

ボクセル有限要素法を用いたトポロジー最適化

1 トポロジー解析に用いられる弾性マトリックスに関する考察

均質化設計法 (HDM) による構造物のトポロジー最適化問題では、構造物を含む拡張された領域が多孔質材料からなると仮定し、この多孔質材料の孔の大きさを設計変数として構造物の最適な位相を求める。これは、材料の ON/OFF 問題を感度解析が可能な問題にするために有効な手法である。この場合、多孔質体のマクロ的な弾性マトリックスは均質化法によって計算される。

しかしながら、この方法を 3 次元のボクセル解析に適用すると、設計変数が 1 要素につき 3 となり、穴の大きさが変化すると剛性マトリックスを再計算する必要がある。したがって、この均質化弾性マトリックスを要素密度の関数として表すことができれば、設計変数が 1 要素につき 1 となり、剛性マトリックスの再計算が必要ないため大幅な計算効率の改善が期待できる。

そこでここでは、まず、平面応力問題を対象として、多孔質体の穴を正方形として、均質化弾性マトリックスを密度のべき乗関数で近似することを考える。なお、平面応力問題の弾性マトリックスは次式で表される。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

また、正方形孔ユニットセルの均質化弾性マトリックスを次式のように表す。

$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} D_{11}^H & D_{12}^H & 0 \\ D_{12}^H & D_{11}^H & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^H \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

均質化弾性マトリックス成分は、2 次元の均質化法で求める。また、実際の解析 (Opti-Shape) では、以下のような形で中間剛性にペナルティーが課されている (Suzuki によって提案された)。

$$\bar{\mathbf{D}}^H = \begin{bmatrix} \left(\frac{D_{11}^H}{D_{11}}\right)^2 D_{11}^H & \left(\frac{D_{12}^H}{D_{12}}\right)^2 D_{12}^H & 0 \\ \left(\frac{D_{12}^H}{D_{12}}\right)^2 D_{12}^H & \left(\frac{D_{11}^H}{D_{11}}\right)^2 D_{11}^H & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{D_{33}^H}{D_{33}}\right)^2 D_{33}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11}^H & \bar{D}_{12}^H & 0 \\ \bar{D}_{12}^H & \bar{D}_{11}^H & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_{33}^H \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

以上の均質化弾性マトリックスを次式の密度比のべき乗関数を係数とする弾性マトリックスで近似する。

$$\mathbf{D}^p = \rho^p \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (1.4)$$

ここに、 ρ は質量密度比 ($1-a^2$, a はユニットセルの穴の寸法), p はべき乗係数である。

まず、このべき乗係数を 2 とした場合の結果を図 1.1 に示す。なお、べき乗係数 2 は Young and Chuang(1993)によって用いられている。図中の HM は均質化法による(2)式の値, Suzuki は(3)式の

