

3次元理論の1次元化と2次元化

1 はじめに

はり理論は、3次元理論の1次元化であり、板理論は3次元理論の2次元化である。3次元で解けるものをなぜ次元を落とすかという点、一番の大きな理由は計算効率を高めるためである。1次元のはりも2次元の板も3次元の有限要素で分割して解けば問題なく解ける。ただし、精度の良い解を求めようとすると膨大な数の有限要素分割を行う必要がある。このようなことはコンピュータの未発達時代には不可能であったため、できるだけ計算効率よく精度の高い解を求める方法として、3次元理論の1次元化、あるいは2次元化に関する研究がなされてきた。

3次元理論を1次元化した理論がはり理論であるが、はり理論は輝かしい成功をおさめ、現在でも非常に有力な解析手段として用いられている。特に建築分野では、構造設計のほとんどの部分がこのはり理論から導かれた1次元有限要素法によって行われている。はり理論による有限要素解析では、節点に集中荷重が加わる弾性問題に対しては正解が得られるため、少ない要素分割数で非常に精度の良い解析を行うことができる。唯一はり理論で解決されていない問題を挙げるならば、ねじり変形に関する問題で、特に薄肉の断面をもつ骨組にねじりが加わる場合注意が必要である。

3次元理論を2次元化した理論が板理論であるが、これははり理論に比較していまだに解決されていない問題が多い。まず、平面内の変形を解析する要素においても、3節点の三角形要素で精度の良いものが見あたらない。また、4節点の四辺形要素は、通常の有限要素法の解説書で紹介してある要素は、ほとんど形状が崩れると精度が極端に悪化する。一方、板曲げ要素に関しても、厚板は精度よく解けても、ぺらぺらの薄板になると大抵の要素は精度が悪化する。さらに静的な問題に関しては精度が良くても、要素形状がゆがんでいると、振動問題や座屈問題では一般に精度が悪くなる。このため、この分野の研究は盛んで、いまだに新しい要素が提案され続けている。

これだけコンピュータが発達してくると、板に関しては3次元有限要素を用いた方が理論的に問題がなくて良いのではないかと考えられるが（実際慶応の野口らはシェルの非線形解析に3次元要素を用いている）、やはり3次元要素で2次元要素の精度を得ようと思えば、非常に計算時間がかかる。したがって、精度が良く、ロバスト性の高い板要素は未だに高いニーズがある。

2 3次元変位の1次元化

はり理論では、図1に示す要素内の任意点の x, y, z 方向変位 u, v, w （3次元）を、断面剛の仮定とBernoulli-Eulerの仮定より、次式のように1次元化する。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x) - y \frac{dv_0(x)}{dx} - z \frac{dw_0}{dx} + \omega(y, z)\phi \\ v(x, y, z) &= v_0(x) - z\theta_x(x) \\ w(x, y, z) &= w_0(x) + y\theta_x(x) \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、 u_0, v_0, w_0 は、断面の図心軸上の軸方向変位と y, z 軸方向のたわみである。また、 θ_x は x 軸まわりの回転角、すなわちねじり角である。また、 ω はゆがみ関数と呼ばれるものであり、断面形状によって定まる係数である。 ϕ は、一般的には $\phi = d\theta_x/dx$ であるが、サンブナンねじりが仮定される場合は、 ϕ は一定となる（骨組解析の場合は一般的にサンブナンねじりが仮定される）。

