

# 位相最適化手法を用いた損傷を有する床スラブの最適補強に関する研究

## OPTIMUM REINFORCEMENT OF FLOOR SLAB WITH DAMAGE BY CFRP USING TOPOLOGY OPTIMIZATION METHOD

民谷知之  
Tomoyuki TAMIYA

In this paper, the topology optimization method for reinforcement of floor slab with damage using CFRP plates is presented. This method is used to find an efficient layout of CFRP plates on a floor slab with damage. The floor slab reinforced by CFRP plates is modeled by a laminate plate. The laminate plate is analyzed by FEM using solid element. The CFRP layer is separated by a necessary part and an unnecessary part using topology optimization method. The density method is adopted for the topology optimization analysis. By using such method for the reinforcement of floor slabs, it is possible to efficient reinforcement using CFRP plates.

**Keywords:** CFRP, topology optimization, floor slab, density approach, solid element, damage.

炭素繊維板, 位相最適化, 床スラブ, 密度法, ソリッド要素, 損傷

### 1. はじめに

近年の社会情勢の変化に伴い、エネルギーや資源の消費は増大し、大量の廃棄物を生むようになった。建設業界はこの現状を重く受け止め、短寿命でスクラップアンドビルドを繰り返すようなライフスタイルから、建築物をできるだけ長く使用するようなライフスタイルへと変化させるため努力していく必要がある。

建築物をできるだけ長く使用するために、補強によって既存の建築物の安全性を確保し延命を図る方法が多くとられており、研究分野においても、各構造部材の補強に関する研究が非常に多くなっている。補強工法の内、炭素繊維プラスチックを樹脂で硬化させた板(以後 CFRP 板と称する)をコンクリート構造物に接着することで補強を行うトレカミネート工法がある<sup>1), 2), 3)</sup>。この工法は施工性に優れており、床スラブの効率的な曲げ補強が可能である。森村<sup>4), 5)</sup>らは、中空スラブを対象とし、CFRP 板の補強による剛性、強度の変化を調べるための実験的研究を行っている。また、藤井、森村<sup>6), 7)</sup>らは、中空スラブにおける CFRP 板の最適な配置を位相最適化手法によって解析的に求める方法を提案し、CFRP 板の貼り方の違いによる剛性、強度、振動特性の違いを実験によって検討している。これまでの研究により、床スラブにおいてどのような CFRP 板補強を行えばよいかの指針が示された。しかしながら、既存の床スラブにおいては、これまでの地震被害によるものや老朽化等によって損傷を有するものが多く存在している。さらに、既存の損傷を有する床スラブにおいてはどのような CFRP 板補強を行えばよいかの指針が示されてきたわけではない。

そこで本研究では、これまでの研究を踏まえ、既存建物における損傷を有する床スラブに対し、どのように CFRP 板補強を施せば効率的で、なおかつ効果的な補強を行えるのかを解析的に検討を行い、その後、実験によってその有効性を確かめる。

本報告第 2 章では、CFRP 板補強を行った床スラブの有限要素解析法を示す。第 3 章では、CFRP 板の最適配置を求めるための位相最適化解析の方法を示す。第 4 章では、損傷を有する正方形床スラブを対象として、CFRP 板の最適な貼り方を求め、一般的な補強方法との比較・考察を行う。第 5 章では、正方形 RC スラブ試験体を用いて載荷実験を行い、開発したソフトの解析結果と実験値との比較を行い、最適位相を参考にした補強方法の有効性を検証する。第 6 章では以上のまとめを述べる。

### 2. 積層板の解析法

CFRP 板補強を施した床スラブは、積層板にモデル化し、ここでは、8 節点ソリッド要素を用いて解析を行う。ただし、通常の変位法による 8 節点アイソパラメトリック要素を用いると、要素内で変位が線形に仮定されるため、応力・歪みが要素内で一定値となる。この場合、板厚方向に十分な分割を行わないと応力の精度が得られない。そこで、ここでは、同じ 8 節点要素で、変位も応力も両方線形関数で仮定する応力仮定法要素(ハイブリッド要素)<sup>8)</sup>を用いる。

この方法では、要素内の変位と座標は通常アイソパラメトリック要素と同様に次式で仮定する(図 1 参照)

