１０　骨組の動的弾塑性解析

10.1　有限要素モデル

動的解析では，部材の弾塑性挙動を表現できる部材モデルを設定し，曲げモーメント，または せん断力の弾塑性履歴法則を与えて解析する方法が一般的である。

そこで，ここでは，図 10.1 に示すような要素モデルを考える。

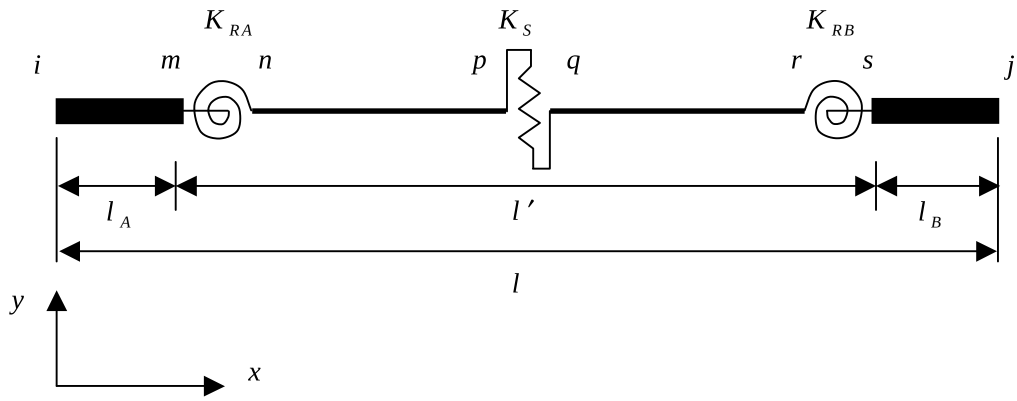

図 10.1　動的解析に用いる要素モデル

節点 i,m,n,p,q,r,s,j 間の要素を im,mn,np,pq,qr,rs,sj とする。以下，この要素の曲げ変形に対する要素剛性マトリックスを導出する。ここで，im,sj 要素部分は剛域であり，剛要素とする。

まず，各節点での変位ベクトルを次のように表す。

$$\{d_k\}^T = \{v_k \quad \theta_k\},\ k = i,m,n,p,q,r,s,j \tag{10.1}$$

im 要素と sj 要素は，剛要素であるから，節点変位間に次式の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_m \\ v_s \\ \theta_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \tag{10.2}$$

mn 要素と rs 要素は，曲げバネ要素であるから，それぞれ次式の剛性方程式が成り立つ。

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} K_{RA} & -K_{RA} \\ -K_{RA} & K_{RA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_m \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_m^e \\ M_n^e \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{RB} & -K_{RB} \\ -K_{RB} & K_{RB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_r \\ \theta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_r^e \\ M_s^e \end{Bmatrix} \end{gathered} \tag{10.3}$$

np 要素と qr 要素は，通常のはり要素であるから，それぞれ次式の剛性方程式が成り立つ。

$$
\frac{8EI}{l'^3}\begin{bmatrix} 12 & & & \text{Sym.} \\ 3l' & l'^2 & & \\ -12 & -3l' & 12 & \\ 3l' & l'^2/2 & -3l' & l'^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_n \\ v_p \\ \theta_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_m^e \\ M_n^e \\ Q_p^e \\ M_p^e \end{Bmatrix}
$$

$$
\frac{8EI}{l'^3}\begin{bmatrix} 12 & & & \text{Sym.} \\ 3l' & l'^2 & & \\ -12 & -3l' & 12 & \\ 3l' & l'^2/2 & -3l' & l'^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_q \\ \theta_p \\ v_s \\ \theta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_q^e \\ M_p^e \\ Q_s^e \\ M_r^e \end{Bmatrix} \tag{10.4}
$$

ただし，ここでは，$v_n = v_m, \theta_p = \theta_q, v_r = v_s$ の関係を用いている。

pq 要素は，せん断バネ要素であるから，次式の剛性方程式が成り立つ。

$$
\begin{bmatrix} K_S & -K_S \\ -K_S & K_S \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_p \\ v_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_p^e \\ Q_q^e \end{Bmatrix} \tag{10.5}
$$

