# 応力仮定法による８節点長方柱要素

ボクセル解析では，要素剛性マトリックスの計算は材料種別数分行えばよいので，要素はできるだけ精度の良いものを用いる方が有利である。そこで，ここでは，関口，菊池が提案している応力仮定法にもとづく要素を用いることにする。

応力仮定法では，応力を次式のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11}+c_{12}y+c_{13}z+c_{14}yz \\ c_{21}+c_{22}z+c_{23}x+c_{24}zx \\ c_{31}+c_{32}x+c_{33}y+c_{34}xy \\ c_{41}+c_{42}z \\ c_{51}+c_{52}x \\ c_{61}+c_{62}y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & z & yz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & x & zx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \\ c_{24} \\ c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \\ c_{34} \\ c_{41} \\ c_{42} \\ c_{51} \\ c_{52} \\ c_{61} \\ c_{62} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

上式を次式で表す。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_S \mathbf{c} \tag{2}$$

応力－歪関係式から歪を応力で表すと次式となる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_S \mathbf{c} \tag{3}$$

ここに，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は歪ベクトル，$\mathbf{D}$ は弾性マトリックスであり，次式で表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\} \tag{4}$$

$$
\mathbf{D}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}
1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\
 & & & & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\
 & \text{sym.} & & & & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}
\end{bmatrix} \tag{5}
$$

ここに，$E$ はヤング係数，$\nu$ はポアソン比である。

　歪ー変位関係は近似的に満たされるものとして，次のような重み付き残差式を満足するものとする。

$$
\int_{\Omega_e}\delta\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon}-\partial\mathbf{u})\,dxdydz=0 \tag{6}
$$

ここに，

$$
\partial\mathbf{u}=\begin{Bmatrix}
\partial u/\partial x \\
\partial v/\partial y \\
\partial w/\partial z \\
\partial u/\partial y+\partial v/\partial x \\
\partial v/\partial z+\partial w/\partial y \\
\partial w/\partial x+\partial u/\partial z
\end{Bmatrix} \tag{7}
$$

であり，$\mathbf{u}^T=\{u \quad v \quad w\}$ は変位ベクトル，また，

$$
\int_{\Omega_e}dxdydz=\int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}}\int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}}\int_{-\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}}dxdydz \tag{8}
$$

である。

　ここで，有限要素を図 1 に示す 8 節点長方柱要素とし，各節点の変位ベクトルを用いて要素内の変位を次式で仮定する。

$$
\mathbf{u}=\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}
N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\
0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\
0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8
\end{bmatrix}\mathbf{d}=\mathbf{N}\mathbf{d} \tag{8}
$$

ここに，

$$
\mathbf{d}^T=\{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \cdots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8\} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}\left(1-2x/l_x\right)\left(1-2y/l_y\right)\left(1-2z/l_z\right) & N_5 &= \frac{1}{8}\left(1-2x/l_x\right)\left(1-2y/l_y\right)\left(1+2z/l_z\right) \\
N_2 &= \frac{1}{8}\left(1+2x/l_x\right)\left(1-2y/l_y\right)\left(1-2z/l_z\right) & N_6 &= \frac{1}{8}\left(1+2x/l_x\right)\left(1-2y/l_y\right)\left(1+2z/l_z\right) \\
N_3 &= \frac{1}{8}\left(1+2x/l_x\right)\left(1+2y/l_y\right)\left(1-2z/l_z\right) & N_7 &= \frac{1}{8}\left(1+2x/l_x\right)\left(1+2y/l_y\right)\left(1+2z/l_z\right) \\
N_4 &= \frac{1}{8}\left(1-2x/l_x\right)\left(1+2y/l_y\right)\left(1-2z/l_z\right) & N_8 &= \frac{1}{8}\left(1-2x/l_x\right)\left(1+2y/l_y\right)\left(1+2z/l_z\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

このとき，(7)式の $\partial\mathbf{u}$ は次式で表される。

$$
\partial\mathbf{u} = \left[\left[B_1\right] \quad \left[B_2\right] \quad \cdots \quad \left[B_8\right]\right]\mathbf{d} = \mathbf{Bd} \tag{11}
$$

ここに,

$$
\left[B_i\right] = \begin{bmatrix}
\partial N_i/\partial x & 0 & 0 \\
0 & \partial N_i/\partial y & 0 \\
0 & 0 & \partial N_i/\partial z \\
\partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x & 0 \\
0 & \partial N_i/\partial z & \partial N_i/\partial y \\
\partial N_i/\partial z & 0 & \partial N_i/\partial x
\end{bmatrix} \tag{12}
$$