値, Power は(1.4)式の値を示している。

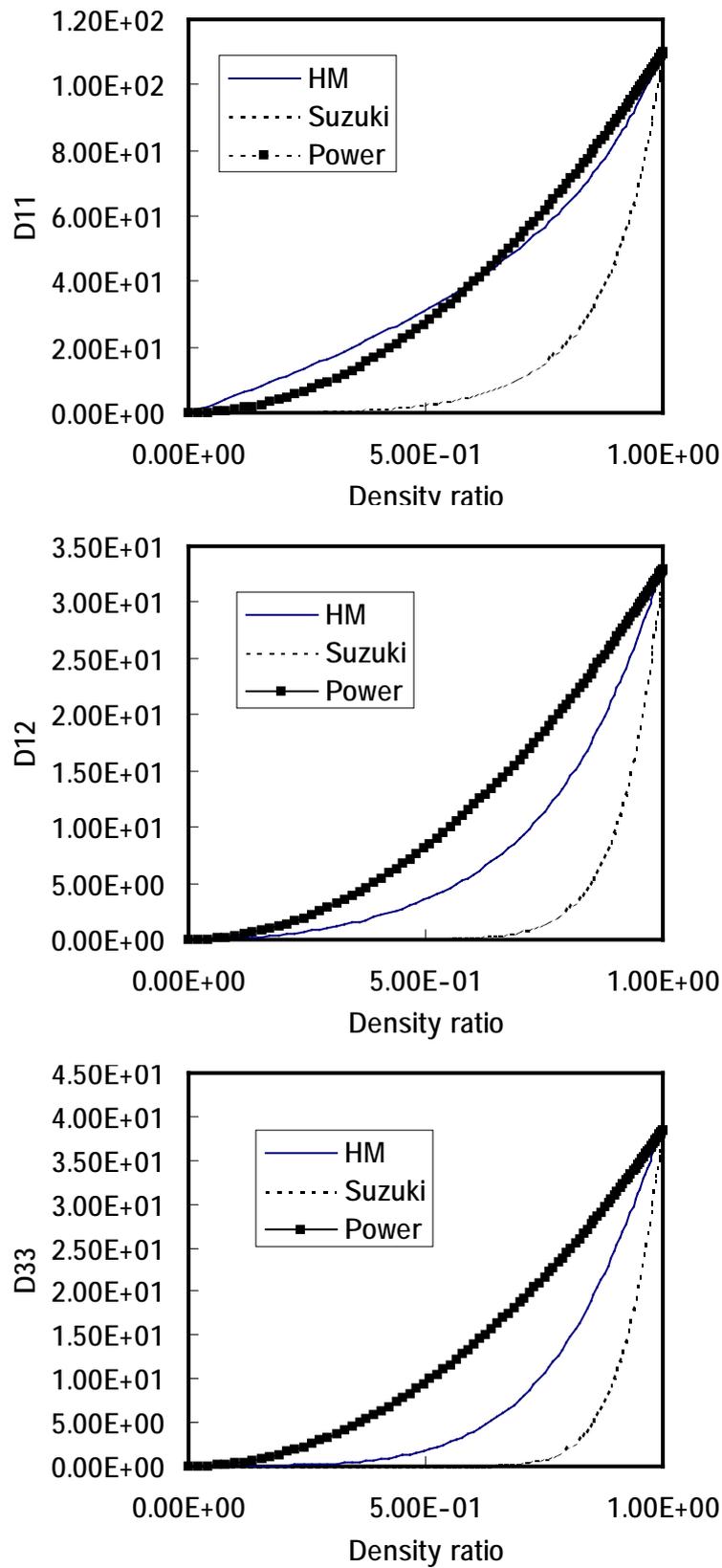


図 1.1 密度比と弾性マトリックス成分の関係 ($p=2$)

