

## 2 要素剛性マトリックス

有限要素法は、物体を小領域に分割し、分割された小領域の剛性を組み合わせることによって物体全体の剛性を評価するという発想にもとづいている。したがって、有限要素法で、まず問題となるのが各小領域（要素）の剛性をいかに導くかである。

### 2.1 バネとしての要素剛性マトリックス

#### ■ スカラー値問題の場合

1次元バネの問題では、剛性は以下のように導かれる。

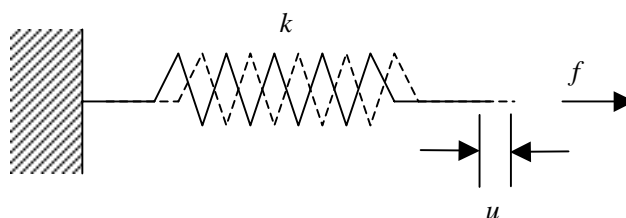


図 2.1 バネの変形と釣合

釣合式 (equilibrium equation)

$$f = ku \quad (2.1)$$

ここに、

$f$  : 外力(force)

$k$  : バネ定数(spring constant), または剛性(stiffness)

$u$  : 変位(displacement)

ひずみエネルギー (strain energy)

$$U = \frac{1}{2}uku \quad (2.2)$$

ここに、

$$k = \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} \quad (2.3)$$

#### ■ ベクトル・マトリックスの場合

2次元問題について、1930年～1940年、McHenryは、連続体を一連のバネ（または梁）に置き換えた(図 2.2)。また、McHenryは、はじめて節点(node)という概念を導入した。このMcHenryの定式化から、工学の分野でベクトル・マトリックスの表記が一般に用いられるようになった。

釣合式 (equilibrium equation)

$$\{f\} = [k]\{u\} \quad (2.4)$$

ここに,

$\{f\}$  : 一般化外力(generalized force)

$[k]$  : 剛性マトリックス (stiffness matrix)

$\{u\}$  : 一般化変位(displacement)

ひずみエネルギー (strain energy)

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} \quad (2.5)$$

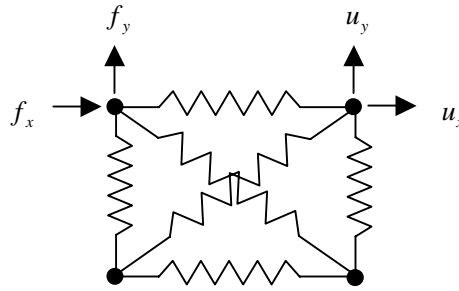


図 2.2 McHenry の要素

## 2.2 標準的な有限要素法における剛性マトリックスの導出法

標準的な有限要素法では, 一般に, 以下のような方法で要素の剛性を導くことができる。

節点変位を用いた多項式補間関数により, 要素内の変位分布を仮定する。

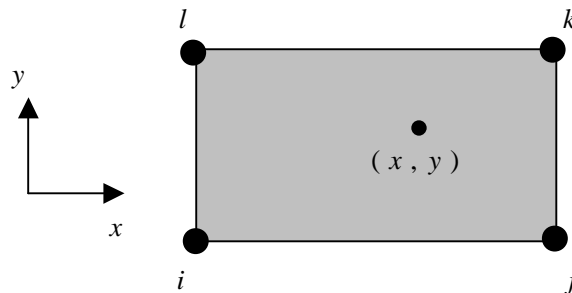


図 2.3 有限要素

要素内の点  $(x, y)$  における変位  $u, v$  は, 節点変位(nodal displacement)  $\{d\}$  を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(\{d\}) \\ v(x, y) &= v(\{d\}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここに,

$u(\{d\}), v(\{d\})$  : 節点変位  $\{d\}$  を用いた多項式による変位  $u, v$  の補間関数

$$\{d\}^T = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k \quad u_l \quad v_l\}^T$$

節点変位で表された変位分布  $u, v$  から , ひずみ - 変位関係を用いてひずみを計算する。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(\{d\}) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y(\{d\}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}(\{d\})\end{aligned}\tag{2.7}$$