ここで、断面剛の仮定というのは、断面内無ひずみの仮定で、式で表現すると次式となる。

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

一方，Bernoulli-Euler の仮定は，要素が曲がっても変形前に材軸に垂直だった断面は変形後も材軸に垂直であるという仮定で，この仮定により，曲げによる材軸方向の変形が次式で表される。

$$u(x, y, z) = -y \frac{dv_0(x)}{dx} - z \frac{dw_0}{dx} \quad (3)$$

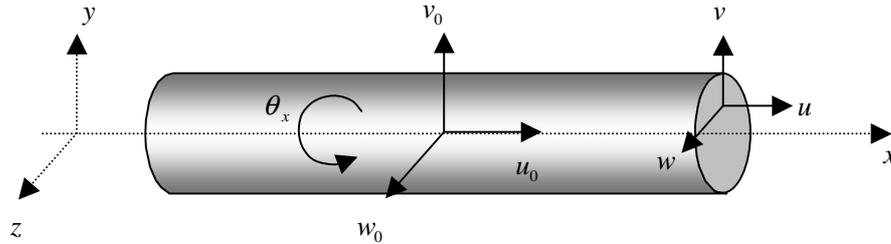


図1 はり要素とはりの変位場

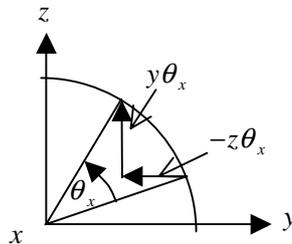


図2 ねじり角と変位 v, w の関係

(3)式の仮定は，部材が断面の大きさに比較して十分長い場合に成り立つ仮定である。通常の構造力学等で行う骨組の解析はこの仮定にもとづいている。この仮定が非常に有利な点は，曲げ変形に対する要素内変位を仮定する形状関数に3次関数が使える点にある。実は，要素内に外力が生じない場合，はりの微分方程式の解は3次関数になる。したがって，節点のみに荷重が加わる問題では，有限要素法で正解を求めることができる。次節では，まず復習を兼ねて，(1)式からはり要素の剛性マトリックスを求めてみる。

3 はり要素の剛性マトリックスの導出

(15.1)式より，ひずみ成分が次式のように計算される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0(x)}{dx} - y \frac{d^2v_0(x)}{dx^2} - z \frac{d^2w_0(x)}{dx^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - z \right) \phi \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} + y \right) \phi \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

また，応力 - ひずみ関係式より，応力成分は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= E\varepsilon_x \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \\
\sigma_y &= \sigma_z = \tau_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

したがって、要素のひずみエネルギーは次式で表される。

$$V^e = \frac{1}{2} \iiint E \left(\frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2v_0}{dx^2} - z \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 dx dy dz + \frac{1}{2} \iiint G \phi^2 \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dx dy dz \tag{6}$$

断面内 (y, z) の積分を行うと次のようになる。

$$V^e = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EA \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 + EI_z \left(\frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 + EI_y \left(\frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 + GK \phi^2 \right\} dx \tag{7}$$

ここに、 l は、はり要素の長さであり、また、

$$\begin{aligned}
A &= \iint dy dz \\
I_z &= \iint y^2 dy dz, I_y = \iint z^2 dy dz \\
K &= \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dy dz
\end{aligned} \tag{8}$$

なお、(7)式の導出では、断面の原点は図心、座標軸は断面の主軸方向とするため、

$$\iint y dy dz = 0, \iint z dy dz = 0, \iint yz dy dz = 0 \tag{9}$$

であることを利用している。

(1)式の断面の図心軸上の軸方向変位 u_0 、たわみ v_0, w_0 、ねじり角 θ_x を、それぞれ次式のようにはり要素の節点変位で表す。

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= \left(1 - \frac{x}{l} \right) u_i + \frac{x}{l} u_j \\
v_0(x) &= \left\{ 1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\} v_i + l \left\{ \left(\frac{x}{l} \right) - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\} \theta_{xi} + \left\{ 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\} v_j + l \left\{ - \left(\frac{x}{l} \right) + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\} \theta_{xj} \\
w_0(x) &= \left\{ 1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\} w_i - l \left\{ \left(\frac{x}{l} \right) - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\} \theta_{yi} + \left\{ 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\} w_j - l \left\{ - \left(\frac{x}{l} \right) + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\} \theta_{yj} \\
\theta_x(x) &= \left(1 - \frac{x}{l} \right) \theta_{xi} + \frac{x}{l} \theta_{xj}
\end{aligned} \tag{10}$$

