

不連続面を有する FCM ソリッド要素

板氷の亀裂進展解析を行うため、要素内に不連続面を内包する FCM ソリッド要素を開発する。ソリッド要素は、簡単のため直方体とし、板としての解析が精度よく行えるように、変位も応力も 1 次関数で仮定する応力仮定法要素とする。

1 要素剛性マトリックスの導出

1.1 FCM 要素の剛性マトリックス

図 1.1 は、不連続面を有する FCM ソリッド要素を示している。この要素では、不連続面を境界として、 Ω_A と Ω_B の二つの領域に分かれるものとする。FCM では、図の節点が数学被覆の意味を持ち、各節点に関して被覆変位関数が定義される。ソリッド頂部にそれぞれ 2 つの節点が表示されているのは、領域 Ω_A に属する被覆と Ω_B に属する被覆の 2 つがあることを示している。

FCM では、要素内の Ω_A と Ω_B の変位場が、これらの被覆変位関数の重み付き和として次のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_A(x, y, z) &= \sum_{i=1}^8 w_{Ai}(x, y, z) \mathbf{u}_{Ai}(x, y, z) \\ \mathbf{u}_B(x, y, z) &= \sum_{i=1}^8 w_{Bi}(x, y, z) \mathbf{u}_{Bi}(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.1)$$

ここに、 x, y, z は、要素の図心を原点とする局所座標系の座標値、 $\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B$ は領域 Ω_A, Ω_B の x, y, z 方向の変位を成分とする変位ベクトル、 w_{Ai}, w_{Bi} は重み関数で、領域 Ω_A, Ω_B 内で次式を満たす必要がある。

$$\sum_{i=1}^8 w_{Ai}(x, y, z) = 1, \quad \sum_{i=1}^8 w_{Bi}(x, y, z) = 1 \quad (1.2)$$

また、 $\mathbf{u}_{Ai}, \mathbf{u}_{Bi}$ は被覆変位関数ベクトルである。

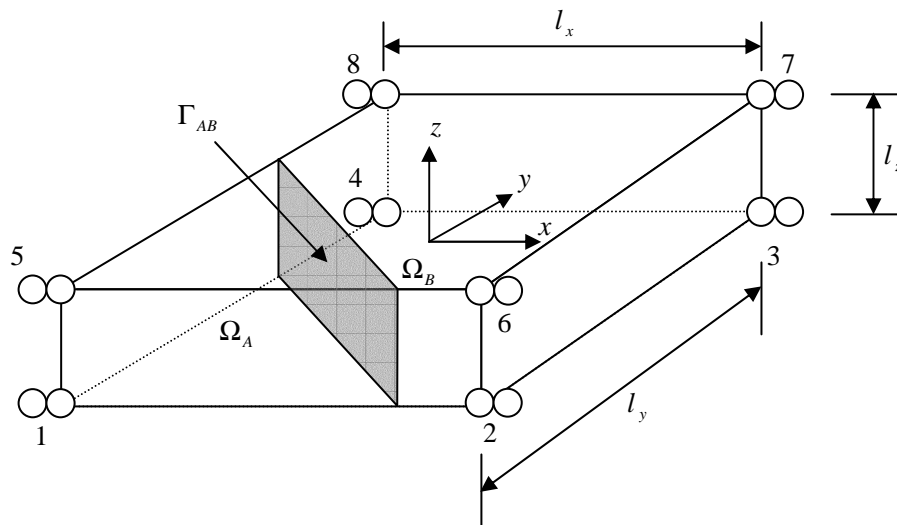


図 1.1 不連続面を有する FCM ソリッド要素

ここでは、重み関数として 8 節点アイソパラメトリック要素に用いられる次式の関数を用いる。

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1-2y/l_y)(1-2z/l_z) & w_5 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1-2y/l_y)(1+2z/l_z) \\
 w_2 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1-2y/l_y)(1-2z/l_z) & w_6 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1-2y/l_y)(1+2z/l_z) \\
 w_3 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1+2y/l_y)(1-2z/l_z) & w_7 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1+2y/l_y)(1+2z/l_z) \\
 w_4 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1+2y/l_y)(1-2z/l_z) & w_8 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1+2y/l_y)(1+2z/l_z)
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

ここに、 l_x, l_y, l_z は直方体要素の x, y, z 方向の辺の長さを表す（図 1.1）。

また、被覆変位関数としては定関数を用い、次式のように未定係数で表しておく。

$$\mathbf{u}_{Ai} = \begin{Bmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{Bi} = \begin{Bmatrix} b_{xi} \\ b_{yi} \\ b_{zi} \end{Bmatrix} \quad (i=1, \dots, 8) \tag{1.4}$$