(10.3)式，(10.4)式，(10.5)式を重ね合わせると，次式の剛性方程式が得られる。

$$
\begin{bmatrix}
\frac{96EI}{l'^3} & 0 & \frac{24EI}{l'^2} & -\frac{96EI}{l'^3} & \frac{24EI}{l'^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{RA} & -K_{RA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{24EI}{l'^2} & -K_{RA} & \frac{8EI}{l'}+K_{RA} & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{4EI}{l'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{96EI}{l'^3} & 0 & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{96EI}{l'^3}+K_S & -\frac{24EI}{l'^2} & -K_S & 0 & 0 & 0 \\
\frac{24EI}{l'^2} & 0 & \frac{4EI}{l'} & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{16EI}{l'} & \frac{24EI}{l'^2} & \frac{4EI}{l'} & -\frac{24EI}{l'^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -K_S & \frac{24EI}{l'^2} & \frac{96EI}{l'^3}+K_S & \frac{24EI}{l'^2} & -\frac{96EI}{l'^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l'} & \frac{24EI}{l'^2} & \frac{8EI}{l'}+K_{RB} & -\frac{24EI}{l'^2} & -K_{RB} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{24EI}{l'^2} & -\frac{96EI}{l'^3} & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{96EI}{l'^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{RB} & 0 & K_{RB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_m \\ \theta_n \\ v_p \\ \theta_p \\ v_q \\ \theta_r \\ v_s \\ \theta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_m^e \\ M_m^e \\ M_n^e \\ Q_p^e \\ M_p^e \\ Q_q^e \\ M_r^e \\ Q_s^e \\ M_s^e \end{Bmatrix} \tag{10.6}
$$

いま，要素内に荷重が作用していない（荷重は i, j 節点のみに加わる）ものと仮定すると，(10.6)式は次のようになる。

$$
\begin{bmatrix}
\frac{96EI}{l'^3} & 0 & \frac{24EI}{l'^2} & -\frac{96EI}{l'^3} & \frac{24EI}{l'^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{RA} & -K_{RA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{24EI}{l'^2} & -K_{RA} & \frac{8EI}{l'}+K_{RA} & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{4EI}{l'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{96EI}{l'^3} & 0 & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{96EI}{l'^3}+K_S & -\frac{24EI}{l'^2} & -K_S & 0 & 0 & 0 \\
\frac{24EI}{l'^2} & 0 & \frac{4EI}{l'} & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{16EI}{l'} & \frac{24EI}{l'^2} & \frac{4EI}{l'} & -\frac{24EI}{l'^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -K_S & \frac{24EI}{l'^2} & \frac{96EI}{l'^3}+K_S & \frac{24EI}{l'^2} & -\frac{96EI}{l'^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l'} & \frac{24EI}{l'^2} & \frac{8EI}{l'}+K_{RB} & -\frac{24EI}{l'^2} & -K_{RB} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{24EI}{l'^2} & -\frac{96EI}{l'^3} & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{96EI}{l'^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{RB} & 0 & K_{RB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_m \\ \theta_n \\ v_p \\ \theta_p \\ v_q \\ \theta_r \\ v_s \\ \theta_s \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} Q_m^e \\ M_m^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_s^e \\ M_s^e \end{Bmatrix}
\tag{10.7}
$$