ただし、 $\theta_z = dv_0/dx$, $\theta_y = -dw_0/dx$ である。

(10)式を(7)式に代入して計算すると次式が得られる。

$$V^e = \frac{1}{2} \{U^e\}^T [k] \{U^e\} \tag{11}$$

ここに、

$$\{U^e\}^T = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj}\} \tag{12}$$

ことを考慮した補正係数である。

(16),(17)式から要素の歪エネルギーは次式のように表される。

$$V_{bz}^e = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EI_z \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{d\varphi_z}{dx} \right)^2 + GA_{yy} \varphi_z^2 \right\} dx \quad (18)$$

ここに、 $A_{yy} = \kappa_y A$ で、せん断力に対する有効せん断面積と呼ばれる。

(15)式のたわみ v_0 、せん断変形による回転角 φ_z を、それぞれ次式のようにはり要素の節点変位で表す。

$$v_0(x) = \left\{ 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} v_i + l \left\{ \left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \theta_{zi} + \left\{ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} v_j + l \left\{ -\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \theta_{zj} \quad (19)$$

$$\varphi_z(x) = \left(1 - \frac{x}{l} \right) \varphi_{zi} + \frac{x}{l} \varphi_{zj}$$

ただし、 $\theta_z = dv_0/dx$ である。

(19)式を(18)式に代入して計算すると次式が得られる。

$$V_{bz}^e = \frac{1}{2} \{U_{bz}^e\}^T [k_{bz}] \{U_{bz}^e\} \quad (11)$$

ここに、

$$\{U_{bz}^e\}^T = \{v_i \quad \theta_{zi} \quad \varphi_{zi} \quad v_j \quad \theta_{zj} \quad \varphi_{zj}\} \quad (12)$$

$$[k_{bz}^e] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & & & & & \\ & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & & & \\ & 0 & \frac{EI_z}{l} & \frac{EI_z}{l} + \frac{GA_{yy}l}{3} & & \\ -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & \\ \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & -\frac{EI_z}{l} & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & \\ 0 & -\frac{EI_z}{l} & -\frac{EI_z}{l} + \frac{GA_{yy}l}{6} & 0 & \frac{EI_z}{l} & \frac{EI_z}{l} + \frac{GA_{yy}l}{3} \end{bmatrix} \quad \text{Sym.} \quad (13)$$

しかしながら、(11)式の剛性マトリックスを用いて計算すると、境界条件に矛盾が生じてしまう。例えば、有限要素法のアルゴリズムからすると、固定端の境界条件を設定する場合、(12)式の φ_{zi} または φ_{zj} が 0 になる。この場合、(16)、(17)式より明らかなように、せん断力が 0 になってしまう。固定端でせん断力が 0 というのは力学的に矛盾する。これは、固定端の境界条件が間違っているためで、固定端では、 $\theta_z = 0$ 、 $\varphi_z = 0$ ではなく、 $\theta_z + \varphi_z = 0$ である。したがって、(11)式は、 $\psi_z (= \theta_z + \varphi_z)$ で表した式に変換する必要がある。

この変換を行うために、次式の曲げモーメントとせん断力の間の力学的関係を用いる。

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx} \quad (14)$$

ただし、

$$Q_y = \iint \tau_{xy} dx dy, \quad M_z = \iint y \sigma_x dx dy \quad (15)$$

(19),(16),(17)式を考慮すると，(15)式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} Q_y &= -GA_{xy} \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \varphi_{zi} + \frac{x}{l} \varphi_{zj} \right] \\ M_z &= -EI_z \left[\left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) v_i + \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \theta_{zi} - \frac{1}{l} \varphi_{zi} + \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) v_j + \left(-\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \theta_{zj} + \frac{1}{l} \varphi_{zj} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