(1.3),(1.4)式を(1.1)式に代入して、これをベクトル・マトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_A &= \mathbf{N}\mathbf{a} \\
 \mathbf{u}_B &= \mathbf{N}\mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_A &= [u_{Ax} \quad u_{Ay} \quad u_{Az}]^T, \quad \mathbf{u}_B = [u_{Bx} \quad u_{By} \quad u_{Bz}]^T \\
 \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8] \\
 \mathbf{a} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_x &= [a_{x1} \quad a_{x2} \quad a_{x3} \quad a_{x4} \quad a_{x5} \quad a_{x6} \quad a_{x7} \quad a_{x8}] \\ \mathbf{a}_y &= [a_{y1} \quad a_{y2} \quad a_{y3} \quad a_{y4} \quad a_{y5} \quad a_{y6} \quad a_{y7} \quad a_{y8}] \\ \mathbf{a}_z &= [a_{z1} \quad a_{z2} \quad a_{z3} \quad a_{z4} \quad a_{z5} \quad a_{z6} \quad a_{z7} \quad a_{z8}] \end{aligned} \\
 \mathbf{b} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \\ \mathbf{b}_z \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{b}_x &= [b_{x1} \quad b_{x2} \quad b_{x3} \quad b_{x4} \quad b_{x5} \quad b_{x6} \quad b_{x7} \quad b_{x8}] \\ \mathbf{b}_y &= [b_{y1} \quad b_{y2} \quad b_{y3} \quad b_{y4} \quad b_{y5} \quad b_{y6} \quad b_{y7} \quad b_{y8}] \\ \mathbf{b}_z &= [b_{z1} \quad b_{z2} \quad b_{z3} \quad b_{z4} \quad b_{z5} \quad b_{z6} \quad b_{z7} \quad b_{z8}] \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

弾性体の歪み - 変位関係式を用いると、(1.5)式より、領域 Ω_A, Ω_B 内の歪みは次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_A &= \mathbf{B}\mathbf{a} \\
 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_B &= \mathbf{B}\mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_A &= [\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{Ax} \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{Ay} \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{Az} \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{Axy} \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{Ayz} \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{Azx}]^T, \\
 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_B &= [\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{Bx} \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{By} \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{Bz} \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{Bxy} \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{Byz} \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{Bzx}]^T, \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_z \\ \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n}_z & \mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_z & \mathbf{0} & \mathbf{n}_x \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

ここに, $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ は, (1.6)式の \mathbf{n} の x, y, z に関する微分を表す。

一方, 応力仮定法では, 応力成分が次式のような関数で仮定される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} + c_{12}y + c_{13}z + c_{14}yz \\ c_{21} + c_{22}z + c_{23}x + c_{24}zx \\ c_{31} + c_{32}x + c_{33}y + c_{34}xy \\ c_{41} + c_{42}z \\ c_{51} + c_{52}x \\ c_{61} + c_{62}y \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (1.9)$$

ここに,

$$\mathbf{N}_s = \begin{bmatrix} 1 & y & z & yz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & x & zx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{c} = \{c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ c_{14} \ c_{21} \ c_{22} \ c_{23} \ c_{24} \ c_{31} \ c_{32} \ c_{33} \ c_{34} \ c_{41} \ c_{42} \ c_{51} \ c_{52} \ c_{61} \ c_{62}\}^T$$

(1.9)式から, 応力 - 歪み関係式を用いて歪みが次式のように求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (1.11)$$

ここに, \mathbf{D} は弾性マトリックス, \mathbf{D}^{-1} はその逆マトリックスで, 3次元等方均質体の場合次のようになる。

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-2\nu)/2(1-\nu) & 0 & 0 \\ & & & & (1-2\nu)/2(1-\nu) & 0 \\ \text{sym.} & & & & & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

ただし, E はヤング係数, ν はポアソン比である。

(1.7)式の歪みと(1.11)式の歪みは, 次式の重み付き残差式を満足するものとする。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_A} \delta \boldsymbol{\sigma}_A^T (\boldsymbol{\varepsilon}_A - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_A) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega_B} \delta \boldsymbol{\sigma}_B^T (\boldsymbol{\varepsilon}_B - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_B) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

上式に，(1.7)式と(1.11)式の関係代入すると，

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{c}_A^T \int_{\Omega_A} \mathbf{N}_S^T [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S \mathbf{c}_A - \mathbf{B} \mathbf{a}] d\Omega &= \delta \mathbf{c}_A^T [\mathbf{M}_{SA} \mathbf{c}_A - \mathbf{M}_{BA} \mathbf{a}] = 0 \\ \delta \mathbf{c}_B^T \int_{\Omega_B} \mathbf{N}_S^T [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S \mathbf{c}_B - \mathbf{B} \mathbf{b}] d\Omega &= \delta \mathbf{c}_B^T [\mathbf{M}_{SB} \mathbf{c}_B - \mathbf{M}_{BB} \mathbf{b}] = 0\end{aligned}\quad (1.15)$$

ここに，

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{SA} &= \int_{\Omega_A} \mathbf{N}_S^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S d\Omega, \quad \mathbf{M}_{SB} = \int_{\Omega_B} \mathbf{N}_S^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S d\Omega \\ \mathbf{M}_{BA} &= \int_{\Omega_A} \mathbf{N}_S^T \mathbf{B} d\Omega, \quad \mathbf{M}_{BB} = \int_{\Omega_B} \mathbf{N}_S^T \mathbf{B} d\Omega\end{aligned}\quad (1.16)$$

(1.15)式を $\mathbf{c}_A, \mathbf{c}_B$ に関して解くと次式が得られる。

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_A &= \mathbf{M}_{SA}^{-1} \mathbf{M}_{BA} \mathbf{a} \\ \mathbf{c}_B &= \mathbf{M}_{SB}^{-1} \mathbf{M}_{BB} \mathbf{b}\end{aligned}\quad (1.17)$$

これを，(1.11)式に代入すると $\boldsymbol{\varepsilon}$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_A &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S \mathbf{M}_{SA}^{-1} \mathbf{M}_{BA} \mathbf{a} = \bar{\mathbf{B}}_A \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_B &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S \mathbf{M}_{SB}^{-1} \mathbf{M}_{BB} \mathbf{b} = \bar{\mathbf{B}}_B \mathbf{b}\end{aligned}\quad (1.18)$$