図 1.1 より, この場合は, D_{11} に関する値のみが, べき乗法と均質化法で近い値になっている。

Suzuki の値に近づけるためには, (1.4)式の p を 7 に設定する必要がある。この場合の結果を図 2 に示す。

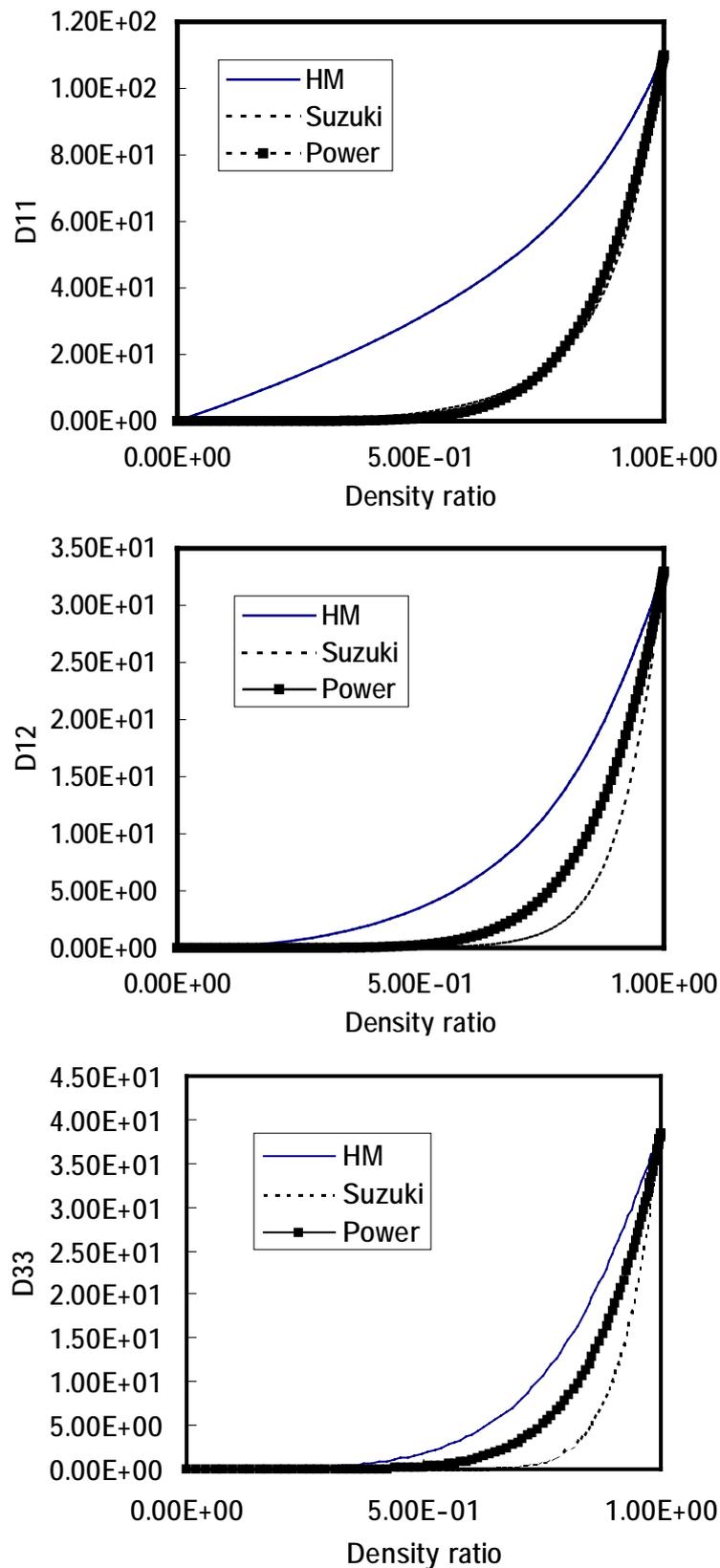


図 1.2 密度比と弾性マトリックス成分の関係 ($p=7$)

図 1.2 より, この場合も D_{11} に関するものは, べき乗法と Suzuki のペナルティー法の値は近くなる

が、 D_{12}, D_{33} の項は、Suzuki の値よりも大きくなっている。 D_{12}, D_{33} を Suzuki の値と合わせるためには、 $p=10$ に設定する必要がある。この場合の結果を図 1.3 に示す。