節点力が 0 となる行を取り出すと,

$$
\begin{bmatrix}
\frac{8EI}{l'}+K_{RA} & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{4EI}{l'} & 0 & 0 \\
-\frac{24EI}{l'^2} & \frac{96EI}{l'^3}+K_S & -\frac{24EI}{l'^2} & -K_S & 0 \\
\frac{4EI}{l'} & -\frac{24EI}{l'^2} & \frac{16EI}{l'} & \frac{24EI}{l'^2} & \frac{4EI}{l'} \\
0 & -K_S & \frac{24EI}{l'^2} & \frac{96EI}{l'^3}+K_S & \frac{24EI}{l'^2} \\
0 & 0 & \frac{4EI}{l'} & \frac{24EI}{l'^2} & \frac{8EI}{l'}+K_{RB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \theta_n \\ v_p \\ \theta_p \\ v_q \\ \theta_r \end{Bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
\frac{24EI}{l'^2} & -K_{RA} & 0 & 0 \\
-\frac{96EI}{l'^3} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{24EI}{l'^2} & 0 & -\frac{24EI}{l'^2} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{96EI}{l'^3} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{24EI}{l'^2} & -K_{RB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_m \\ v_s \\ \theta_s \end{Bmatrix}
\tag{10.8}
$$

一方，m,s 節点に関する行を取り出すと,

$$
\begin{bmatrix}
\frac{96EI}{l'^3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{RA} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{96EI}{l'^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_{RB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_m \\ v_s \\ \theta_s \end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\frac{24EI}{l'^2} & -\frac{96EI}{l'^3} & \frac{24EI}{l'^2} & 0 & 0 \\
-K_{RA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{24EI}{l'^2} & -\frac{96EI}{l'^3} & -\frac{24EI}{l'^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -K_{RB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \theta_n \\ v_p \\ \theta_p \\ v_q \\ \theta_r \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} Q_m^e \\ M_m^e \\ Q_s^e \\ M_s^e \end{Bmatrix}
\tag{10.9}
$$

(10.8)式を解いて，(10.9)式に代入すると,

$$
\begin{bmatrix}
k_{11} & & & \text{Sym.} \\
k_{21} & k_{22} & & \\
k_{31} & k_{32} & k_{33} & \\
k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_m \\ v_s \\ \theta_s \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} Q_m^e \\ M_m^e \\ Q_s^e \\ M_s^e \end{Bmatrix}
\tag{10.10}
$$

ここに,

$$
k_{11} = 12EIK_S\left\{EI\left(K_{RA}+K_{RB}\right)+K_{RA}K_{RB}l'\right\}\Big/R
$$

$$
\begin{aligned}
&k_{21} = 6EIK_S K_{RA} l' \left(2EI + K_{RB} l'\right) \Big/ R \\
&k_{22} = 4EIK_{RA} \left\{3EI\left(K_{RB} + K_S l'^2\right) + K_S K_{RB} l'^3\right\} \Big/ R \\
&k_{31} = -k_{11},\, k_{32} = -k_{21},\, k_{33} = k_{11} \\
&k_{41} = 6EIK_S K_{RB} l' \left(2EI + K_{RA} l'\right) \Big/ R \\
&k_{42} = -2EIK_{RA} K_{RB} \left(6EI - K_S l'^3\right) \Big/ R \\
&k_{43} = -k_{41} \\
&k_{44} = 4EIK_{RB} \left\{3EI\left(K_{RA} + K_S l'^2\right) + K_S K_{RA} l'^3\right\} \Big/ R
\end{aligned}
\tag{10.11}
$$

$$
R = K_{RA} K_{RB} K_S l'^4 + 12E^2 I^2 \left(K_{RA} + K_{RB} + K_S l'^2\right) + 4EI\left(3K_{RA} K_{RB} l' + K_{RA} K_S l'^3 + K_{RB} K_S l'^3\right)
$$

さらに，(10.2)式の座標変換を行うと次式となる。ただし，節点力を変換するために，変換マトリックスの転置を前からも掛ける。

$$
\begin{bmatrix}
k_{11} & & & \text{Sym.} \\
k_{21} + k_{11} l_A & k_{22} + 2k_{21} l_A + k_{11} l_A{}^2 & & \\
-k_{11} & -k_{21} - k_{11} l_A & k_{11} & \\
k_{41} + k_{11} l_B & k_{42} + k_{21}\left(l_A + l_B\right) l_B + k_{11} l_A l_B & -k_{41} - k_{11} l_B & k_{44} + 2k_{41} l_B + k_{11} l_B{}^2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} Q_i^e \\ M_i^e \\ Q_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix}
\tag{10.12}
$$

