

GFEM によるシェル要素の開発

GFEM では、節点数を変化させずに、要素の変位関数を高次化できるため、モデリングの負担を軽減できる。ここでは、GFEM の考え方を三角形平面シェル要素に適用し、要素形状のゆがみに対してロバストな新たな解析手法を提案する。平面シェル要素では、平面内の変形と面外の板曲げ変形を独立に扱えるため、ここでは、面内変形と曲げ変形に分離して、それぞれの要素剛性マトリックスを導出し、これらを組み合わせることでシェル要素の剛性マトリックスを導く。

1 面内変形要素の剛性マトリックスの導出

1.1 ひずみエネルギー関数

まず、面内変形では、要素内の任意点の変位を次式のように 2 次元化する。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(z) \end{aligned} \quad (1.1)$$

(1.1)式より、ひずみを求めると、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1.2)$$

また、均質等方性材料の歪み成分は、 $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ から $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ となるので、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.3)$$

となる。平面応力仮定の場合、さらに $\sigma_z = 0$ を仮定し、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (1.5)$$

となる。(1.4)式を応力成分に関して解くと、

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.6)$$

ここに、

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \end{aligned} \quad (1.7)$$

となる。この場合の歪みエネルギーは、

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_z \sigma_z d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (1.8)$$

となり、 σ_z が 0 であるため(1.5)式の ε_z の寄与項は 0 となる。

1.2 GFEM による形状関数

GFEM では、(1.1)式の右辺で定義される変位を次式で表す。ただし、ここでは、節点数 3 の三角形要素とする。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) (u_i + \bar{x}_i u_i^1 + \bar{y}_i u_i^2 + \bar{x}_i^2 u_i^3 + \bar{y}_i^2 u_i^4 + \bar{x}_i \bar{y}_i u_i^5) \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) (v_i + \bar{x}_i v_i^1 + \bar{y}_i v_i^2 + \bar{x}_i^2 v_i^3 + \bar{y}_i^2 v_i^4 + \bar{x}_i \bar{y}_i v_i^5) \end{aligned} \quad (1.9)$$

ここに、 $u_i, v_i, u_i^1, v_i^1, u_i^2, v_i^2, \dots, u_i^5, v_i^5$ は、 i 番目節点における未知係数、 N_i は次式を満足する重み関数である。

$$\sum_{i=1}^3 N_i = 1 \quad (1.10)$$

(1.10)式は、Partition of Unity (PU)条件と呼ばれる。ここでは、重み関数として、通常の有限要素法で用いられる面積座標で表した形状関数を用いる。また、(1.9)式の x, y は、要素内の適当な点を原点にとった局所座標を表し、 \bar{x}_i, \bar{y}_i は、 i 番目の節点を原点にとった座標で、 $\bar{x}_i = x - x_i$ 、 $\bar{y}_i = y - y_i$ である。ただし、 x_i, y_i は、 i 番目の節点の x, y 座標値である。

なお、(1.9)式の近似関数は、 x, y に関して 2 次の多項式となっているが、より低次の形状関数として、次式を用いることも可能である。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i u_i \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i v_i \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i (u_i + \bar{x}_i u_i^1 + \bar{y}_i u_i^2) \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i (v_i + \bar{x}_i v_i^1 + \bar{y}_i v_i^2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

(1.11)式は、0 次近似で、通常の設定要素と同じ仮定となる。(1.12)式は、1 次近似となる。

(1.9), (1.11), (1.12)式をベクトル・マトリックスで表示すると、

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathbf{N}(x, y) \mathbf{G}(x, y) \mathbf{U} \\ v(x, y) &= \mathbf{N}(x, y) \mathbf{G}(x, y) \mathbf{V} \end{aligned} \quad (1.13)$$

ここに、

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & & \\ & \mathbf{g} & \\ & & \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = [1], \quad \mathbf{u}_i = \{u_i\}, \quad \mathbf{v}_i = \{v_i\}$$

$$\mathbf{g} = [1 \ \bar{x}_i \ \bar{y}_i], \quad \mathbf{u}_i = [u_i \ u_i^1 \ u_i^2]^T, \quad \mathbf{v}_i = [v_i \ v_i^1 \ v_i^2]^T$$

$$\mathbf{g} = [1 \ \bar{x}_i \ \bar{y}_i \ \bar{x}_i^2 \ \bar{y}_i^2 \ \bar{x}_i \bar{y}_i], \quad \mathbf{u}_i = [u_i \ u_i^1 \ u_i^2 \ u_i^3 \ u_i^4 \ u_i^5]^T, \quad \mathbf{v}_i = [v_i \ v_i^1 \ v_i^2 \ v_i^3 \ v_i^4 \ v_i^5]^T$$