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}^e & x &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) x^e \\
v(x, y, z) &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{v}^e & y &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) y^e \\
w(x, y, z) &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{w}^e & z &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) z^e
\end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $u, v, w$  は  $x, y, z$  方向の変位、 $\mathbf{N}$  は形状関数、 $\mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e, \mathbf{w}^e$  と  $x^e, y^e, z^e$  は、節点変位と座標のベクトルである。

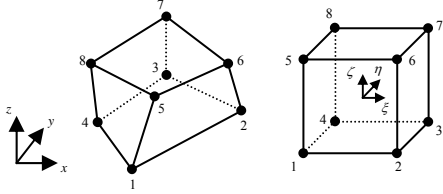


図1 8節点アイソパラメトリック要素

また、応力も次式のように仮定する。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (3)$$

この場合、(1)式と(3)式から2つの歪みベクトル

$$(1) \text{式から得られる歪み } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (4)$$

$$(3) \text{式から得られる歪み } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (5)$$

が得られる。ここに、 $\boldsymbol{\varepsilon}$  は歪みベクトル、 $\mathbf{B}$  は歪み-変位マトリクス、 $\mathbf{D}$  は弾性マトリクスである。これら2つの歪みを適合させるため、次式の条件を課す。

$$\iiint_{\Omega^e} \delta \boldsymbol{\sigma}^T [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{d}^e] d\Omega = 0 \quad (6)$$

(6)式の $\boldsymbol{\sigma}$ に(3)式を代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{M}_B \mathbf{d}^e \quad (7)$$

ただし、

$$\mathbf{M}_s = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s d\Omega, \quad \mathbf{M}_B = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{B} d\Omega \quad (8)$$

また、(5)式より、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{M}_B \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}^e \quad (9)$$

したがって、要素剛性マトリクスは次式より得られる。

$$\mathbf{k}^e = \iiint_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} d\Omega = \mathbf{M}_B^T \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{M}_B \quad (10)$$

(10)式の剛性マトリクスを用いる解析では、未知数は通常のアイソパラメトリック要素と同じ $\mathbf{d}^e$ となる。したがって、解析自由度は同じで、しかも、(3)式で示されるように垂直応力が座標に関して線形で仮定されるため、板厚方向の分割をしなくても通常の板曲げ要素と同等の精度が得られる。

### 3. 位相最適化問題の定式化

本問題は、図2に示すように積層板の表面にCFRP材料の層を設定し、重量の制約の下に、CFRP材料の要素密度を最適化することで、CFRPの最適位相を求める問題となる。したがって、本問題の設計変数は、CFRP材料要素の密度、制約条件はCFRP材料の総重量となる。また、最適化の目的は、CFRP補強によりスラブの剛性を高めることとし、目的関数をコンプライアンス(歪みエネルギーの2倍)として、これを最小化する。以上の最適化問題を定式化すると次式となる。

$$\begin{aligned}
\min \quad & C(\mathbf{x}) = \mathbf{d}^T \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i^{eT} x_i^p \mathbf{k}_i^e \mathbf{d}_i^e \\
\text{subject to} \quad & W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i v_i^e \leq \bar{W} \\
& 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n)
\end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $C$  はコンプライアンス、 $\mathbf{k}$  は全体剛性マトリクス、 $\mathbf{d}$  は節点変位ベクトル、 $x_i$  は0以上1以下の要素密度を表す設計変数、 $n$  は設計変数の総数、 $\mathbf{d}_i^e, \mathbf{k}_i^e$  は  $i$  番目要素の節点変位ベクトルと剛性マトリクス、 $W$  は総重量、 $v_i^e$  は  $i$  番目要素の体積、 $\bar{W}$  は重量の制約値を表す。また、 $p$  は、0と1の間の中間的な密度を防ぐためのペナルティ係数である(通常2~3で与える)。

目的関数と制約条件の設計変数に関する感度係数は、次式から計算される。

$$\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -p x_i^{(p-1)} (\mathbf{d}_i^{eT} \mathbf{k}_i^e \mathbf{d}_i^e), \quad \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_i} = v_i^e \quad (12)$$