ここに，

$$
\begin{Bmatrix} Q_i^e \\ M_i^e \\ Q_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & l_A & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -l_B \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}^T
\begin{Bmatrix} Q_m^e \\ M_m^e \\ Q_s^e \\ M_s^e \end{Bmatrix}
\tag{10.13}
$$

逆に，m, s 節点の節点力は，i, j 節点の節点力から次式によって求められる。

$$
\begin{Bmatrix} Q_m^e \\ M_m^e \\ Q_s^e \\ M_s^e \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
-l_A & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & l_B & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} Q_i^e \\ M_i^e \\ Q_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix}
\tag{10.14}
$$

(10.12)式を，剛性マトリックスの曲げに関する部分に代入すればよい。そして，重ね合わせを行って解くことにより，i, j 節点の節点変位が求められる。

この i, j 節点の節点変位から要素内の断面力を計算するためには，内節点 m, n, p, q, r, s の節点変位を求めておく必要がある。まず，m, s 節点の節点変位は，(10.2)式

$$
\begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_m \\ v_s \\ \theta_s \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & l_A & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -l_B \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}
\tag{10.15}
$$

から求められる。それ以外の節点変位は，(10.8)式より，次式によって求められる。

$$
\begin{Bmatrix} \theta_n \\ v_p \\ \theta_p \\ v_q \\ \theta_r \end{Bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_m \\ v_s \\ \theta_s \end{Bmatrix} \tag{10.16}
$$

ここに,

$$
\begin{aligned}
t_{11} &= -6EIK_S l'\left(2EI + K_{RB} l'\right) \\
t_{12} &= K_{RA}\left\{12E^2I^2 + K_{RB}K_S l'^4 + 4EI\left(3K_{RB}l' + K_S l'^3\right)\right\} \\
t_{13} &= -t_{11} \\
t_{14} &= 2EIK_{RB}\left(6EI - K_S l'^3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_{21} &= \frac{1}{2}K_{RA}K_{RB}K_S l'^4 + 6E^2I^2\left(2K_{RA} + 2K_{RB} + K_S l'^2\right) + \frac{EI}{4}\left(48K_{RA}K_{RB}l' + 11K_{RA}K_S l'^3 + 5K_{RB}K_S l'^3\right) \\
t_{22} &= \frac{K_{RA}l'}{8}\left\{48E^2I^2 + K_{RB}K_S l'^4 + 6EI\left(6K_{RB}l' + K_S l'^3\right)\right\} \\
t_{23} &= \frac{K_S l'^2}{4}\left\{24E^2I^2 + EIl'\left(5K_{RA} + 11K_{RB}\right) + 2K_{RA}K_{RB}l'^2\right)\right\} \\
t_{24} &= -\frac{K_{RB}l'}{8}\left\{-48E^2I^2 - 12EIK_{RA}l' + 6EIK_S l'^3 + K_{RA}K_S l'^4\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_{31} &= -\frac{3}{2}K_S l'\left\{8E^2I^2 + 3EIl'\left(K_{RA} + K_{RB}\right) + K_{RA}K_{RB}l'^2\right\} \\
t_{32} &= \frac{K_{RA}}{4}\left(2EI + K_{RB}l'\right)\left(24EI - K_S l'^3\right) \\
t_{33} &= -t_{31} \\
t_{34} &= \frac{K_{RB}}{4}\left(2EI + K_{RA}l'\right)\left(24EI - K_S l'^3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_{41} &= \frac{K_S l'^2}{4}\left\{24E^2I^2 + EIl'\left(11K_{RA} + 5K_{RB}\right) + 2K_{RA}K_{RB}l'^2\right)\right\} \\
t_{42} &= \frac{K_{RA}l'}{8}\left\{-48E^2I^2 - 12EIK_{RB}l' + 6EIK_S l'^3 + K_{RB}K_S l'^4\right\} \\
t_{43} &= \frac{1}{2}K_{RA}K_{RB}K_S l'^4 + 6E^2I^2\left(2K_{RA} + 2K_{RB} + K_S l'^2\right) + \frac{EI}{4}\left(48K_{RA}K_{RB}l' + 5K_{RA}K_S l'^3 + 11K_{RB}K_S l'^3\right) \\
t_{44} &= -\frac{K_{RB}l'}{8}\left\{48E^2I^2 + K_{RA}K_S l'^4 + 6EI\left(6K_{RA}l' + K_S l'^3\right)\right\}
\end{aligned} \tag{10.17}
$$

