

平面シェル要素を用いた弾塑性解析

平面シェル要素を用いたシェル構造の弾塑性解析は、幾何学的非線形解析のレポートに示した弾性剛性マトリックスの応力 - ひずみ関係マトリックスを、塑性を考慮したものに変更するだけでよいのでプログラミングは比較的簡単である。ただし、これはひずみ硬化や除荷を考慮しない場合のことである。また、幾何学的非線形を考慮しない場合は荷重増分法を用いることができる。

ここでは、解析法の検証や有限要素法の初等教育を目的として、単純で明解なプログラムを作成する。要素剛性マトリックスの定式化に関しては、幾何学的非線形解析のレポートに示しているのでここでは省略する。

降伏条件としては、等方性材料を仮定し、von Mises の降伏条件を用いる。この場合、降伏関数は次式で定義される。

$$f = \bar{\sigma} \quad (1.1)$$

ここに、 $\bar{\sigma}$ は相当応力で、平面応力問題の場合次式で定義される。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (1.2)$$

(1.1)式の降伏関数 f がある値 c に達したときに材料が降伏すると考える。

塑性ポテンシャル理論によれば、塑性ひずみ増分と塑性応力増分を関係づける塑性応力 - ひずみマトリックス \mathbf{D}^{ep} は次式で定義される。

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \mathbf{D}^p \quad (1.3)$$

ここに、 \mathbf{D}^e は弾性成分、 \mathbf{D}^p は塑性成分であり、平面応力問題の場合それぞれ次式で表される。

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \text{SYM.} \\ \nu & 1 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^p = \begin{bmatrix} \frac{S_1^2}{S} & & \text{SYM.} \\ \frac{S_1 S_2}{S} & \frac{S_2^2}{S} & \\ \frac{S_1 S_6}{S} & \frac{S_2 S_6}{S} & \frac{S_6^2}{S} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

ただし、

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'_x + \nu \sigma'_y), \quad S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \sigma'_x + \sigma'_y), \quad S_6 = \frac{E}{1+\nu} \tau_{xy} = 2G\tau_{xy} \quad (1.5)$$

$$\sigma'_x = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}, \quad \sigma'_y = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3} \quad (1.6)$$

ここに、 E はヤング係数、 ν はポアソン比、 G はせん断弾性係数である。

したがって、プログラムの際には、荷重を除々に増加して行って、各要素で(1.2)式の相当応力を計算し、この値が c を超えたならば応力 - ひずみ関係式を \mathbf{D}^e から \mathbf{D}^{ep} に置き換えればよい。ただし、荷重増分幅が一定の場合 $f = c$ は厳密には成り立たないので、荷重増分のやり方には大きく、 r_{\min} 法、換算弾性係数法、Newton-Raphson 反復解法の3種の方法が提案されている。ここでは、より一般的な解法である Newton-Raphson 反復解法を採用する。

プログラムのアルゴリズムは次のとおりである。まず、荷重増分ベクトル $\Delta \mathbf{F}$ を以下のように定

める。

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta \lambda \mathbf{F} \quad (1.7)$$

ここに， $\Delta \lambda$ は荷重増分倍率で 1/100 ~ 1/1000 程度に設定する。

第 1 ステップでは次式の接線剛性方程式を解く。

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}_1 = \Delta \mathbf{F} \quad (1.8)$$

ここに， \mathbf{K} は弾性剛性マトリックス， $\Delta \mathbf{U}_1$ は変位増分ベクトルである。

(1.8)式から得られた $\Delta \mathbf{U}_1$ により，各要素のガウス積分点における応力増分 $\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy}$ を計算し，これらを(1.2)式に代入することにより $\bar{\sigma}$ を計算する。そして，すべての要素のガウス積分点で最大の $\bar{\sigma} (= \bar{\sigma}_{\max})$ から弾性限の荷重倍率 λ_L を次式により算出する。

$$\lambda_L = \frac{c}{\bar{\sigma}_{\max}} \quad (1.9)$$

この λ_L を用いて弾性限の荷重倍率，変位，応力ベクトルが次式のように求められる。

$$\lambda_1 = \lambda_L \Delta \lambda, \quad \mathbf{U}_1 = \lambda_L \Delta \mathbf{U}_1, \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \lambda_L \Delta \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (1.10)$$

