歪仮定法による８節点長方柱要素

ボクセル解析では，要素剛性マトリックスの計算は材料種別数分行えばよいので，要素はできるだけ精度の良いものを用いる方が有利である。そこで，ここでは，関口，菊池が提案している歪仮定法にもとづく要素を用いることにする。

歪仮定法では，歪を次式のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11}+c_{12}y+c_{13}z+c_{14}yz \\ c_{21}+c_{22}z+c_{23}x+c_{24}zx \\ c_{31}+c_{32}x+c_{33}y+c_{34}xy \\ c_{41}+c_{42}z \\ c_{51}+c_{52}x \\ c_{61}+c_{62}y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & z & yz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & x & zx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \\ c_{24} \\ c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \\ c_{34} \\ c_{41} \\ c_{42} \\ c_{51} \\ c_{52} \\ c_{61} \\ c_{62} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

上式を次式で表す。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N}_S \mathbf{c} \tag{2}$$

応力－歪関係式から応力は次式のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{N}_S \mathbf{c} \tag{3}$$

ここに，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力ベクトル，$\mathbf{D}$ は弾性マトリックスであり，次式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\} \tag{4}$$

$$\mathbf{D}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & \text{sym.} & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{5}$$

ここに，E はヤング係数，ν はポアソン比である。

歪ー変位関係は近似的に満たされるものとして，次のような重み付き残差式を満足するものとする。

$$\int_{\Omega_e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^T (\boldsymbol{\varepsilon}-\partial\mathbf{u})\, dxdydz = 0 \tag{6}$$

ここに，

$$\partial\mathbf{u}=\begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial w/\partial z \\ \partial u/\partial y+\partial v/\partial x \\ \partial v/\partial z+\partial w/\partial y \\ \partial w/\partial x+\partial u/\partial z \end{Bmatrix} \tag{7}$$

であり，$\mathbf{u}^T=\{u \quad v \quad w\}$ は変位ベクトル，また，

$$\int_{\Omega_e} dxdydz = \int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}}\int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}}\int_{-\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}} dxdydz \tag{8}$$

である。

ここで，有限要素を図 1 に示す８節点長方柱要素とし，各節点の変位ベクトルを用いて要素内の変位を次式で仮定する。

$$\mathbf{u}=\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}\mathbf{d}=\mathbf{Nd} \tag{8}$$

ここに，

$$\mathbf{d}^T=\{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \cdots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8\} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1-2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_5 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1-2y/l_y)(1+2z/l_z)\\
N_2 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1-2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_6 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1-2y/l_y)(1+2z/l_z)\\
N_3 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1+2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_7 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1+2y/l_y)(1+2z/l_z)\\
N_4 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1+2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_8 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1+2y/l_y)(1+2z/l_z)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

このとき，(7)式の $\partial\mathbf{u}$ は次式で表される。

$$
\partial\mathbf{u} = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & \cdots & [B_8] \end{bmatrix}\mathbf{d} = \mathbf{Bd} \tag{11}
$$

ここに，

$$
[B_i] = \begin{bmatrix}
\partial N_i/\partial x & 0 & 0\\
0 & \partial N_i/\partial y & 0\\
0 & 0 & \partial N_i/\partial z\\
\partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x & 0\\
0 & \partial N_i/\partial z & \partial N_i/\partial y\\
\partial N_i/\partial z & 0 & \partial N_i/\partial x
\end{bmatrix} \tag{12}
$$

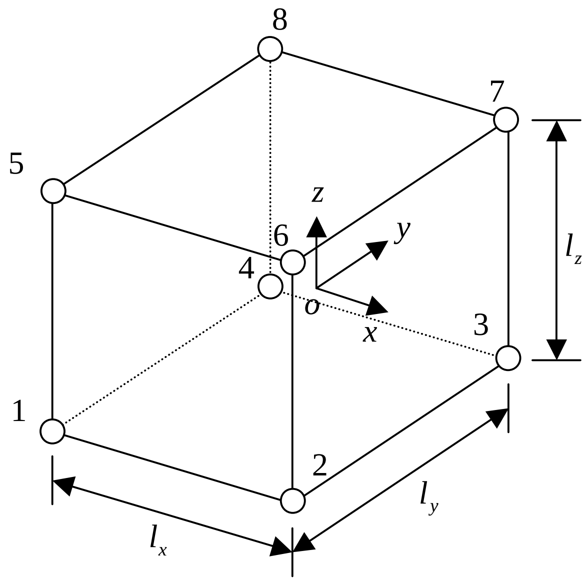

図１　８節点長方柱要素

なお，形状関数の微分は次式により計算される。

$$
\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{4l_x}\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad
\frac{\partial N_1}{\partial y} = -\frac{1}{4l_y}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad
\frac{\partial N_1}{\partial z} = -\frac{1}{4l_z}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)
$$