$$
\begin{aligned}
t_{51} &= -6EIK_S l'\left(2EI + K_{RA} l'\right) \\
t_{52} &= 2EIK_{RA}\left(6EI - K_S l'^3\right) \\
t_{53} &= -t_{51} \\
t_{54} &= K_{RB}\left\{12E^2I^2 + K_{RA}K_S l'^4 + 4EI\left(3K_{RA}l' + K_S l'^3\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
R = K_{RA}K_{RB}K_S l'^4 + 12E^2I^2\left(K_{RA} + K_{RB} + K_S l'^2\right) + 4EI\left(3K_{RA}K_{RB}l' + K_{RA}K_S l'^3 + K_{RB}K_S l'^3\right)
$$

10.2　動的弾塑性解析法

弾性状態の部材 ms の断面力は，次式から求められる。

$$M = \int_S y\sigma_x dS = \int_S yE\left(\frac{du}{dx} - y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dS = EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = EI\phi \tag{10.18}$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = EI\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \tag{10.19}$$

ここに，ϕ は曲率である。

以上を離散化すると，材端曲げモーメントとせん断力は次式で表される。

$$\begin{aligned} M_m &= -EI\left\{\frac{6}{l'^2}(v_m - v_s) - \frac{2}{l'}(2\theta_m + \theta_s)\right\} \\ M_s &= -EI\left\{\frac{6}{l'^2}(v_m - v_s) + \frac{2}{l'}(\theta_m + 2\theta_s)\right\} \end{aligned} \tag{10.20}$$

$$Q = -EI\left\{\frac{12}{l'^3}(v_m - v_s) + \frac{6}{l'^2}(\theta_m + \theta_s)\right\} \tag{10.21}$$

弾塑性解析では，(10.20)，(10.21)式で定義される曲げモーメントおよびせん断力がある値に達すると，材料の降伏が生じ，剛性が低下する。この剛性の低下を，図 10.1 に示す材端の曲げバネと中央のせん断バネによって表す。

まず，曲げの剛性低下について考える。いま，材端の回転角を θ とし，部材の曲げ剛性がこの材端の回転角に比例するものとして，その比例定数を K_e とする。そして，材端で塑性化が生じた時に，この剛性 K_e が低下して K_Y になったとする。以上の状態を材端回転角と曲げモーメントの関係で図示すると，図 10.2(a)のようになる。この変化を，部材の曲げ剛性と材端のバネ剛性の重ね合わせによって表す。まず，部材は弾性であるから，図 10.2(b)のようになる。一方，材端バネは，材端の曲げモーメントが降伏曲げモーメントに達した時点から働くので，図 10.2(c)のようになる。

ここで，材端バネの剛性を K_x とおくと，この剛性は次のように求められる。まず，降伏後の剛性 K_Y は，部材バネ剛性と，材端バネ剛性の直列バネの重ね合わせとなるので次式の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{K_Y} = \frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_x} \tag{10.22}$$

したがって，

$$K_x = \frac{K_Y K_e}{K_e - K_Y} = \frac{\frac{K_Y}{K_e}}{1 - \frac{K_Y}{K_e}} K_e \tag{10.23}$$