したがって，応力仮定法の場合，歪み - 変位関係は，(1.7)式の代わりに，(1.18)式が用いられる。(1.18)式を用いると，領域 Ω_A と Ω_B の剛性マトリックスは次式のように求められる。

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_A &= \int_{\Omega_A} \bar{\mathbf{B}}_A^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_A d\Omega = \mathbf{M}_{BA}^T \mathbf{M}_{SA}^{-T} \int_{\Omega_A} \mathbf{N}_S^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S d\Omega \mathbf{M}_{SA}^{-1} \mathbf{M}_{BA} \\ &= \mathbf{M}_{BA}^T \mathbf{M}_{SA}^{-T} \mathbf{M}_{SA} \mathbf{M}_{SA}^{-1} \mathbf{M}_{BA} = \mathbf{M}_{BA}^T \mathbf{M}_{SA}^{-1} \mathbf{M}_{BA} \\ \mathbf{k}_B &= \int_{\Omega_B} \bar{\mathbf{B}}_B^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_B d\Omega = \mathbf{M}_{BB}^T \mathbf{M}_{SB}^{-1} \mathbf{M}_{BB}\end{aligned}\quad (1.19)$$

これから，要素全体の剛性マトリックスは次のようになる。

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_B \end{bmatrix}\quad (1.20)$$

上式からわかるように，今は，領域 Ω_A と Ω_B の境界における連続性を考えていないため，連成項が $\mathbf{0}$ となる。

1.2 境界のペナルティバネ剛性マトリックスの導出

いま，図 1.1 に示すように，境界面領域を Γ_{AB} とする。そして，領域 Ω_A の Γ_{AB} 上の変位を $\mathbf{u}_{\Gamma A}$ ，領域 Ω_B の Γ_{AB} 上の変位を $\mathbf{u}_{\Gamma B}$ とする。この場合， Γ_{AB} 上の局所座標を $(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma)$ とすると， $\mathbf{u}_{\Gamma A}, \mathbf{u}_{\Gamma B}$ は，(1.5)式を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\Gamma A} &= \mathbf{N}(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) \mathbf{a} \\ \mathbf{u}_{\Gamma B} &= \mathbf{N}(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) \mathbf{b}\end{aligned}\quad (1.21)$$

このとき，境界面領域 Γ_{AB} 上に x, y, z 方向に， p_x, p_y, p_z の剛性をもつバネが挿入されたとする。この場合，バネに蓄えられる歪みエネルギーは次式のように表される。

$$V_p = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{u}_{\Gamma A} - \mathbf{u}_{\Gamma B})^T \mathbf{p} (\mathbf{u}_{\Gamma A} - \mathbf{u}_{\Gamma B}) d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{AB}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Gamma A}^T & \mathbf{u}_{\Gamma B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p} & \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\Gamma A} \\ \mathbf{u}_{\Gamma B} \end{Bmatrix} d\Gamma\quad (1.22)$$

ここに，

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

(1.21)式より，

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\Gamma A} \\ \mathbf{u}_{\Gamma B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (1.24)$$

ただし， $\mathbf{N}_{\Gamma} = \mathbf{N}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, z_{\Gamma})$ である。

(1.22)式に(1.24)式を代入すると次のようになる。

$$V_p = \frac{1}{2} [\mathbf{a} \quad \mathbf{b}] \int_{\Gamma_{AB}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\Gamma}^T \mathbf{p} \mathbf{N}_{\Gamma} & -\mathbf{N}_{\Gamma}^T \mathbf{p} \mathbf{N}_{\Gamma} \\ -\mathbf{N}_{\Gamma}^T \mathbf{p} \mathbf{N}_{\Gamma} & \mathbf{N}_{\Gamma}^T \mathbf{p} \mathbf{N}_{\Gamma} \end{bmatrix} d\Gamma \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [\mathbf{a} \quad \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{k}_p & -\mathbf{k}_p \\ -\mathbf{k}_p & \mathbf{k}_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

ここに，

$$\mathbf{k}_p = \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{N}_{\Gamma}^T \mathbf{p} \mathbf{N}_{\Gamma} d\Gamma \quad (1.26)$$

したがって，ペナルティーバネが挿入された場合の(1.20)式の要素剛性マトリックスは次のようになる。

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_A + \mathbf{k}_p & -\mathbf{k}_p \\ -\mathbf{k}_p & \mathbf{k}_B + \mathbf{k}_p \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

2 要素剛性マトリックスの数値積分法

(1.27)式の要素剛性マトリックス $\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B, \mathbf{k}_p$ の数値積分法について示す。

2.1 $\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B$ の計算法

$\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B$ は，(1.19)式で表される。これを再記すると，

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_A &= \int_{\Omega_A} \bar{\mathbf{B}}_A^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_A d\Omega = \mathbf{M}_{BA}^T \mathbf{M}_{SA}^{-1} \mathbf{M}_{BA} \\ \mathbf{k}_B &= \int_{\Omega_B} \bar{\mathbf{B}}_B^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_B d\Omega = \mathbf{M}_{BB}^T \mathbf{M}_{SB}^{-1} \mathbf{M}_{BB} \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{SA} &= \int_{\Omega_A} \mathbf{N}_S^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S d\Omega, & \mathbf{M}_{SB} &= \int_{\Omega_B} \mathbf{N}_S^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S d\Omega \\ \mathbf{M}_{BA} &= \int_{\Omega_A} \mathbf{N}_S^T \mathbf{B} d\Omega, & \mathbf{M}_{BB} &= \int_{\Omega_B} \mathbf{N}_S^T \mathbf{B} d\Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここでは，(2.2)式を数値積分によって求める。数値積分を簡単にするため，要素の不連続面のパターンを次のように限定する。