上式はベクトル・マトリックスで表現すると次式となる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B]\{d\}\tag{2.8}$$

ここに ,  $[B]$  は , 節点変位とひずみの関係を表すマトリックス

ひずみエネルギー(strain energy)を求める。

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} d\Omega\tag{2.9}$$

ここに ,  $[D]$  は弾性マトリックス(elasticity matrix)で , 平面応力問題では次式で表される。

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\tag{2.10}$$

また , 平面ひずみ問題では次式となる。

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}\tag{2.11}$$

(2.9)式に(2.8)式を代入すると ,

$$\begin{aligned}U^e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} ([B]\{d\})^T [D] ([B]\{d\}) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \{d\}^T \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega \{d\} \\ &= \frac{1}{2} \{d\}^T [k^e] \{d\}\end{aligned}\tag{2.12}$$

上式の  $[k^e]$  が要素の剛性マトリックスである。

### 2.3 トラスの要素剛性マトリックス

例として，2.2 節に示した方法でトラス構造の要素剛性マトリックスの導出を行う。

節点変位を用いた多項式補間関数により，要素内の変位分布を仮定する。

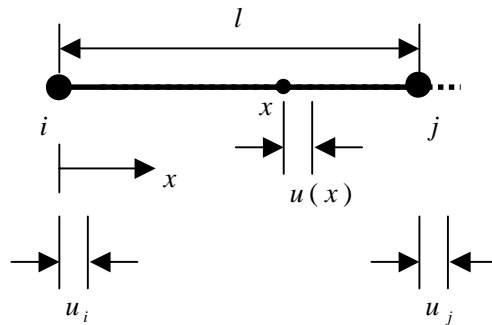


図 2.4 トラスの有限要素

要素内の点  $x$  における変位  $u$  は，節点変位(nodal displacement)  $\{d\}^T = \{u_i, u_j\}^T$  を用いて次式で表される。なお，次式の導出法は 2.5.1 節に示している。

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_i + \frac{x}{l}u_j = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [s]\{d\} \quad (2.13)$$

節点変位で表された変位分布  $u$  から，ひずみ - 変位関係を用いてひずみを計算する。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [B]\{d\} \quad (2.14)$$

ひずみエネルギー(strain energy)を求める。

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varepsilon_x E \varepsilon_x d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \{d\}^T \int_0^l \left( \iint [B]^T E [B] dydz \right) dx \{d\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_i & u_j \end{Bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここに， $A$  は次式で定義される断面積である。

$$A = \iint dydz \quad (2.16)$$

したがって，トラスの要素剛性マトリックスは次式となる。

$$[k_u^e] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

## 2.4 はりの要素剛性マトリックス

次に，はり構造の要素剛性マトリックスの導出を行う。

節点変位を用いた多項式補間関数により，要素内の変位分布を仮定する。

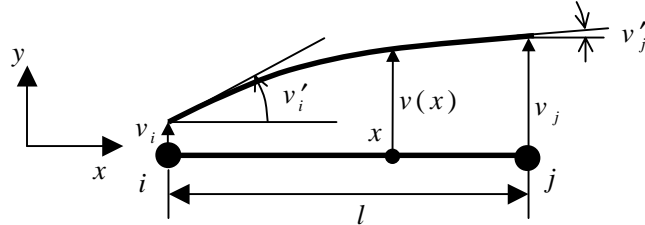


図 2.5 はりの有限要素

要素内の点  $x$  における  $y$  方向変位  $v$  は，節点変位(nodal displacement)  $\{d\}^T = \{v_i, v'_i, v_j, v'_j\}^T$  を用いて次式で表される。ただし， $v'_i = \partial v_i / \partial x$ 。なお，次式の導出法は 2.5.2 節に示している。

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \left\{ 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} v_i + l \left\{ \left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} v'_i + \left\{ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} v_j + l \left\{ -\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} v'_j \\
 &= \left[ \left\{ 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \quad l \left\{ \left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \quad \left\{ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \quad l \left\{ -\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} \\
 &= [S]\{d\}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