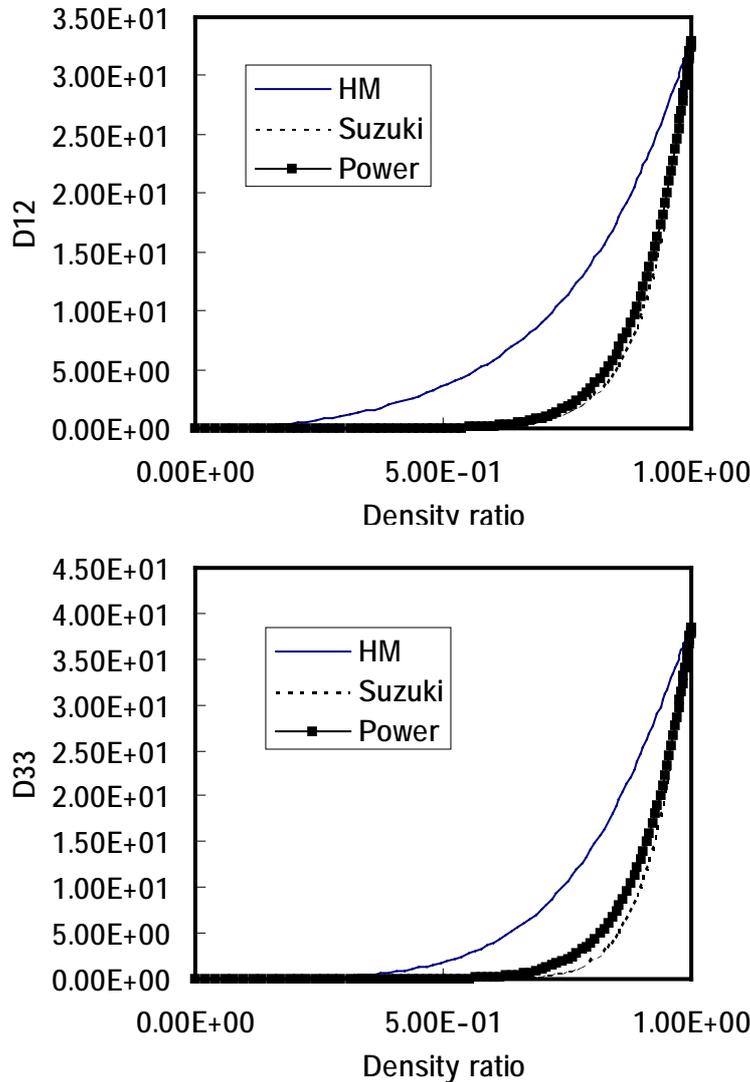


図 1.3 密度比と弾性マトリックス成分の関係 ($p=10$)

以上からわかるように、数値計算に利用されている均質化弾性マトリックス成分（Suzuki モデル）をべき乗法で再現しようとするならば、直応力に関する対角成分、非対角成分、およびせん断応力に関する成分を分離して表現し、それぞれに異なるべき乗係数を掛ける必要がある。

このことを実現するには、弾性マトリックスを 3 つに分けて、それぞれに対する剛性マトリックスを求め、これらの剛性マトリックスにそれぞれ異なるべき乗係数を用いればよい。しかし、直応力に関する成分は剛性マトリックス内で積の形で絡み合うので分離できない。そこで、ここでは、直応力に関する成分とせん断応力に関する成分のみを分離して、それぞれに異なる係数を掛けるものとする。

すでに説明した応力仮定法による要素では、弾性マトリックスと関係するのは、 \mathbf{M}_s^{-1} であるので、これを分離すればよい。このとき、有限要素の密度を ρ とすると、要素剛性マトリックスは次式によって計算される。

$$\mathbf{K}_e = \rho^p \mathbf{K}_e^P + \rho^q \mathbf{K}_e^S \quad (1.5)$$

ここに、 $\mathbf{K}_e^p, \mathbf{K}_e^s$ は、それぞれ直応力に関する剛性マトリックスとせん断応力に関する剛性マトリックスであり、 p, q はそれぞれに関するべき乗係数である。

なお、以上の例は 2 次元問題の場合であり、3 次元問題に関しては別途係数を調査する必要がある。

2 最適性規準法によるトポロジー最適化

最適化問題の解法としては様々のものがあるが、設計変数の多い複雑な問題に対しては、最適性規準法と逐次線形計画法がよく用いられている。この二つの方法にはそれぞれ特徴があり、最適性規準法では、設計変数が多くなっても収束が非常に速いというメリットがある反面、それぞれの問題に対して最適性規準を定式化する必要があることや、制約条件の扱いが難しい、凸関数条件が満足されないと収束解が得られないなどの問題がある。これに対して、逐次線形計画法は、どのような問題に対しても簡単に適用できる点、制約条件を簡単に考慮できる点、凸関数条件が満足されなくても解が発散しないのでロバスト性が高い等のメリットがある反面、解が振動して、解の振動幅を設定して強制的に収束させないと解が求まらない場合が多いことや、このため最適性規準法に比較して収束が遅いという点、対称問題であっても非対称の位相が得られたりする点などの問題がある。

3 次元解析においては、自由度数が非常に多くなり、1 回の連立方程式の解を求めるのに非常に時間がかかるため、収束の速い（繰り返し回数の少ない）最適性規準法が有利であると考えられる。そこでここでは、最適化問題の解法として最適性規準法を採用することにする。