また、繰り返し計算の各ステップでは、設計変数に変動幅 (move limit) の制約を課す必要がある。すなわち、

$$x_i^{(k-1)} - \zeta \leq x_i^{(k)} \leq x_i^{(k-1)} + \zeta \quad (13)$$

ここに、 $k$  は最適化計算の繰り返しステップ、 $\zeta$  はムープリミットを表す(通常0.1以下で与える)。

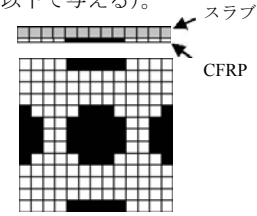


図2 CFRP板の最適配置を求める最適化問題

### 4. 正方形床スラブの補強に関する検討

ここでは、正方形床スラブを対象として、CFRP板の最適な補強方法(配置)及び補強効果について解析的に検討する。

#### 4.1 解析モデルおよび解析条件

図3は、床スラブの解析モデルを示す。解析は、1/4領域で行い、要素分割数は20×20分割とする。また、板厚方向は、床スラブの層とCFRP板の層に分ける。境界条件は、周辺完全固定とし、荷重は鉛直等分布荷重とする。また、床スラブのヤング係数は $2.16 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比0.16、CFRP板のヤング係数は $1.5 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比は0.3とする。なお、損傷部分のモデル化はスラブ部分の損傷部位に相当する要素のヤング係数を低下させることによって行う。

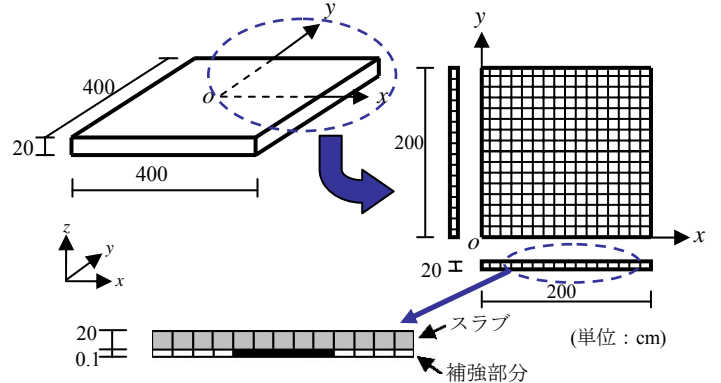


図3 解析モデル

損傷パターンとして想定できるCase.1~Case.4の4つの解析モデルを作成し、CFRP板の体積変化による最適位相の変化を検討する。Case.2~Case.4の解析モデルはそれぞれ、Case.2を中央部に損傷を有するモデル、Case.3を中央部・端部に損傷を有するモデル、Case.4を破壊モデルとし、Case.1を損傷を有しない比較モデルとする。以下の図は、CFRP補強量を設計要素の10%~50%(10%間隔)で補強した場合の最適位相を示し(黒で示された部分がCFRP)、斜線で示した箇所は損傷部分を示す。

#### 4.2 Case.1(比較モデル)

図4は、Case.2~Case.4との比較モデルとして損傷を有しない床スラブを対象に位相解析を行った結果を示す。

図より、損傷を有しない床スラブにおいて、中央部及び周辺部にバランスよく補強する必要があることがわかる。

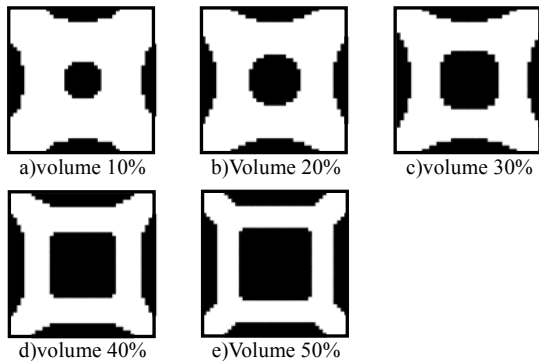


図4 比較モデル

#### 4.3 Case.2(中央部に損傷を有するモデル)

一般に、床スラブにおける損傷の初期発生はスラブの下面中央部に発生する。これは等分布荷重において中央部に引張側の最大応力が発生するためである。よって、ここでは損傷箇所をスラブ中央部のみとし、損傷範囲を三段階に分け、それぞれ解析を行う。