節点変位で表された変位分布  $v$  から，ひずみ - 変位関係を用いてひずみを計算する。

$$\varepsilon_x = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y \left[ \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3} x \right) \quad \left( -\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2} x \right) \quad \left( \frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3} x \right) \quad \left( -\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2} x \right) \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = [B]\{d\} \tag{2.19}$$

ひずみエネルギー(strain energy)を求める。

$$\begin{aligned}
U^e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varepsilon_x E \varepsilon_x d\Omega \\
&= \frac{1}{2} \{d\}^T \int_0^l \left( \iint [B]^T E [B] dydz \right) dx \{d\} \\
&= \frac{1}{2} \{v_i \quad v_i' \quad v_j \quad v_j'\} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{Sym.} \\ 6l & 4l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ここで、 $I$  は次式で定義される断面 2 次モーメントである。

$$I = \iint y^2 dydz \tag{2.21}$$

したがって、はりの要素剛性マトリックスは次式となる。

$$[k_v^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{Sym.} \\ 6l & 4l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

## 2.5 形状関数の導出法

(2.13), (2.18) 式の形状関数の導出法を示す。

### 2.5.1 トラス要素の場合

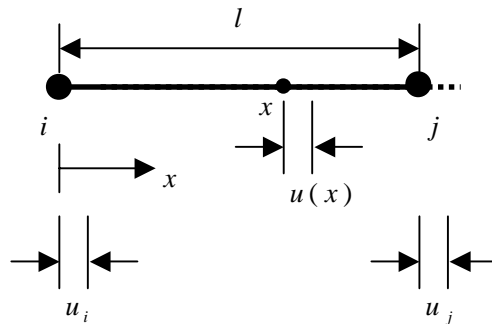


図 2.6 トラスの有限要素

要素内の変位分布を 1 次多項式で近似する。

$$u(x) = c_0 + c_1 x \tag{2.23}$$

節点変位を用いて表すと、

$$\begin{aligned}
u(0) &= c_0 = u_i \\
u(l) &= c_0 + c_1 l = u_j
\end{aligned} \tag{2.24}$$

未定係数と節点変位の関係をベクトルマトリックスで表示すると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

上式を解くと，

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

上式を(2.23)式に代入する。

$$u(x) = c_0 + c_1 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [s] \{d\} \quad (2.27)$$

### 2.5.2 はり要素の場合

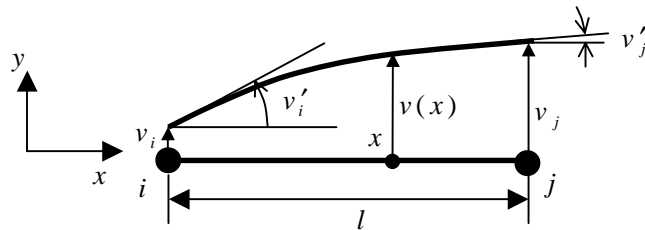


図 2.7 はりの有限要素

要素内の変位分布を 3 次多項式で近似する。

$$v(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (2.28)$$

上式を  $x$  で微分すると，

$$v'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 \quad (2.29)$$

節点変位を用いて表すと，

$$\begin{aligned} v(0) &= c_0 = v_i \\ v'(0) &= c_1 = v'_i \\ v(l) &= c_0 + c_1 l + c_2 l^2 + c_3 l^3 = v_j \\ v'(l) &= c_1 + 2c_2 l + 3c_3 l^2 = v'_j \end{aligned} \quad (2.30)$$

未定係数と節点変位の関係をベクトルマトリックスで表示すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

上式を解くと，

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

上式を(2.28)式に代入する。

$$\begin{aligned} v(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} \\ &= \left[ \left\{ 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \quad l \left\{ \left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \quad \left\{ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \quad l \left\{ -\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} \\ &= [S]\{d\} \end{aligned} \quad (2.33)$$