- 1) 要素内の不連続面は，板の中立面に垂直であるとする。
- 2) 要素内で不連続面は直線とし，折れ曲がらないものとする。
- 3) 要素内で不連続面は1つだけ存在するとする。

この場合，要素内の不連続面のパターンは，図 2.1 に示す 2 つになる。

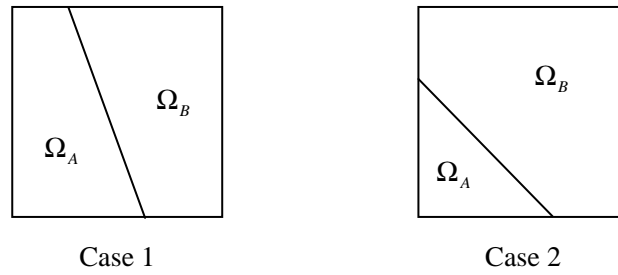


図 2.1 不連続面のパターン

(a) Case 1 の数値積分

まず、 y 方向に不連続面がある場合を考える。この場合の要素各辺の長さを図 2.2 に示す記号で表すことにする。

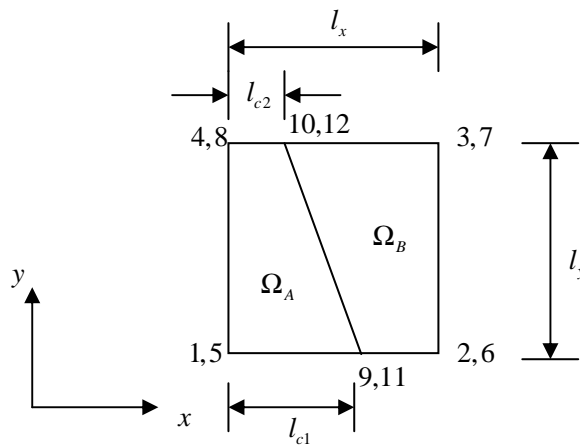


図 2.2 Case 1-a の要素長さ（ y 方向の不連続面）

この時、局所座標系における各節点の座標値は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -l_x/2 \\ -l_y/2 \\ -l_z/2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} l_x/2 \\ -l_y/2 \\ -l_z/2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} l_x/2 \\ l_y/2 \\ -l_z/2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -l_x/2 \\ l_y/2 \\ -l_z/2 \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -l_x/2 \\ -l_y/2 \\ l_z/2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} l_x/2 \\ -l_y/2 \\ l_z/2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} l_x/2 \\ l_y/2 \\ l_z/2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -l_x/2 \\ l_y/2 \\ l_z/2 \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -l_x/2 + l_{c1} \\ -l_y/2 \\ -l_z/2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -l_x/2 + l_{c2} \\ l_y/2 \\ -l_z/2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -l_x/2 + l_{c1} \\ -l_y/2 \\ l_z/2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -l_x/2 + l_{c2} \\ l_y/2 \\ l_z/2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

図 2.2 からわかるように、この場合は、領域 Ω_A, Ω_B とともに 6 面体であるから、アイソパラメトリック座標系を用いて、 x, y, z 方向に 2 点の Gauss 積分を適用できる。

この場合、積分に必要な要素内の座標は次式で表される。

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{x}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^e \\ \mathbf{y}^e \\ \mathbf{z}^e \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4 \ h_5 \ h_6 \ h_7 \ h_8] \\ h_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & h_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ h_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & h_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ h_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & h_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ h_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & h_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

また, 領域 Ω_A では,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^e &= \{x_1 \ x_9 \ x_{10} \ x_4 \ x_5 \ x_{11} \ x_{12} \ x_8\}^T \\ \mathbf{y}^e &= \{y_1 \ y_9 \ y_{10} \ y_4 \ y_5 \ y_{11} \ y_{12} \ y_8\}^T \\ \mathbf{z}^e &= \{z_1 \ z_9 \ z_{10} \ z_4 \ z_5 \ z_{11} \ z_{12} \ z_8\}^T \end{aligned} \quad (2.6)$$

領域 Ω_B では,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^e &= \{x_9 \ x_2 \ x_3 \ x_{10} \ x_{11} \ x_6 \ x_7 \ x_{12}\}^T \\ \mathbf{y}^e &= \{y_9 \ y_2 \ y_3 \ y_{10} \ y_{11} \ y_6 \ y_7 \ y_{12}\}^T \\ \mathbf{z}^e &= \{z_9 \ z_2 \ z_3 \ z_{10} \ z_{11} \ z_6 \ z_7 \ z_{12}\}^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

また, x, y, z に関する微分は, 次式により ξ, η, ζ の微分に変換される。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