$$
\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{4l_x}\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad
\frac{\partial N_2}{\partial y} = -\frac{1}{4l_y}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad
\frac{\partial N_2}{\partial z} = -\frac{1}{4l_z}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_3}{\partial x}=\frac{1}{4l_x}\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_3}{\partial y}=\frac{1}{4l_y}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_3}{\partial z}=-\frac{1}{4l_z}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_4}{\partial x}=-\frac{1}{4l_x}\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_4}{\partial y}=\frac{1}{4l_y}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_4}{\partial z}=-\frac{1}{4l_z}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_5}{\partial x}=-\frac{1}{4l_x}\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_5}{\partial y}=-\frac{1}{4l_y}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_6}{\partial z}=\frac{1}{4l_z}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_6}{\partial x}=\frac{1}{4l_x}\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_6}{\partial y}=-\frac{1}{4l_y}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_6}{\partial z}=\frac{1}{4l_z}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1-\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_7}{\partial x}=\frac{1}{4l_x}\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_7}{\partial y}=\frac{1}{4l_y}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_7}{\partial z}=\frac{1}{4l_z}\left(1+\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\\
&\frac{\partial N_8}{\partial x}=-\frac{1}{4l_x}\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_8}{\partial y}=\frac{1}{4l_y}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2z}{l_z}\right),\quad \frac{\partial N_8}{\partial z}=\frac{1}{4l_z}\left(1-\frac{2x}{l_x}\right)\left(1+\frac{2y}{l_y}\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(2),(3),(11)式を(6)式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}^T\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\partial\mathbf{u}\right)dxdydz\\
&=\delta\mathbf{c}^T\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{D}^T\left(\mathbf{N}_S\mathbf{c}-\mathbf{B}\mathbf{d}\right)dxdydz=\delta\mathbf{c}^T\left(\mathbf{M}_S\mathbf{c}-\mathbf{M}_B\mathbf{d}\right)=0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_S&=\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{D}^T\mathbf{N}_S\,dxdydz\\
\mathbf{M}_B&=\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{D}^T\mathbf{B}\,dxdydz
\end{aligned}
\tag{15}
$$

(14)式を応力の自由度$\mathbf{c}$に関して解くと次式が得られる。

$$
\mathbf{c}=\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B\mathbf{d}
\tag{16}
$$

(16)式を(3)式に代入すると，歪ベクトルが次式で表される。

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{N}_S\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B\mathbf{d}=\bar{\mathbf{B}}\mathbf{d}
\tag{17}
$$

ここに，

$$
\bar{\mathbf{B}}=\mathbf{N}_S\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B
\tag{18}
$$

(17)式より，応力仮定法による要素の剛性マトリックスが次式から得られる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_e&=\int_{\Omega_e}\bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}dxdydz\\
&=\mathbf{M}_B{}^T\mathbf{M}_S{}^{-T}\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{D}\mathbf{N}_S\,dxdydz\,\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B\\
&=\mathbf{M}_B{}^T\mathbf{M}_S{}^{-T}\mathbf{M}_S\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B=\mathbf{M}_B{}^T\mathbf{M}_S{}^{-1}\mathbf{M}_B
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ただし，$\mathbf{D}=\mathbf{D}^T$を仮定している。

したがって，要素剛性マトリックスを計算するには，$\mathbf{M}_B$と$\mathbf{M}_S{}^{-1}$を計算する必要がある。$\mathbf{M}_B$と$\mathbf{M}_S$を再記すると，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_B&=\int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}}\int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}}\int_{-\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dxdydz\\
\mathbf{M}_S&=\int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}}\int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}}\int_{-\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}}\mathbf{N}_S{}^T\mathbf{D}\mathbf{N}_S\,dxdydz
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ここに，

$$\mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} 1 & y & z & yz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & x & zx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & \cdots & [B_8] \end{bmatrix}, \qquad [B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial z \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial z & \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial z & 0 & \partial N_i/\partial x \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & \text{sym.} & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{23}$$

なお，$\mathbf{M}_S^{-1}$ に関しては，Mathematica を用いることによって解析的に計算できる。