次のステップでは，

$$\mathbf{K}_2^{ep(0)} \Delta \mathbf{U}_2^{(0)} = \Delta \mathbf{F} \quad (1.11)$$

を解く。ここに， \mathbf{K}^{ep} は，降伏した要素積分点の応力 - ひずみマトリックスを(1.3)式に入れ換えて計算した弾塑性剛性マトリックスである。また， $\mathbf{K}_2^{ep}, \Delta \mathbf{U}_2$ の上添字は Newton-Raphson 法の繰り返し回数を示す。(1.11)式から得られた $\Delta \mathbf{U}_2^{(0)}$ から各要素のガウス積分点の応力増分を計算する。この時の応力 - ひずみマトリックスは(1.11)式の \mathbf{K}^{ep} の計算に用いているものと同じである。これらの応力増分から次式により各要素の応力を求める。

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(0)} \quad (1.12)$$

(1.12)式から不釣り合い力

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(0)} = (\lambda_1 + \Delta \lambda) \mathbf{F} - \sum \int \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(0)} d\Omega \quad (1.13)$$

を計算すると $\tilde{\mathbf{R}}^{(0)} = \mathbf{0}$ となる。ただし， \mathbf{B} はひずみ - 変位マトリックスである。これは，(1.11)式の \mathbf{D}^{ep} と応力増分の計算に用いられた \mathbf{D}^{ep} が同じものであるからである。したがって，不釣り合い力は，再度(1.12)式により(1.3)式を計算し，これと $\Delta \mathbf{U}_2^{(0)}$ から各要素積分点の応力増分 $\Delta \boldsymbol{\sigma}_2^{(0)}$ を計算する。そして，これから求まった

$$\boldsymbol{\sigma}_2^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta \boldsymbol{\sigma}_2^{(0)} \quad (1.14)$$

により求める。すなわち，

$$\mathbf{R}^{(0)} = (\lambda_1 + \Delta \lambda) \mathbf{F} - \sum \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_2^{(0)} d\Omega \quad (1.15)$$

となる。そして，この不釣り合い力 $\mathbf{R}^{(0)}$ を Newton-Raphson 法により 0 に収束させる。Newton-Raphson 法では次式の方程式を解く。

$$\mathbf{K}_2^{ep(1)} \Delta \mathbf{U}_2^{(1)} = \mathbf{R}^{(0)} \quad (1.16)$$

(1.16)式から計算された $\Delta \mathbf{U}_2^{(1)}$ から各要素の応力増分ベクトルを計算し，それから各要素の応力を求め，再度その応力から \mathbf{D}^{ep} を計算し，不釣り合い力を計算するための応力増分を求める。同様の計算を \mathbf{R} のノルムが与えられた値以下になるまで繰り返す。以上の繰り返し数を n とすると，

第2ステップの収束した変位増分，応力増分，変位，応力ベクトルは次式で表される。

$$\Delta \mathbf{U}_2 = \sum_{k=0}^n \Delta \mathbf{U}_2^{(k)}, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_2 = \sum_{k=0}^n \Delta \boldsymbol{\sigma}_2^{(k)}, \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 + \Delta \mathbf{U}_2, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (1.17)$$

(1.11)から(1.17)式の計算を*i*ステップの荷重増分率 λ_i が1を超えるか，または(1.11)式が不安定になるまで，すなわち構造物の崩壊まで繰り返す。

なお，崩壊の判定は，指定した Newton-Raphson 法の繰り返しで，指定した許容誤差の10倍～100倍を超えた時点で崩壊と見なせばよい。