(2.4)式を用いると, \mathbf{J} は次式のようになる。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_\xi \mathbf{x}^e & \mathbf{h}_\xi \mathbf{y}^e & \mathbf{h}_\xi \mathbf{z}^e \\ \mathbf{h}_\eta \mathbf{x}^e & \mathbf{h}_\eta \mathbf{y}^e & \mathbf{h}_\eta \mathbf{z}^e \\ \mathbf{h}_\zeta \mathbf{x}^e & \mathbf{h}_\zeta \mathbf{y}^e & \mathbf{h}_\zeta \mathbf{z}^e \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ここに, $\mathbf{h}_\xi, \mathbf{h}_\eta, \mathbf{h}_\zeta$ は, \mathbf{h} を ξ, η, ζ に関して微分したものである。

以上を用いれば, (2.2)式の積分は次のように行うことができる。

$$\mathbf{M}_{S\alpha} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{N}_S^T(x_{pi}, y_{pj}, z_{pk}) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S(x_{pi}, y_{pj}, z_{pk}) |\mathbf{J}| w_{pi} w_{pj} w_{pk} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{M}_{B\alpha} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{N}_S^T(x_{pi}, y_{pj}, z_{pk}) \mathbf{B}(x_{pi}, y_{pj}, z_{pk}) |\mathbf{J}| w_{pi} w_{pj} w_{pk}$$

ここに、 $|\mathbf{J}|$ は(2.9)式の行列式の値、 x_{pi}, y_{pj}, z_{pk} は、ガウスポイントの座標値、 w_{pi}, w_{pj}, w_{pk} はガウス積分の重み係数の値を示す。また、 α は、 A, B を表し、領域によって節点座標ベクトルが異なる。

次に図 2.3 に示す x 方向に不連続面がある場合は、節点 9,10,11,12 の座標値が次式のように書き変わる。

$$\begin{cases} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2 \\ -l_y/2 + l_{c1} \\ -l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{cases} = \begin{cases} l_x/2 \\ -l_y/2 + l_{c2} \\ -l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2 \\ -l_y/2 + l_{c1} \\ l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{cases} = \begin{cases} l_x/2 \\ -l_y/2 + l_{c2} \\ l_z/2 \end{cases} \quad (2.11)$$

また、領域 Ω_A の節点変位ベクトルは、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^e &= \{x_1 \quad x_2 \quad x_{10} \quad x_9 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_{12} \quad x_{11}\}^T \\ \mathbf{y}^e &= \{y_1 \quad y_2 \quad y_{10} \quad y_9 \quad y_5 \quad y_6 \quad y_{12} \quad y_{11}\}^T \\ \mathbf{z}^e &= \{z_1 \quad z_2 \quad z_{10} \quad z_9 \quad z_5 \quad z_6 \quad z_{12} \quad z_{11}\}^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

領域 Ω_B では、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^e &= \{x_9 \quad x_{10} \quad x_3 \quad x_4 \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_7 \quad x_8\}^T \\ \mathbf{y}^e &= \{y_9 \quad y_{10} \quad y_3 \quad y_4 \quad y_{11} \quad y_{12} \quad y_7 \quad y_8\}^T \\ \mathbf{z}^e &= \{z_9 \quad z_{10} \quad z_3 \quad z_4 \quad z_{11} \quad z_{12} \quad z_7 \quad z_8\}^T \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。その他は、 y 方向に不連続面がある場合と同じである。

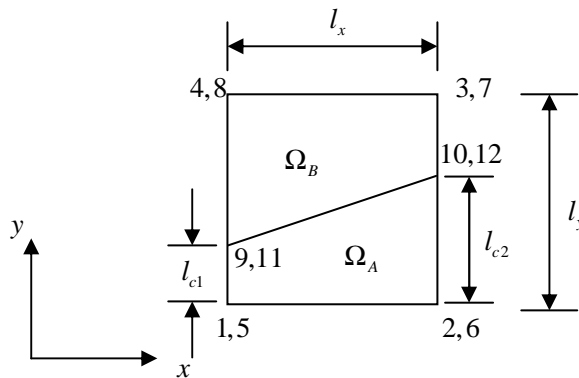


図 2.3 Case 1-b の要素長さ（ x 方向の不連続面）

(b) Case 2 の数値積分

まず、図 2.4 に示すように、面 1256 と面 2367 に端点を持つ不連続面がある場合を考える。この場合は、領域 Ω_B を 1357 面に関して分割して積分を行う。このように分割すれば、5 面体と 6 面体になるため、数値積分を行うことが可能である。

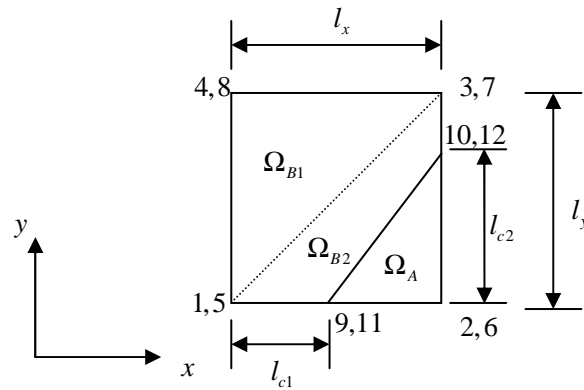


図 2.4 Case 2-a の要素長さ

領域 Ω_{B2} は 6 面体であるから，Case 1 と同様に積分することができる。領域 Ω_A と Ω_{B1} は 5 面体であるから，領域内の座標を面積座標を用いた次式の補間関数を用いて表す。

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{x}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^e \\ \mathbf{y}^e \\ \mathbf{z}^e \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