密度法による 3 次元ボクセル解析における位相最適化問題は次式のように定式化される。

$$\min_{\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{L}} [\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}] \quad \mathbf{L} = \left\{ \boldsymbol{\rho} \mid 0 \leq \rho_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \quad \sum_{i=1}^N \rho_i \leq m_s \right\} \quad (2.1)$$

ここに、 $\boldsymbol{\rho}$ は設計変数 $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$ で、 ρ_i は i 番目要素の密度比を表し、 N は有限要素数である。また、(2.1) 式の \mathbf{d} は節点変位ベクトル、 \mathbf{K} は全体剛性マトリックス、 \mathbf{L} は与えられた条件を満たす許容設計変数の集合、 m_s は密度比の制約値である。ここで、全体剛性マトリックス \mathbf{K} は、要素密度比の関数として次式のように表される。

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \sum_{i=1}^N \left(\rho_i^p \mathbf{K}_{ei}^p + \rho_i^q \mathbf{K}_{ei}^s \right) \quad (2.2)$$

ここに、 \mathbf{A} は要素の重ね合わせを表す記号、 \mathbf{K}_{ei}^p は i 番目要素の直応力に関する要素剛性マトリックス、 \mathbf{K}_{ei}^s はせん断応力に関する要素剛性マトリックスである。また、 p, q はべき乗係数で定数である。なお、(2.1) 式の $\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}$ は外力の仕事量である平均コンプライアンスを表しており、次式のように表しておく。

$$C(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{d} \quad (2.3)$$

最適性規準法では、まず Lagrangian を定義する。この場合次式となる。

$$L(\boldsymbol{\rho}) = C(\boldsymbol{\rho}) - \Lambda \left(\sum_{i=1}^N \rho_i - m_s \right) \quad (2.4)$$

ここに、 Λ はラグランジェ乗数で、 $\Lambda \leq 0$ となる。

次に、(2.4) 式を設計変数に関して変分をとることにより、最適性規準を求める。この場合次式となる。

$$\begin{aligned}\delta L(\boldsymbol{\rho}) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial C(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \delta \rho_i - \Lambda \sum_{i=1}^N \delta \rho_i + \left(\sum_{i=1}^N \rho_i - m_S \right) \delta \Lambda \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial C(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} - \Lambda \right) \delta \rho_i + \left(\sum_{i=1}^N \rho_i - m_S \right) \delta \Lambda = 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

(2.5)式より， $\delta \rho_i (i=1, \dots, N), \delta \Lambda$ の任意性から次式が成り立つ。

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial C(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = 1 \quad (i=1, \dots, N) \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{m_S} \sum_{i=1}^N \rho_i = 1 \quad (2.7)$$

(2.6)式より次式の関係を作ることができる。

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial C(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \right]^\alpha = 1 &\Rightarrow \left[\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial C(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \right]^\alpha = \frac{\rho_i}{\rho_i} \\ \Rightarrow \rho_i^{(k+1)} &= \left[\frac{1}{\Lambda^{(k)}} \frac{\partial C(\boldsymbol{\rho}^{(k)})}{\partial \rho_i^{(k)}} \right]^\alpha \rho_i^{(k)} \quad (i=1, \dots, N)\end{aligned}\quad (2.8)$$

ここに， α はべき乗係数で，0.85 がよいとされている。同様に，

$$\Lambda^{(k+1)} = \left[\frac{1}{m_S} \sum_{i=1}^N \rho_i^{(k)} \right]^\alpha \Lambda^{(k)} \quad (2.9)$$

ただし， ρ_i, Λ には次式の制約条件があるので，

$$0 \leq \rho_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \quad \Lambda \leq 0 \quad (2.10)$$

(2.8)，(2.9)，(2.10)式より，次式の最適性条件が得られる。

$$\rho_i^{(k+1)} = \min \left\{ \max \left\{ 0, \left[\frac{1}{\Lambda^{(k)}} \frac{\partial C(\boldsymbol{\rho}^{(k)})}{\partial \rho_i^{(k)}} \right]^\alpha \rho_i^{(k)} \right\}, 1 \right\} \quad (2.11)$$

$$\Lambda^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[\frac{1}{m_S} \sum_{i=1}^N \rho_i^{(k)} \right]^\alpha \Lambda^{(k)} \right\} \quad (2.12)$$