したがって，(14)式の関係は，

$$GA_{xy} \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \varphi_{zi} + \frac{x}{l} \varphi_{zj} \right] = \frac{12EI_z}{l^3} \left(v_i + \frac{l}{2} \theta_{zi} - v_j + \frac{l}{2} \theta_{zj} \right) \quad (17)$$

となり，要素の両端（ $x=0, x=l$ ）では次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \varphi_{zi} l &= \mu_y \left(v_i + \frac{l}{2} \theta_{zi} - v_j + \frac{l}{2} \theta_{zj} \right) \\ \varphi_{zj} l &= \mu_y \left(v_i + \frac{l}{2} \theta_{zi} - v_j + \frac{l}{2} \theta_{zj} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

ここに， $\mu_y = 12EI_z / (GA_{xy} l^2)$ である。(18)式および

$$\psi_{zi} = \theta_{zi} + \varphi_{zi}, \quad \psi_{zj} = \theta_{zj} + \varphi_{zj} \quad (19)$$

より，

$$\begin{aligned} \varphi_{zi} l + \frac{\mu_y l}{2} (\varphi_{zi} + \varphi_{zj}) &= \mu_y \left(v_i + \frac{l}{2} \psi_{zi} - v_j + \frac{l}{2} \psi_{zj} \right) \\ \varphi_{zj} l + \frac{\mu_y l}{2} (\varphi_{zi} + \varphi_{zj}) &= \mu_y \left(v_i + \frac{l}{2} \psi_{zi} - v_j + \frac{l}{2} \psi_{zj} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

これから，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{\mu_y}{2} \right) l & 0 & \frac{\mu_y}{2} l \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\mu_y}{2} l & 0 & \left(1 + \frac{\mu_y}{2} \right) l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{zi} \\ \varphi_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mu_y & \frac{\mu_y}{2} l & -\mu_y & \frac{\mu_y}{2} l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_y & \frac{\mu_y}{2} l & -\mu_y & \frac{\mu_y}{2} l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \psi_{zi} \\ v_j \\ \psi_{zj} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

上式を解くことにより，次の関係を作ることができる。

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_{zi} \\ \varphi_{zi} \\ u_j \\ \theta_{zj} \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_y}{(1+\mu_y)l} & \frac{2+\mu_y}{2(1+\mu_y)} & \frac{\mu_y}{(1+\mu_y)l} & -\frac{\mu_y}{2(1+\mu_y)} \\ \frac{\mu_y}{(1+\mu_y)l} & \frac{\mu_y}{2(1+\mu_y)} & -\frac{\mu_y}{(1+\mu_y)l} & \frac{\mu_y}{2(1+\mu_y)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\mu_y}{(1+\mu_y)l} & -\frac{\mu_y}{2(1+\mu_y)} & \frac{\mu_y}{(1+\mu_y)l} & \frac{2+\mu_y}{2(1+\mu_y)} \\ \frac{\mu_y}{(1+\mu_y)l} & \frac{\mu_y}{2(1+\mu_y)} & -\frac{\mu_y}{(1+\mu_y)l} & \frac{\mu_y}{2(1+\mu_y)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \psi_{zi} \\ u_j \\ \psi_{zj} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

(22)式を(11)式に代入すると、

$$V_{bz}^e = \{\bar{U}_{bz}^e\}^T [\bar{k}_{bz}] \{\bar{U}_{bz}^e\} \quad (23)$$

ここに、

$$\{\bar{U}_{bz}^e\}^T = \{v_i \quad \psi_{zi} \quad v_j \quad \psi_{zj}\}$$

$$[\bar{k}_{bz}] = \frac{EI_z}{l^3(1+\mu_y)} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{Sym.} \\ 6l & (4+\mu_y)l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & (2-\mu_y)l^2 & -6l & (4+\mu_y)l^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

