人, 越塚誠一: 非線型弾性体に対する粒子法の開発, 日本計算工学会論文集, 2007. 1
  - 13) Kondo, M., Suzuki, Y. and Koshizuka, S.: Suppressing Local Oscillation for Elastic Analysis based on Least Square Approximation using Particles, Transactions of JSCES, Paper No.20070031, 2007.12 (in Japanese)  
近藤雅裕, 鈴木幸人, 越塚誠一: 最小自乗近似による粒子法弾性解析手法の振動抑制, 日本計算工学会論文集, 2007. 12
  - 14) Kikuchi, T., Michiwaki, Y., Koshizuka, S., Kamiya, T., Osada, T., Jinno, N. and Toyama, Y.: Simulation of Uniaxial Compression Based on Hamiltonian MPS Method with Wall Boundary Condition Using Penalty Method, Transaction of JSCES, Paper No.20140010, 2014. 9 (in Japanese)  
菊池貴博, 道脇幸博, 越塚誠一, 神谷哲, 長田堯, 神野暢子, 外山義雄: 壁境界条件としてペナルティ法を導入した Hamiltonian MPS 法による超弾性体モデルの単軸圧縮シミュレーション, 日本計算工学会論文集, 2014. 9
  - 15) Hisada, T.: Foundation of tensor analysis for nonlinear finite element method, Maruzen, 1992 (in Japanese)  
久田俊明: 非線型有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992
  - 16) Xie, Y. M., Steven, G. P.: Evolutionary Structural Optimization, Springer, 1997
  - 17) Huang, X., Xie, Y. M.: Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.43, pp.1039-1049, 2007

# TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR ELASTIC STRUCTURES WITH FINITE DEFORMATION USING HMPS METHOD AND IESO METHOD

*Daiji FUJII*\*1, *Masaki YAMASHITA*\*2, *Masatoshi MANABE*\*3

\*1 Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kindai University, Dr. Eng.

\*2 Staff member, Hojo Structure Research Institute, M. Eng.

\*3 Staff member, Kimura Architects and Engineers Office, M. Eng.

The topology optimization method using voxel finite element method is an effective method to create various morphologies from rectangular parallelepiped design domain. Fujii et al. [1,2] created morphologies of building structures using such method. Also, Fujii et al. [3] applied such method to create link mechanisms that amplify input displacement such as toggle damping device. However, these link mechanisms increase manufacturing cost and maintenance cost as the number of links increases. Therefore, it is desirable to develop compliant mechanisms that amplify input displacement by elastic deformation. However, almost topology optimization methods to create these compliant mechanisms [4,5] are based on the infinitesimal deformation theory. Therefore, in this paper, we develop a topology optimization method considering finite deformation in order to develop a vibration control device using compliant mechanism.

In this paper, we use a particle method instead of finite element method, because when using finite element method, the computation time becomes enormous, and the convergence solution often cannot be obtained because the calculation becomes unstable by the large distortion of elements. Manabe and Fujii [6] have proposed a method that using CA-ESO method for topology optimization and MPS method [11] for particle method. Also, Manabe et al. [7] have developed a method using Level Set method for topology optimization. However, these methods target two-dimensional problems, and methods for three-dimensional problems have not been developed yet. Therefore, the purpose of this study is to extend this approach to three-dimensional problem.

The proposed method in this paper is an extension of the proposed method in ref. [6]. That is, HMPS (Hamiltonian Moving Particle Semi-implicit) method [12-14] is used instead of MPS method [11], and IESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) method with finishing algorithm is used instead of CA-ESO method.

In Section 2, the formulation of HMPS method is shown so that our created program can be understood. In Section 3, the outline of IESO method with finishing algorithm using HMPS method is explained. In Section 4, we verify the effectiveness of the proposed method by numerical examples in which jumping buckling occurs. In Section 5, the above results are summarized.

The conclusions are as follows.

- (1) In the analysis of infinitesimal deformation range, the solutions of the proposed method almost agree with the solutions of the method using voxel finite element method.
- (2) In the analysis of finite deformation, the solutions corresponding to buckling cannot be obtained by IESO method alone. However, the solutions obtained by IESO evolve into solutions corresponding to the buckling by the finishing algorithm (CA+IESO method). Also, the two-dimensional solutions have the same topology as the solutions in ref.[7],[9]. And, the shapes of two and three dimensional solutions change according to the magnitude of the load. Furthermore, the solutions of two-dimensional problem and three-dimensional problem show similarities in topology.

In addition, the proposed method is very robust and the computation time does not become enormous. Therefore, the proposed method can be practically implemented as a three-dimensional topology optimization method that can consider finite deformation.

In the next step, we plan to apply the proposed method to the topology optimization problem of compliant mechanisms.