(2.11)式には，さらに設計変数の変動幅の制約（move limit）を課す。ここで，

$$s_i^{(k)} = \left[\frac{1}{\Lambda^{(k)}} \frac{\partial C(\boldsymbol{\rho}^{(k)})}{\partial \rho_i^{(k)}} \right]^\alpha \rho_i^{(k)} \quad (2.13)$$

とおくと，この変動幅の制約は次のように書ける（Suzuki and Kikuchi, 1991）。

$$\rho_i^{(k+1)} = \begin{cases} \max \{ (1-\zeta) \rho_i^{(k)}, 0 \} & \text{if } s_i^{(k)} \leq \max \{ (1-\zeta) \rho_i^{(k)}, 0 \} \\ s_i^{(k)} & \text{if } \max \{ (1-\zeta) \rho_i^{(k)}, 0 \} \leq s_i^{(k)} \leq \min \{ (1+\zeta) \rho_i^{(k)}, 1 \} \\ \min \{ (1+\zeta) \rho_i^{(k)}, 1 \} & \text{if } \min \{ (1+\zeta) \rho_i^{(k)}, 1 \} \leq s_i^{(k)} \end{cases} \quad (2.14)$$

ここに， ζ は変動幅の制約値（move limit）である。

さらに，Suzuki and Kikuchi (1991)の論文では，(2.11)，(2.12)式を次のように置いている。

$$\rho_i^{(k+1)} = \min \left\{ \max \left\{ 0, \left[\frac{1}{\Lambda^{(k+1)}} \frac{\partial C(\mathbf{p}^{(k)})}{\partial \rho_i^{(k)}} \right]^\alpha \rho_i^{(k)}, 1 \right\} \right\} \quad (2.15)$$

$$\Lambda^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[\frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N \rho_i^{(k+1)} \right]^\alpha \Lambda^{(k)} \right\} \quad (2.16)$$

そして、改修計算の内側のループで、(2.16)式の $\Lambda^{(k)}$ と $\Lambda^{(k+1)}$ が等しくなるように(2.15)、(2.16)式を繰り返し計算している。ただし、 $\rho_i^{(k)}$ はこのループ内で同じ値にしておく（更新しない）必要がある。

なお、平均コンプライアンス C の密度比 ρ_i に関する感度係数は次式のように求められる。

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = \frac{\partial(\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d})}{\partial \rho_i} = \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{d} - 2\mathbf{d}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \rho_i} \quad (2.17)$$

ただし、変位ベクトル \mathbf{d} は次式の剛性方程式

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (2.18)$$

の解であるから、(2.18)式の両辺を密度比 ρ_i で偏微分すると、

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \rho_i} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{d} \quad (2.19)$$

となるので、これを(2.17)式に代入すると、

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = -\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{d} \quad (2.20)$$

ここで、 ρ_i は i 番目要素の密度比であるから、(2.2)式より(2.20)式は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \rho_i} &= -\mathbf{d}_{ei}^T \frac{\partial(\rho_i^p \mathbf{K}_{ei}^p + \rho_i^q \mathbf{K}_{ei}^s)}{\partial \rho_i} \mathbf{d}_{ei} \\ &= -\mathbf{d}_{ei}^T (p \rho_i^{p-1} \mathbf{K}_{ei}^p + q \rho_i^{q-1} \mathbf{K}_{ei}^s) \mathbf{d}_{ei} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ここに、 \mathbf{d}_{ei} は i 番目要素の節点変位ベクトルである。

3 Gravity Control 法によるチェッカーボード解の改善

密度法ボクセル解析によるトポロジー最適化では、応力仮定法の要素を用いても、各所に要素密度が交互に0と1となるチェッカーボード状の位相が現れる。これを抑えるために、筆者らが提案している Gravity Control 法（重力制御法）を適用する。

ボクセル解析における重力制御法は、まず i 番目の要素と面を共有する要素との密度比の関係から次式のような関数を定義する。

$$g_i = \sum_{j=1}^{m_i} [\rho_i \rho_j + (1 - \rho_i)(1 - \rho_j)] \quad (3.1)$$