(1.14)

1.3 剛性マトリックスの導出

(1.13)式を(1.2)式に代入すると,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} \mathbf{U}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} \mathbf{V}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} \mathbf{V} + \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} \mathbf{U}$$

(1.15)

上式をまとめると,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} \\ \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} & \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \mathbf{Bd}^p$$

(1.16)

上式を(1.8)式に代入すると, 次式の剛性マトリックスが得られる。

$$\mathbf{k}^p = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

(1.17)

2 曲げ変形要素の剛性マトリックスの導出

2.1 ひずみエネルギー関数

図 2.1 に示すような座標系のもとで, 板中央面の z 軸方向変位を w とし, Mindlin-Reissner 理論の仮定が成り立つとすると, 板曲げ問題における板の任意点の変位 u, v, w は次式のように仮定できる。

$$u = z\theta_y(x, y), \quad v = -z\theta_x(x, y), \quad w = w(x, y)$$

(2.1)

ここに, w は z 軸方向のたわみを, θ_x, θ_y は x, y 軸まわりの回転角を表す (右ねじ方向が正)。

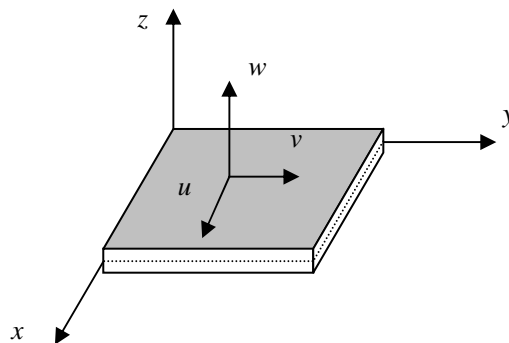


図 2.1 板の座標系と変位

上式をひずみ - 変位関係式に代入すると ,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる。また , 応力 - ひずみ関係式は次式となる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.3}$$

ここに ,

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa \left(\frac{1-\nu}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \end{aligned} \tag{2.4}$$

ただし , κ は面外せん断応力を板厚方向に一定と仮定したことを補正する係数で , Reissner によれば $\kappa = 5/6$, Mindlin によれば $\kappa = \pi^2/12$ である。

(2.2) , (2.3)式よりひずみエネルギーは次式で表される。

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \tag{2.5}$$

2.2 GFEM による形状関数

(1.13)式と同様に , GFEM では , (2.1)式の右辺で定義される変位を次式で表す。

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \mathbf{N}(x, y) \mathbf{G}(x, y) \mathbf{W} \\
 \theta_x(x, y) &= \mathbf{N}(x, y) \mathbf{G}(x, y) \boldsymbol{\Theta}_x \\
 \theta_y(x, y) &= \mathbf{N}(x, y) \mathbf{G}(x, y) \boldsymbol{\Theta}_y
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここに , $\mathbf{W}, \boldsymbol{\Theta}_x, \boldsymbol{\Theta}_y$ の定義は , (1.14)式の U, V の定義と同様である。ただし , (2.6)式の \mathbf{G} に関しては , w と θ_x, θ_y で次数を変えることもでき , シアーロッキングを防ぐためには , θ_x, θ_y に関する次数を w に関する次数よりも 1 次落とす方が有効であると考えられる。

2.3 剛性マトリックスの導出

(2.6)式を(2.2)式に代入すると ,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= z \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} \Theta_y \\
 \varepsilon_y &= -z \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} \Theta_x \\
 \gamma_{xy} &= -z \left(\frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} \Theta_x - \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} \Theta_y \right) \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} \mathbf{W} - \mathbf{NG} \Theta_x \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} \mathbf{W} + \mathbf{NG} \Theta_y
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

上式をまとめると,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & z \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -z \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -z \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} & z \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} \\ \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial y} & -\mathbf{NG} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial(\mathbf{NG})}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{NG} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W} \\ \Theta_x \\ \Theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}^b \tag{2.8}$$

上式を(2.5)式に代入すると, 次式の剛性マトリックスが得られる。

$$\mathbf{k}^b = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \tag{2.9}$$

3 平面シェル要素の剛性マトリックスと座標変換

弾性および弾塑性問題では, 要素剛性マトリックスは面内変形と板曲げ変形で連成しないので, それぞれ(1.17)式および(2.9)式で求められた要素剛性マトリックスを以下の自由度に対応するように組み合わせる。