ここで，弾性剛性と降伏後剛性の比 K_Y / K_e を λ とおくと，

$$K_x = \frac{\lambda}{1-\lambda} K_e \tag{10.24}$$

となる。したがって，弾性剛性と降伏後剛性の比を与えることにより，材端曲げモーメントに対

する剛性低下を表現できる。

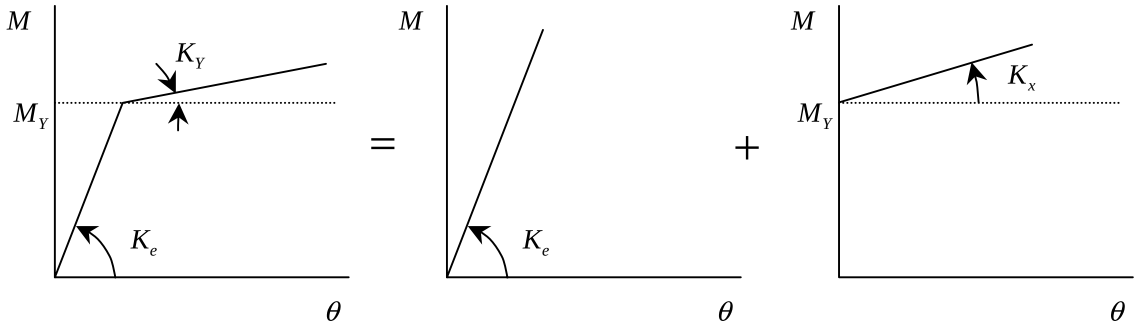

図 10.2　曲げモーメントと材端回転角の関係

ただし，ここで問題となるのはK_eの与え方で，本来部材の剛性は部材の曲率に比例し，回転角の関数ではない。したがって，K_eは近似的に与える。ここでは，(10.20)式で，$v_m = v_s, \theta_m = \theta_s$の状態を考え，$K_e = 6EI / l'$で与えることにする。

せん断バネについても，まったく同様で，この場合の部材剛性は，$K_e = 12EI / l'^3$で与えることにする。

以上の仮定により，動的弾塑性解析では，まず，図 10.1 の曲げバネ剛性K_{RA}, K_{RB}，およびせん断バネ剛性K_Sを次式のように表す。

$$K_{RA} = \frac{\lambda_{RA}}{1-\lambda_{RA}}\frac{6EI}{l'}, K_{RB} = \frac{\lambda_{RB}}{1-\lambda_{RB}}\frac{6EI}{l'}, K_S = \frac{\lambda_S}{1-\lambda_S}\frac{12EI}{l'^3} \tag{10.25}$$

ここに，$\lambda_{RA}, \lambda_{RB}, \lambda_S$は，曲げおよびせん断変形に対する断面降伏後の剛性低下率K_Y / K_eを表す。

(10.25)式を(10.10)式に代入すると，(10.11)式は次式となる。

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{12EI}{l'^3}\lambda_S\left\{\lambda_{RA} + \lambda_{RB} + 4\lambda_{RA}\lambda_{RB}\right\}/R \\
k_{21} &= \frac{12EI}{l'^2}\lambda_{RA}\lambda_S\left(1 + 2\lambda_{RB}\right)/R \\
k_{22} &= \frac{6EI}{l'}\lambda_{RA}\left\{\lambda_{RB} + 2\lambda_S + \lambda_{RB}\lambda_S\right\}/R \\
k_{31} &= -k_{11}, k_{32} = -k_{21}, k_{33} = k_{11} \\
k_{41} &= \frac{12EI}{l'^2}\lambda_{RB}\lambda_S\left(1 + 2\lambda_{RA}\right)\Big/R \\
k_{42} &= \frac{6EI}{l'}\lambda_{RA}\lambda_{RB}\left\{-1 + 3\lambda_S\right\}/R \\
k_{43} &= -k_{41} \\
k_{44} &= \frac{6EI}{l'}\lambda_{RB}\left\{\lambda_{RA} + 2\lambda_S + \lambda_{RA}\lambda_S\right\}/R \\
R &= \lambda_{RB} + 2\lambda_S + \lambda_{RB}\lambda_S + \lambda_{RA}\left\{1 - 4\lambda_{RB}\left(\lambda_S - 1\right) + \lambda_S\right\}
\end{aligned} \tag{10.26}$$