ここに、 m_i は i 番目の要素と面を共有する要素で、内部の要素では6、端や隅の要素ではそれ以下となる。図3.1は、2次元問題で、密度比が1, 0.5, 0となる場合について、この関数値を示したものである。図からわかるように、この関数値は、 i 番目要素が黒で周辺要素が白の場合、または i 番目要素が白で周辺要素が黒の場合が最も低い値となる。チェッカーボード状の解は、このパターンに相当するので、この関数値が高い値になればチェッカーボードは防げる。また、この関数

の特徴として、グレースケール（密度比が 0.5 の場合）にもペナルティーが課され、すべてグレーの値は、すべて黒またはすべて白よりも低い値となる。したがって、この関数値が高くなれば、チェッカーボード解を防ぐだけでなく、中間的密度のより少ないトポロジーを得ることができる。

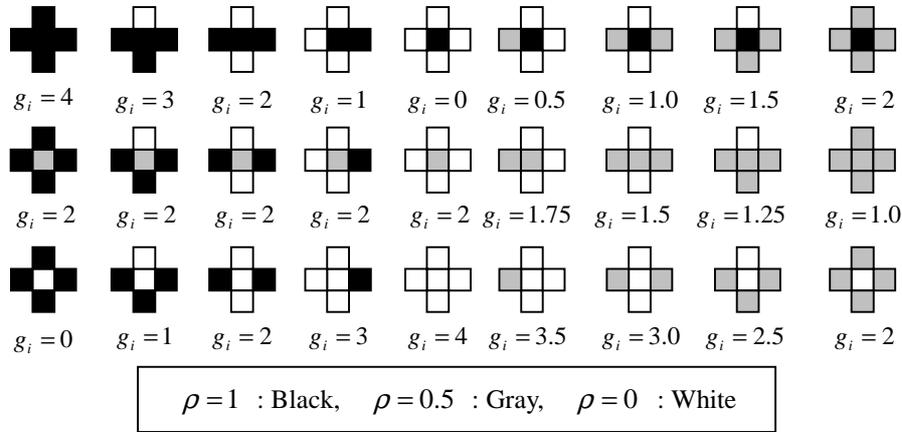


図 3.1 i 要素とその近隣要素の密度比と関数 g_i 値の関係

そこで、(3.1)式の関数値をすべての要素に関して計算し、これを総和した重力制御関数を次式のように定義する。

$$G = \sum_{i=1}^N g_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} [\rho_i \rho_j + (1 - \rho_i)(1 - \rho_j)] \quad (3.2)$$

ここに、 N は有限要素総数である。なお“重力制御関数”という名前は、(2)式が密度を集約する働きがあるところから名付けている。

(3.2)式の値を大きくするために、(2)式を目的関数に重み係数を付けて付加する。そして、次式のような目的関数を定義する。

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{C(\boldsymbol{\rho})^2 - (w_g \bar{C} \tilde{G}(\boldsymbol{\rho}))^2}, \quad \tilde{G}(\boldsymbol{\rho}) = G(\boldsymbol{\rho}) / \sum_{i=1}^N m_i \quad (3.3)$$

ここに、 C は平均コンプライアンス、 w_g は重み係数、 \bar{C} は C と同じ値をもつスケール係数 ($\boldsymbol{\rho}$ に関する感度は 0)、 $\tilde{G}(\boldsymbol{\rho})$ はスケールされた重力制御関数 (1 以下) である。

(3.3)式的设计変数 ρ_i に関する感度係数は次式から求められる。

$$\frac{f(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = \frac{1}{\sqrt{C(\boldsymbol{\rho})^2 - (w_g \bar{C} \tilde{G}(\boldsymbol{\rho}))^2}} \left\{ C(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial C(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} - (w_g \bar{C})^2 \tilde{G}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \tilde{G}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \right\} \quad (3.4)$$

ここに、

$$\frac{\partial \tilde{G}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} (2\rho_j - 1)}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (3.5)$$