ただし，

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6] \\ p_1 &= \frac{1}{2}L_1(1-\zeta) & p_4 &= \frac{1}{2}L_1(1+\zeta) \\ p_2 &= \frac{1}{2}L_2(1-\zeta) & p_5 &= \frac{1}{2}L_2(1+\zeta) \\ p_3 &= \frac{1}{2}L_3(1-\zeta) & p_6 &= \frac{1}{2}L_3(1+\zeta) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここに， L_1, L_2, L_3 は，面積座標で，図 2.5 に示す三角形 123 の面積を A とすると次式で定義される。

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (2.16)$$

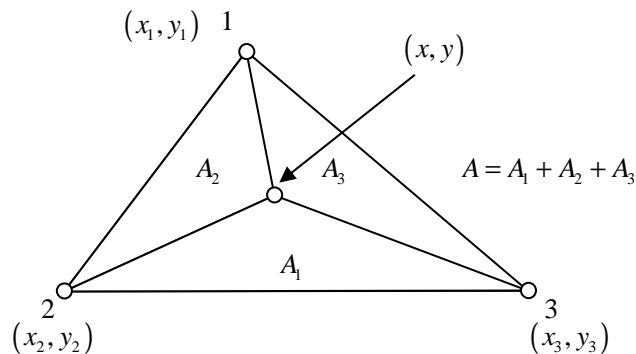


図 2.5 面積座標

ここに，

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, & A_1 &= \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, & A_3 &= \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

ここでは， Ω_A, Ω_{B1} の積分に，三角形の辺の中点を積分点とする 2 次の公式を用いる。この場合，(2.2)式は，次式によって計算される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{S\alpha} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \mathbf{N}_S^T(x_{pi}, y_{pi}, z_{pj}) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S(x_{pi}, y_{pi}, z_{pj}) (A/3) (L_z/2) w_{pj} \\
 \mathbf{M}_{B\alpha} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \mathbf{N}_S^T(x_{pi}, y_{pi}, z_{pj}) \mathbf{B}(x_{pi}, y_{pi}, z_{pj}) (A/3) (L_z/2) w_{pj}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

ただし， x_{pi}, y_{pi} は，三角形の辺の中点の座標値で，面積座標では， $(1/2, 1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1/2)$ となる。また， z_{pj} はガウスポイントの座標で， w_{pj} はその重み係数である。

以上の計算式で計算するためには，図 2.4 の節点の座標値と，各領域の頂点の節点番号がわかればよい。図 2.4 の場合の節点 9,10,11,12 の節点座標は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -l_x/2 + l_{c1} \\ -l_y/2 \\ -l_z/2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_x/2 \\ -l_y/2 + l_{c2} \\ -l_z/2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -l_x/2 + l_{c1} \\ -l_y/2 \\ l_z/2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_x/2 \\ -l_y/2 + l_{c2} \\ l_z/2 \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

また，各領域の節点番号は，

$$\begin{aligned}
 \Omega_A &: [9 \ 2 \ 10 \ 11 \ 6 \ 12] \\
 \Omega_{B1} &: [1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 7 \ 8] \\
 \Omega_{B2} &: [1 \ 9 \ 10 \ 3 \ 5 \ 11 \ 12 \ 7]
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

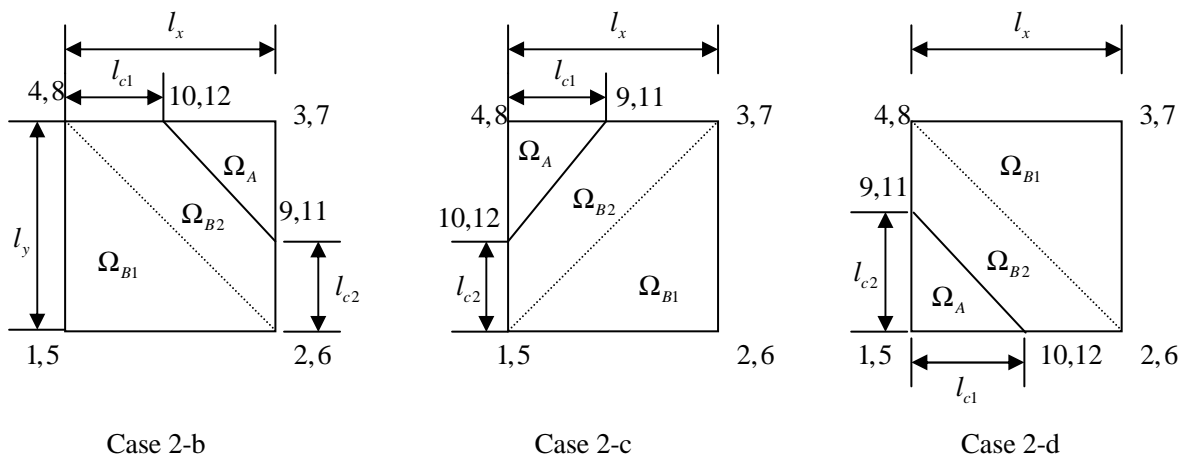


図 2.6 不連続面の位置と節点番号

図 2.6 に示す他の不連続面のパターンについても同様に積分を行うことができ、各 Case の節点座標と領域の頂点番号は、以下ようになる。

Case 2-b

$$\begin{cases} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{cases} = \begin{cases} l_x/2 \\ -l_y/2+l_{c2} \\ -l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2+l_{c1} \\ l_y/2 \\ -l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{cases} = \begin{cases} l_x/2 \\ -l_y/2+l_{c2} \\ l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2+l_{c1} \\ l_y/2 \\ l_z/2 \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \Omega_A &: [9 \ 3 \ 10 \ 11 \ 7 \ 12] \\ \Omega_{B1} &: [1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 8] \\ \Omega_{B2} &: [2 \ 9 \ 10 \ 4 \ 6 \ 11 \ 12 \ 8] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Case 2-c