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_i^0 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_i^m \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}_i^j = [u_i^j \quad v_i^j \quad w_i^j \quad \theta_{xi}^j \quad \theta_{yi}^j \quad \theta_{zi}^j]^T \tag{3.1}$$

ここに, m は 0 次近似の場合は 0 で, 1 次近似の場合は 2, 2 次近似の場合は 5 となる。(3.1)式の自由度順に並べ変えた要素剛性マトリックスを \mathbf{k} と表すことにする。

また, この場合, z 軸まわりの回転剛性に関しては, 0 次の項に関しては, Zienkiewicz らが提案している次式の仮想剛性を付加する。

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \alpha EtA \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \mathbf{k}^t \Theta_z \tag{3.2}$$

ここに, t は板厚, A は要素の面積, α は係数で, ここでは 0.03 に設定する。高次項に関する z 軸まわりの回転剛性は 0 とする。

要素剛性マトリックス \mathbf{k} は、要素固有の局所座標系で定義されたものであるから、これを全体座標系に変換する必要がある。この場合、全体座標系の要素剛性マトリックスを \mathbf{k}^G とすると、座標変換式は次式のように表される。

$$\mathbf{k}^G = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{k}} \mathbf{T} \quad (3.3)$$

ここに、

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & & \\ & \mathbf{T}_2 & \\ & & \mathbf{T}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_i^0 & & \\ & \mathbf{T}_i^1 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{T}_i^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_i^j = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_i^j \\ \mathbf{t}_i^j \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ただし、 l_x, m_x, n_x は、要素座標系の x 軸方向の方向余弦である。ここで、 \mathbf{t}_i^0 は通常有限要素法と同様であるから、次式で求められる。

$$\mathbf{t}_i^0 = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

しかしながら、高次項に関する座標変換マトリックス $\mathbf{t}_i^1, \dots, \mathbf{t}_i^m$ に関しては、(3.5)式とは異なるマトリックスとなる。例えば、これを図 3.1 に示すような簡単な例題で考えてみる。

図 3.1 に示す節点の変位関数が $v + v^1 x$ で与えられたとすると、 v^1 は θ_z に相当する。したがって、これを全体座標系に座標変換した場合、 v に関する座標変換と θ_z に関する座標変換は異なる。

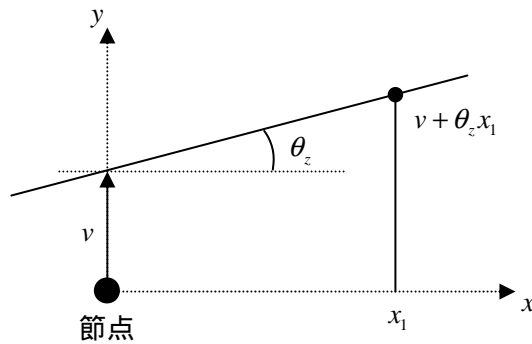


図 3.1 節点に関する変位関数

したがって、節点変位の高次項に関する座標変換は、次式の節点変位関数の座標変換から導く必要がある。

$$\mathbf{d}^L = \mathbf{t}_i^0 \mathbf{d}^G \quad (3.6)$$

ここに、 $\mathbf{d}^L, \mathbf{d}^G$ は、局所座標系および全体座標系における並進方向の節点変位関数を表し、次のようになる。

$$\mathbf{d}^L = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}(x, y) \mathbf{U} \\ \mathbf{G}(x, y) \mathbf{V} \\ \mathbf{G}(x, y) \mathbf{W} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}^G = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}(x^G, y^G) \mathbf{U}^G \\ \mathbf{G}(x^G, y^G) \mathbf{V}^G \\ \mathbf{G}(x^G, y^G) \mathbf{W}^G \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

ただし, x^G, y^G は, 全体座標系の座標値を表し, 局所座標系の x, y と次式の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{t}_i^0 \begin{Bmatrix} x^G \\ y^G \\ z^G \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

(3.6)式に(3.8)式を代入し, $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ と $\mathbf{U}^G, \mathbf{V}^G, \mathbf{W}^G$ の関係を求め, (3.1)式の順に自由度を並べかえることにより, 高次の節点変位関数に関する $\mathbf{t}_i^1, \dots, \mathbf{t}_i^m$ が求められる。