次に、面を共有する要素の求め方について考える。開発中のプログラムに用いている要素分割ルールより、各軸状の位置の情報が次のように得られる。


```

c
  i  = int(n/(nx*ny)) + 1
  mi = mod(n,nx*ny)
  if( mi.eq.0 ) i = int(n/(nx*ny))
  n1 = n - nx*ny*(i-1)
  j  = int(n1/nx) + 1
  mj = mod( n1,nx )
  if( mj.eq.0 ) j = int(n1/nx)
  k  = n1 - nx*(j-1)
c

```

以上の i, j, k が x, y, z 軸状の分割位置を与えるので、これから面を共有する要素は以下の位置にあることがわかる。

$i-1, j, k$	$i+1, j, k$	where $i-1 > 0$ and $i+1$	nz
$i, j-1, k$	$i, j+1, k$	where $j-1 > 0$ and $j+1$	ny
$i, j, k-1$	$i, j, k+1$	where $k-1 > 0$ and $k+1$	nx

以上の情報を in, jn, kn とすれば、逆に要素番号を以下の式から割り出せる。

$$n = ny*nx*(in-1)+nx*(jn-1)+kn$$

以上のようにすれば、簡単に各要素の面を共有する要素を見つけることができる。

4 重力制御フィルタリングの効果

ボクセル有限要素法における重力制御フィルタリングの効果をも MBB はりの解析モデルを用いて検証する。図 4.1 は MBB はりの解析モデルを示している。ただし、解析は対称性を利用して左半分の領域で行った。有限要素数は $300 \times 100 \times 2$ の 6000 要素である。また、質量制約は 50% としている。図 4.2 は、重力制御関数の重みを変化させた場合のトポロジー解析結果を示している。図より、重みを上げるにしたがって、グレースケール領域が小さくなるのがわかる。

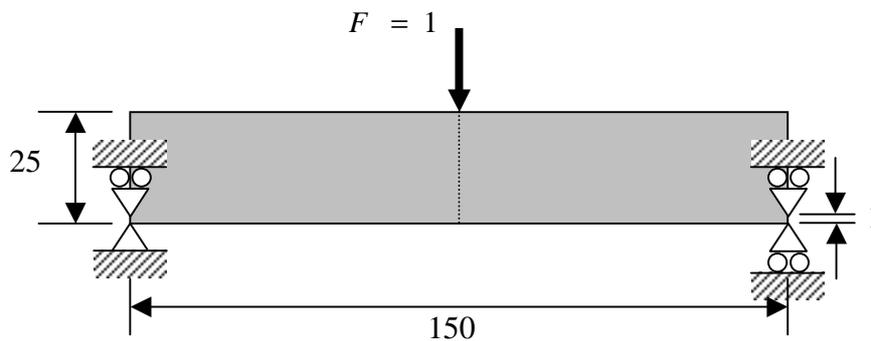


図 4.1 MBB はりの解析例

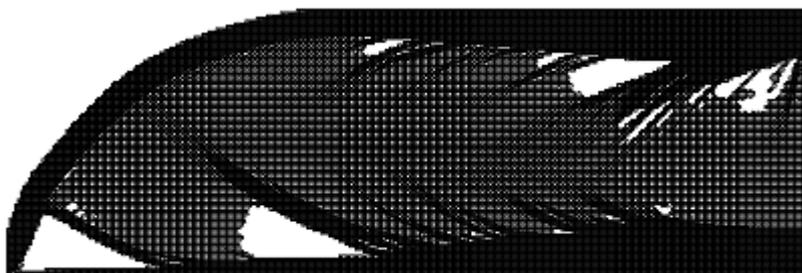


図 4.2(a) 解析結果 ($w_g = 0$, $C = 97.01$)



図 4.2(b) 解析結果 ($w_g = 0.002$, $C = 72.31$)



図 4.2(c) 解析結果 ($w_g = 0.003$, $C = 92.41$)



図 4.2(d) 解析結果 ($w_g = 0.004$, $C = 73.72$)



図 4.2(e) 解析結果 ($w_g = 0.005$, $C = 78.97$)



図 4.2(f) 解析結果 ($w_g = 0.006$, $C = 94.76$)



図 4.2(g) 解析結果 ($w_g = 0.008$, $C = 89.83$)