また，(10.25)式を(10.16)式に代入すると，(10.16)式は次式となる。

$$
\begin{aligned}
&t_{11} = \frac{2}{l'}\lambda_S\left(-1+\lambda_{RA}\right)\left(1+2\lambda_{RB}\right)\\
&t_{12} = \lambda_{RA}\left\{1+\lambda_{RB}\left(5-3\lambda_S\right)+3\lambda_S\right\}\\
&t_{13} = -t_{11}\\
&t_{14} = \lambda_{RB}\left(-1+\lambda_{RA}\right)\left(-1+3\lambda_S\right)\\
\\
&t_{21} = -\frac{1}{4}\left[\lambda_{RA}\left\{-4+16\lambda_{RB}\left(-1+\lambda_S\right)-3\lambda_S\right\}-4\lambda_S+\lambda_{RB}\left(-4+3\lambda_S\right)\right]\\
&t_{22} = -\frac{l'}{4}\lambda_{RA}\left\{-2+7\lambda_{RB}\left(-1+\lambda_S\right)-\lambda_S\right\}\\
&t_{23} = \frac{1}{4}\lambda_S\left(4+\lambda_{RA}+7\lambda_{RB}\right)\\
&t_{24} = -\frac{l'}{4}\lambda_{RB}\left\{-2+\lambda_{RA}\left(-1+\lambda_S\right)+5\lambda_S\right\}\\
\\
&t_{31} = -\frac{1}{2l'}\lambda_S\left\{4+5\lambda_{RB}+\lambda_{RA}\left(5+4\lambda_{RB}\right)\right\}\\
&t_{32} = -\frac{1}{2}\lambda_{RA}\left(1+2\lambda_{RB}\right)\left(-2+3\lambda_S\right)\\
&t_{33} = -t_{31}\\
&t_{34} = -\frac{1}{2}\lambda_{RB}\left(1+2\lambda_{RA}\right)\left(-2+3\lambda_S\right)\\
\\
&t_{41} = \frac{1}{4}\lambda_S\left(4+7\lambda_{RA}+\lambda_{RB}\right)\\
&t_{42} = \frac{l'}{4}\lambda_{RA}\left\{-2+\lambda_{RB}\left(-1+\lambda_S\right)+5\lambda_S\right\}\\
&t_{43} = -\frac{1}{4}\left[\lambda_{RA}\left\{-4+16\lambda_{RB}\left(-1+\lambda_S\right)+3\lambda_S\right\}-4\lambda_S-\lambda_{RB}\left(4+3\lambda_S\right)\right]\\
&t_{44} = \frac{l'}{4}\lambda_{RB}\left\{-2+7\lambda_{RA}\left(-1+\lambda_S\right)-\lambda_S\right\}\\
\\
&t_{51} = \frac{2}{l'}\lambda_S\left(1+2\lambda_{RA}\right)\left(-1+\lambda_{RB}\right)\\
&t_{52} = \lambda_{RA}\left(-1+\lambda_{RB}\right)\left(-1+3\lambda_S\right)\\
&t_{53} = -t_{51}\\
&t_{54} = \lambda_{RB}\left\{1+\lambda_{RA}\left(5-3\lambda_S\right)+3\lambda_S\right\}\\
\\
&R = \lambda_{RB}+2\lambda_S+\lambda_{RB}\lambda_S+\lambda_{RA}\left\{1-4\lambda_{RB}\left(\lambda_S-1\right)+\lambda_S\right\}
\end{aligned}
\qquad (10.27)
$$

動的弾塑性解析では，部材が弾性状態では，剛性低下率λを 1 に設定しておき，部材の降伏曲げモーメントまたは降伏曲率を超えると，剛性低下率を変化させて塑性状態を表す。また，除荷が生じれば，またλを 1 に近い値にもどす。このようにλに，弾塑性履歴法則を与えて時刻歴解析を行う。