y 軸まわりの曲げに関しても同様な計算により次式が得られる。

$$V_{by}^e = \{\bar{U}_{by}^e\}^T [\bar{k}_{by}] \{\bar{U}_{by}^e\} \quad (25)$$

ここに、

$$\{\bar{U}_{by}^e\}^T = \{w_i \quad \psi_{yi} \quad w_j \quad \psi_{yj}\}$$

$$[\bar{k}_{by}] = \frac{EI_y}{l^3(1+\mu_z)} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{Sym.} \\ -6l & (4+\mu_z)l^2 & & \\ -12 & 6l & 12 & \\ -6l & (2-\mu_z)l^2 & 6l & (4+\mu_z)l^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

ただし、 $\mu_z = 12EI_y / (GA_{sz}l^2)$, $A_{sz} = \kappa_z A$ である。

(24), (26)式の要素剛性マトリックスを用いれば、細長い部材も、太短い部材も精度よく解析することができる。また、次節に示す Timoshenko はりのように細長くなった場合にせん断剛性が過剰に評価されることはない。したがって、骨組解析の場合は一般に(24), (26)式の要素剛性マトリックスを用いている。

なお、有効せん断係数 κ_y, κ_z の計算法に関しては、藤谷義信著『薄肉はり構造解析』等を参考にして頂きたい。なお、簡単な断面の有効せん断係数等は、部材の規格書等にも掲載されている。

5 せん断変形を考慮したはり要素 (その2)

はり要素のせん断変形を考慮するもう一つの代表的な方法は、最初から(15)式を次のように置く方法である。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -y\psi_z \\ v(x, y, z) &= v_0(x) \end{aligned} \quad (27)$$

ここに、 $\psi_z = \frac{dv_0(x)}{dx} + \varphi_z$ である。上式を(4)式の歪 - 変位関係式に代入すると、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d\psi_z}{dx} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \psi_z\end{aligned}\quad (28)$$

また，(5)式の応力 - 歪関係式より次式が得られる。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \kappa_y G\gamma_{xy}\quad (29)$$

ただし， κ_y は y 方向のせん断応力に関する有効せん断係数である。

(28),(29)式から要素の歪エネルギーは次式のように表される。

$$V_{bz}^e = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EI_z \left(\frac{d\psi_z}{dx} \right)^2 + GA_{yy} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \psi_z \right)^2 \right\} dx\quad (30)$$

ここに， $A_{yy} = \kappa_y A$ である。

(15)式のたわみ v_0 ，回転角 ψ_z を，それぞれ次式のようにはり要素の節点変位で表す。

$$\begin{aligned}v_0(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)v_i + \frac{x}{l}v_j = [s]\{v\} \\ \psi_z(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)\psi_{zi} + \frac{x}{l}\psi_{zj} = [s]\{\psi_z\}\end{aligned}\quad (31)$$

(31)式を(30)式に代入して計算すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}V_{bz}^e &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\{\psi_z\}^T [s']^T EI_z [s'] \{\psi_z\} + \left(\{v\}^T [s']^T + \{\psi_z\}^T [s]^T \right) GA_{yy} \left([s']\{v\} + [s]\{\psi_z\} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \{\psi_z\}^T \int_0^l \left([s']^T EI_z [s'] + [s]^T GA_{yy} [s] \right) dx \{\psi_z\} + \frac{1}{2} \{v\}^T \int_0^l [s']^T GA_{yy} [s] dx \{v\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{v\}^T \int_0^l [s']^T GA_{yy} [s] dx \{\psi_z\} + \frac{1}{2} \{\psi_z\}^T \int_0^l [s]^T GA_{yy} [s'] dx \{v\}\end{aligned}\quad (32)$$