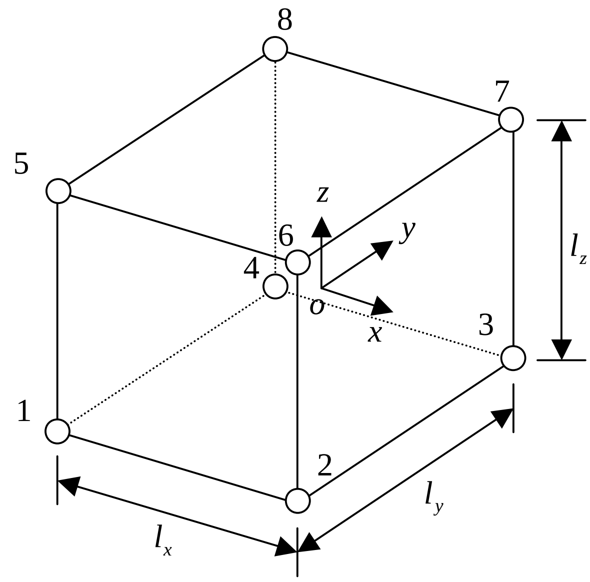


図１　８節点長方柱要素

なお，形状関数の微分は次式により計算される。

$$
\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{4l_x}\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right), \quad \frac{\partial N_1}{\partial y} = -\frac{1}{4l_y}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right), \quad \frac{\partial N_1}{\partial z} = -\frac{1}{4l_z}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)
$$

$$
\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{4l_x}\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right), \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} = -\frac{1}{4l_y}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right), \quad \frac{\partial N_2}{\partial z} = -\frac{1}{4l_z}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_3}{\partial x}=\frac{1}{4l_x}\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_3}{\partial y}=\frac{1}{4l_y}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_3}{\partial z}=-\frac{1}{4l_z}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_4}{\partial x}=-\frac{1}{4l_x}\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_4}{\partial y}=\frac{1}{4l_y}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_4}{\partial z}=-\frac{1}{4l_z}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_5}{\partial x}=-\frac{1}{4l_x}\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_5}{\partial y}=-\frac{1}{4l_y}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_6}{\partial z}=\frac{1}{4l_z}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_6}{\partial x}=\frac{1}{4l_x}\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_6}{\partial y}=-\frac{1}{4l_y}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_6}{\partial z}=\frac{1}{4l_z}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_7}{\partial x}=\frac{1}{4l_x}\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_7}{\partial y}=\frac{1}{4l_y}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_7}{\partial z}=\frac{1}{4l_z}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_8}{\partial x}=-\frac{1}{4l_x}\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_8}{\partial y}=\frac{1}{4l_y}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_8}{\partial z}=\frac{1}{4l_z}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(2),(3),(11)式を(6)式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\delta\boldsymbol{\sigma}^T\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\partial\mathbf{u}\right)dxdydz\\
&=\delta\mathbf{c}^T\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_S{}^T\left(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_S\mathbf{c}-\mathbf{B}\mathbf{d}\right)dxdydz=\delta\mathbf{c}^T\left(\mathbf{M}_S\mathbf{c}-\mathbf{M}_B\mathbf{d}\right)=0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_S&=\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_S\,dxdydz\\
\mathbf{M}_B&=\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{B}\,dxdydz
\end{aligned}
\tag{15}
$$

(14)式を応力の自由度 $\mathbf{c}$ に関して解くと次式が得られる。

$$
\mathbf{c}=\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B\mathbf{d}
\tag{16}
$$

(16)式を(3)式に代入すると，歪ベクトルが次式で表される。

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_S\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B\mathbf{d}=\overline{\mathbf{B}}\mathbf{d}
\tag{17}
$$

ここに，

$$
\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_S\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B
\tag{18}
$$

(17)式より，応力仮定法による要素の剛性マトリックスが次式から得られる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_e&=\int_{\Omega_e}\overline{\mathbf{B}}^T\mathbf{D}\overline{\mathbf{B}}dxdydz\\
&=\mathbf{M}_B{}^T\mathbf{M}_S{}^{-T}\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{D}^{-T}\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_S\,dxdydz\,\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B\\
&=\mathbf{M}_B{}^T\mathbf{M}_S{}^{-T}\mathbf{M}_S\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B=\mathbf{M}_B{}^T\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B
\end{aligned}
\tag{19}
$$

したがって, 要素剛性マトリックスを計算するには, $\mathbf{M}_B$ と $\mathbf{M}_S{}^{-1}$ を計算する必要がある。$\mathbf{M}_B$ と $\mathbf{M}_S$ を再記すると，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_B&=\int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}}\int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}}\int_{-\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{B}dxdydz\\
\mathbf{M}_S&=\int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}}\int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}}\int_{-\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_S\,dxdydz
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ここに，

$$
\mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} 1 & y & z & yz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & x & zx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix} \tag{21}
$$

$$
\mathbf{B} = \left[ [B_1] \quad [B_2] \quad \cdots \quad [B_8] \right], \qquad [B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial z \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial z & \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial z & 0 & \partial N_i/\partial x \end{bmatrix} \tag{22}
$$

$$
\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & \text{sym.} & & & & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{23}
$$

$$
\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & \text{sym.} & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \tag{24}
$$

なお，$\mathbf{M}_S^{-1}$ に関しては，Mathematica を用いることによって解析的に計算できる。