以下のプログラムは，平面骨組の材端曲げに対して，基本的なバイリニアーモデルの履歴法則

を与えるプログラムの一例である。図 10.3 は，プログラムの変数の意味を図中に示している。

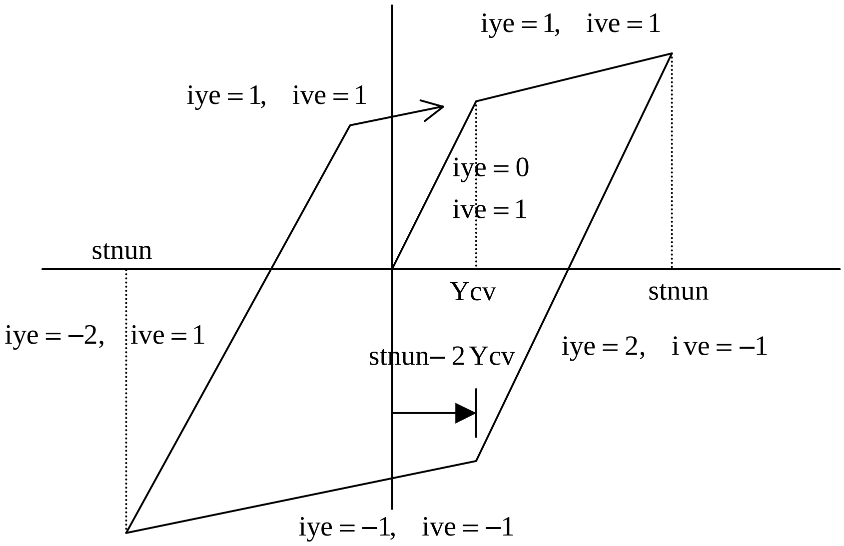

図 10.3　バイリニア曲線とプログラム変数

```
c
      SUBROUTINE BILINR(RmY,Ycv,stn,iye,ive,rmd,stnun)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
c
c      Rmy                              ：降伏後の剛性低下率
c      Ycv                              ：降伏曲率
c      stn                              ：要素材端の曲率
c      iye                              ：前ステップの降伏状態
c      ive                              ：曲率増分の符号（＋なら 1，－なら-1）
c
c      jye                              ：次ステップの降伏状態
c      rmd                              ：次ステップの剛性低下率
c      stnun                            ：除荷点の曲率
c
      RM1  = 1.d0-1.d-8                 ：弾性状態の剛性低下率
      RM2  = RmY
      STNY = Ycv
c
      IF( IYE.EQ.0 ) THEN
       IF( IVE.GT.0.AND.STN.GE.STNY ) THEN
        jye =  1
        rmd = RM2
       ELSE IF( IVE.LT.0.AND.STN.LE.-STNY ) THEN
        jye = -1
        rmd = RM2
       ELSE
        jye = iye
        rmd = RM1
       END IF
C
      ELSE IF( IYE.EQ.1 ) THEN
       IF( IVE.LT.0 ) THEN
        stnun = STN
        jye = 2
        rmd = RM1
       ELSE
```

```
          jye = iye
          rmd = RM2
         END IF
C
        ELSE IF( IYE.EQ.-1 ) THEN
         IF( IVE.GT.0 ) THEN
          stnun = STN
          jye = -2
          rmd = RM1
         ELSE
          jye = iye
          rmd = RM2
         END IF
C
        ELSE IF( IYE.EQ.2 ) THEN
         ST1  = stnun
         ST2  = ST1-2.D0*STNY
         IF( IVE.GT.0.AND.STN.GE.ST1 ) THEN
          jye =  1
          rmd = RM2
         ELSE IF( IVE.LT.0.AND.STN.LE.ST2 ) THEN
          jye = -1
          rmd = RM2
         ELSE
          jye = iye
          rmd = RM1
         END IF
C
        ELSE IF( IYE.EQ.-2 ) THEN
         ST1  = stnun
         ST2  = ST1 + 2.D0*STNY
         IF( IVE.GT.0.AND.STN.GE.ST2 ) THEN
          jye =  1
          rmd = RM2
         ELSE IF( IVE.LT.0.AND.STN.LE.ST1 ) THEN
          jye = -1
          rmd = RM2
         ELSE
          jye = iye
          rmd = RM1
         END IF
        END IF
c
        iye = jye
c
        RETURN
        END
```