$$\begin{cases} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2+l_{c1} \\ l_y/2 \\ -l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2 \\ -l_y/2+l_{c2} \\ -l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2+l_{c1} \\ l_y/2 \\ l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2 \\ -l_y/2+l_{c2} \\ l_z/2 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \Omega_A &: [9 \ 4 \ 10 \ 11 \ 8 \ 12] \\ \Omega_{B1} &: [1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 7] \\ \Omega_{B2} &: [1 \ 3 \ 9 \ 10 \ 5 \ 7 \ 11 \ 12] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Case 2-d

$$\begin{cases} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2 \\ -l_y/2+l_{c2} \\ -l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2+l_{c1} \\ -l_y/2 \\ -l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2 \\ -l_y/2+l_{c2} \\ l_z/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{cases} = \begin{cases} -l_x/2+l_{c1} \\ -l_y/2 \\ l_z/2 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \Omega_A &: [9 \ 1 \ 10 \ 11 \ 5 \ 12] \\ \Omega_{B1} &: [2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 7 \ 8] \\ \Omega_{B2} &: [2 \ 4 \ 9 \ 10 \ 6 \ 8 \ 11 \ 12] \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.2 \mathbf{k}_p の計算法

(1.26)式のペナルティバネ剛性の積分式を再記すると、

$$\mathbf{k}_p = \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{N}_\Gamma^T \mathbf{p} \mathbf{N}_\Gamma d\Gamma \quad (2.27)$$

ここで、 Γ_{AB} 内の座標値は、領域の頂点の節点座標から次のように計算される。

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{x}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^e \\ \mathbf{y}^e \\ \mathbf{z}^e \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4] \\ r_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & r_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ r_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) & r_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^e &= \{x_9 \quad x_{10} \quad x_{12} \quad x_{11}\}^T \\
 \mathbf{y}^e &= \{y_9 \quad y_{10} \quad y_{12} \quad y_{11}\}^T \\
 \mathbf{z}^e &= \{z_9 \quad z_{10} \quad z_{12} \quad z_{11}\}^T
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Γ_{AB} では、図に示すように領域を 10 分割し、各セルの中心で応力を評価して、引張り応力が許容値を超えた時点で亀裂が生じるとして、積分領域から外す処理を行う。

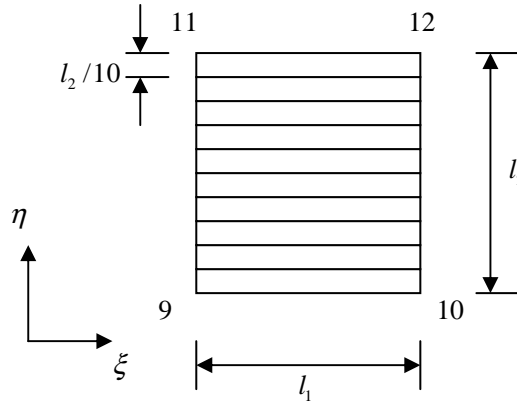


図 2.7 Γ_{AB} のセル分割

p_x, p_y, p_z が、セル各セルで一定であるとする、(2.27)式の積分は次式によって計算できる。

$$\mathbf{k}_p = \sum_{i=1}^{10} \mathbf{N}(x_{pi}, y_{pi}, z_{pi})^T \mathbf{p} \mathbf{N}(x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}) (l_2/10) l_1 \tag{2.31}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 x_{pi} &= \mathbf{r}(0, -1.1 + 0.2i) \mathbf{x} \\
 y_{pi} &= \mathbf{r}(0, -1.1 + 0.2i) \mathbf{y} \\
 z_{pi} &= \mathbf{r}(0, -1.1 + 0.2i) \mathbf{z} \\
 l_1 &= \sqrt{(x_{10} - x_9)^2 + (y_{10} - y_9)^2 + (z_{10} - z_9)^2} \\
 l_2 &= \sqrt{(x_{11} - x_9)^2 + (y_{11} - y_9)^2 + (z_{11} - z_9)^2}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

ただし、応力の判定で、亀裂が生じたセルの加算は行わないようにする。

3 内節点自由度の縮約と重ね合わせ

不連続面を有する FCM 要素では、全体剛性マトリックスを作る際に、重ね合わせる節点(被覆)と、独立に定義される節点(被覆)に分かれる。独立に定義される節点は、不連続性を表すために必要な節点で、亀裂が連続している場合、これらの節点も亀裂の連続性に応じて重ね合わせる必要がある。しかしながら任意の亀裂を考える場合、亀裂の連続条件にしたがって重ね合わせを考慮することはプログラムのコーディングの面で複雑になる。したがって、ここでは、亀裂端部の要素間の連続性は考えないものとする。

この場合、不連続性を表すための節点自由度は、要素レベルで縮約することが可能となる。そ

ここで、ここでは、重ね合わせが必要となる外節点と、不連続性を表すための内節点の振り分け、および内節点自由度の縮約の方法について述べる。

まず、外節点と内節点の振り分けは、その節点が属している領域の節点自由度が外節点となる。たとえば、図 3.1 の場合は、節点 1,4,5,8 が Ω_A に属し、節点 2,3,6,7 が Ω_B に属している。したがって、外節点の自由度は、

$$\mathbf{u}_o^T = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{a}_4 \quad \mathbf{a}_5 \quad \mathbf{b}_6 \quad \mathbf{b}_7 \quad \mathbf{a}_8] \quad (3.1)$$