ここに， $[s']$ は $[s]$ の x に関する微分を表す。(32)式を積分して，整理すると次式となる。

$$V_{bz}^e = \{U_{bz}^e\}^T [k_{bz}] \{U_{bz}^e\}\quad (33)$$

ここに，

$$\{U_{bz}^e\}^T = \{v_i \quad \psi_{zi} \quad v_j \quad \psi_{zj}\}\quad (34)$$

$$[k_{bz}^e] = \frac{2EI_z}{\mu_y l^3} \begin{bmatrix} 6 & & & \text{Sym.} \\ 3l & (2 + \mu_y/2)l^2 & & \\ -6 & -3l & 6 & \\ 3l & (1 - \mu_y/2)l^2 & -3l & (2 + \mu_y/2)l^2 \end{bmatrix}\quad (35)$$

ただし， $\mu_y = 12EI_z / (GA_{yy}l^2)$ である。 y 軸まわりの曲げに関しても同様に計算できる。

(35)式の剛性マトリックスは，(31)式からわかるように，はりのたわみを直線近似しているため，かなり細かい要素分割を行わないと誤差を生じる。また，(35)式を用いて細長いはりを解析すると，非常に剛な解が得られる。この現象は Shear-Locking と呼ばれ，たわみとたわみによる回転角を独立に扱うとこのような現象が生じる。

6 3次元変位の2次元化

板理論では、図2に示す要素内の任意点の x, y, z 方向変位 u, v, w （3次元）を、 z 方向の歪が生じないという仮定と、Kirchhoff-Loveの仮定より、次式のように2次元化する。

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{dw_0(x, y)}{dx} \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{dw_0(x, y)}{dy} \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{36}$$

ただし、 u_0, v_0, w_0 は、断面の中立軸上の x, y, z 軸方向変位である。

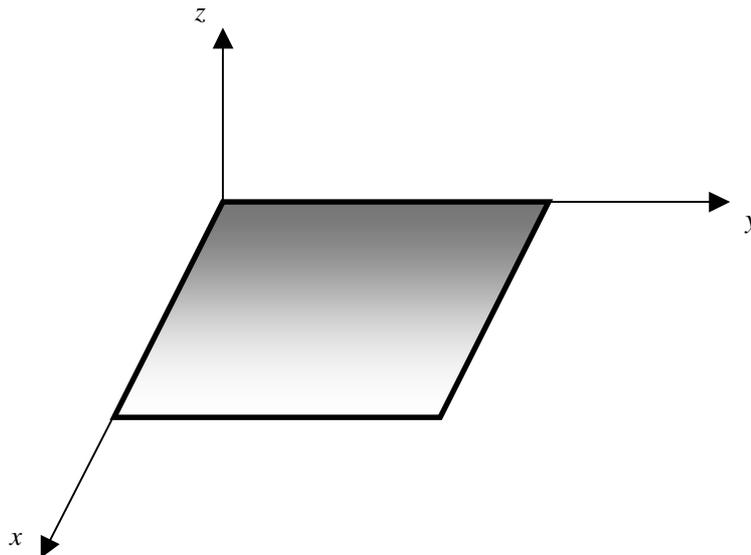


図2 板のその座標系

以降の議論は、はり理論とまったく共通する。なお、はりの場合のせん断変形の考慮（その1）に対応する要素に関しては、筆者が下記の論文で発表しているので参考にして頂きたい。

藤井大地，藤谷義信，片岡達哉，せん断変形を考慮した4節点非適合四辺形板曲げ要素の提案，日本建築学会構造工学論文集，Vol.42B，pp.253-259，1996

また、その2に対応する Reissner-Mindlin 理論にもとづく要素に関しては、ツイエンキーヴィッツ，テイラー著の『マトリックス有限要素法』，科学技術出版が参考になる。また、板要素の開発に関しては、日本では菊池文雄（東大），石井恵三（くいと）らが，多くの論文をまとめている。

最初に述べたように，節点の少ない低次元要素に関しては，まだ完ぺきと言える要素がなく，利用者はその問題点をよく認識した上で利用する必要がある。