ただし、 $\mathbf{a}_i = [a_{xi} \quad a_{yi} \quad a_{zi}]$ 、 $\mathbf{b}_i = [b_{xi} \quad b_{yi} \quad b_{zi}]$ である。これに対して内節点の自由度は、

$$\mathbf{u}_I^T = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{b}_4 \quad \mathbf{b}_5 \quad \mathbf{a}_6 \quad \mathbf{a}_7 \quad \mathbf{b}_8] \quad (3.2)$$

その他の不連続面のパターンについても同様なルールで振り分けを行うことができる。例えば、図 2.4 では、節点 2,6 のみ Ω_A に属するので、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_o^T &= [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_4 \quad \mathbf{b}_5 \quad \mathbf{a}_6 \quad \mathbf{b}_7 \quad \mathbf{b}_8] \\ \mathbf{u}_I^T &= [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 \quad \mathbf{a}_5 \quad \mathbf{b}_6 \quad \mathbf{a}_7 \quad \mathbf{a}_8] \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。他の Case については省略する。

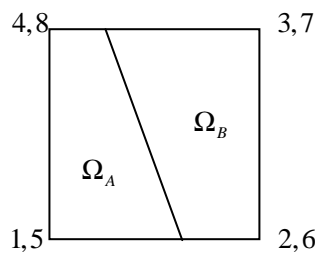


図 3.1 内節点自由度と外節点自由度

次に、内節点自由度の縮約法を示す。(1.27)式の要素剛性マトリックスを、内節点と外節点の自由度に分離して並べ替えを行い、要素剛性方程式を作ると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{oo} & \mathbf{k}_{oi} \\ \mathbf{k}_{io} & \mathbf{k}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_o \\ \mathbf{u}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_o \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

上式の下側の関係から

$$\mathbf{u}_I = -\mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{io} \mathbf{u}_o \quad (3.5)$$

これを上側の関係式に代入すると、

$$\tilde{\mathbf{k}} \mathbf{u}_o = \mathbf{f}_o \quad (3.6)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}_{oo} - \mathbf{k}_{oi} \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{io} \quad (3.7)$$

したがって、次式の縮約された $\tilde{\mathbf{k}}$ を用いれば、通常の有限要素法とまったく同様の重ね合わせを行うことができる。

4 外力と変位拘束条件

(3.6)式の未定係数ベクトル \mathbf{u}_0 は、今の場合、有限要素法の節点変位ベクトルとまったく同じ意味を持つので、外力は等価節点力として、節点への集中荷重として与え、拘束条件は、拘束される自由度を縮約することで与えることができる。これらは通常の有限要素法を同様である。

また、板氷の解析では、要素の底面にバネ支床を設ける必要がある。要素の底面の任意点の変位を $\mathbf{u}^T = \{u_x \ u_y \ u_z\}$ とすると、バネ支床の歪みエネルギーは次式となる。

$$V_s = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_b} \mathbf{u}^T \mathbf{p}_s \mathbf{u} d\Gamma \quad (4.1)$$

ここに、 Γ_b は要素底面領域、 \mathbf{p}_s は、

$$\mathbf{p}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_s \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

であり、 p_s はバネ支床の単位面積あたりのバネ剛性を表す。

(4.1)式の \mathbf{u} を形状関数を用いて表すと、

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_b \mathbf{u}_b \quad (4.3)$$

ここに、

$$\mathbf{N}_b = \begin{bmatrix} n_{b1} & 0 & 0 & n_{b2} & 0 & 0 & n_{b3} & 0 & 0 & n_{b4} & 0 & 0 \\ 0 & n_{b1} & 0 & 0 & n_{b2} & 0 & 0 & n_{b3} & 0 & 0 & n_{b4} & 0 \\ 0 & 0 & n_{b1} & 0 & 0 & n_{b2} & 0 & 0 & n_{b3} & 0 & 0 & n_{b4} \end{bmatrix}$$

$$n_{b1} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{l_x}\right) \left(1 - \frac{2y}{l_y}\right), \quad n_{b2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{l_x}\right) \left(1 - \frac{2y}{l_y}\right) \quad (4.4)$$

$$n_{b3} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{l_x}\right) \left(1 + \frac{2y}{l_y}\right), \quad n_{b4} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{l_x}\right) \left(1 + \frac{2y}{l_y}\right)$$

$$\mathbf{u}_b^T = [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ u_{z2} \ u_{x3} \ u_{y3} \ u_{z3} \ u_{x4} \ u_{y4} \ u_{z4}]$$

なお、 \mathbf{u}_b は、(3.6)式の \mathbf{u}_0 の1,2,3,4の節点変位成分に対応する。

(4.3)式を(4.1)式に代入すると、次式からバネ支床の剛性マトリックスが計算される。

$$\mathbf{k}_s = \int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}} \int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}} \mathbf{N}_b^T \mathbf{p}_s \mathbf{N}_b dx dy \quad (4.5)$$

上式は、解析的に積分が可能である。

以上より、要素にバネ支床がある場合は、(3.6)式の $\tilde{\mathbf{k}}$ の1,2,3,4節点自由度に対応する部分に、(4.5)式の \mathbf{k}_s を加えればよい。