図5~図7は解析結果を示し、図より、Case.1と比較し大きな位相の変化を示さなかった。これは、損傷箇所と最大応力発生箇所が同一であったためと考えられる。

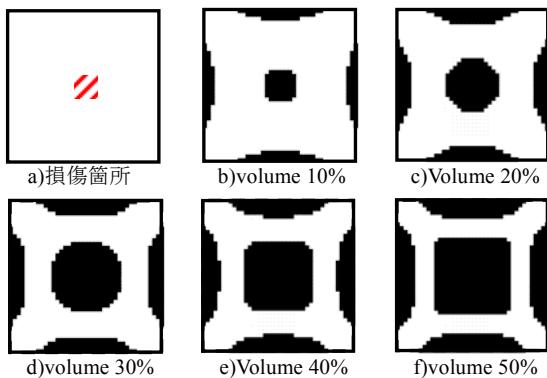


図5 損傷箇所 2.25%

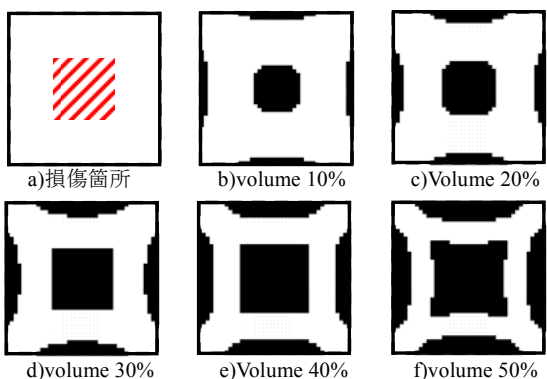


図6 損傷箇所 16.00%

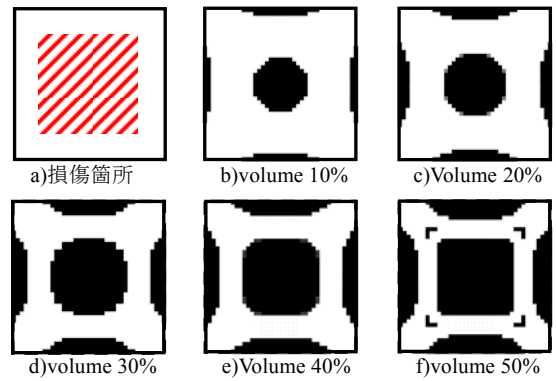


図7 損傷箇所 42.25%

#### 4.4 Case.3(中央部・端部に損傷を有するモデル)

床スラブにおける損傷の二次発生はスラブの上面端部に発生する。これは等分布荷重において固定端部の引張応力が中央部の最大応力に次いで大きいいためである。よって、ここでは損傷部分をスラブ中央部及び周辺部とし、損傷範囲を三段階に分け、それぞれ解析を行う。

図8~図10は解析結果を示し、図より、Case.1及びCase.2と比較し、中央部の位相は類似していることがわかる。しかしながら、周辺部において、横に広がるような傾向を示した。これは、損傷箇所を補うよう位相を示したと考えられる。

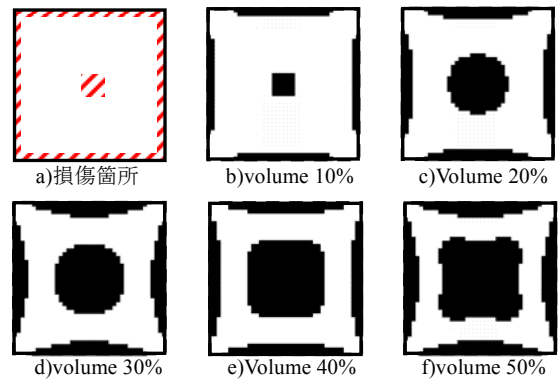


図8 損傷箇所 21.25%

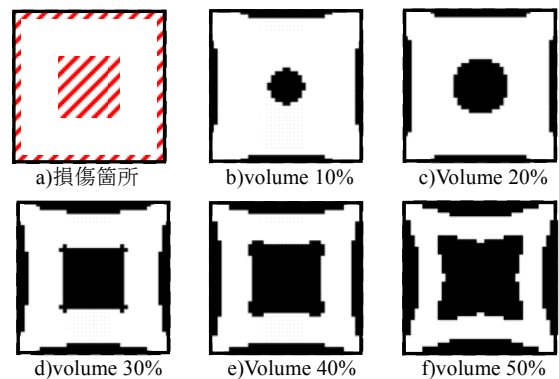


図9 損傷箇所 35.00%

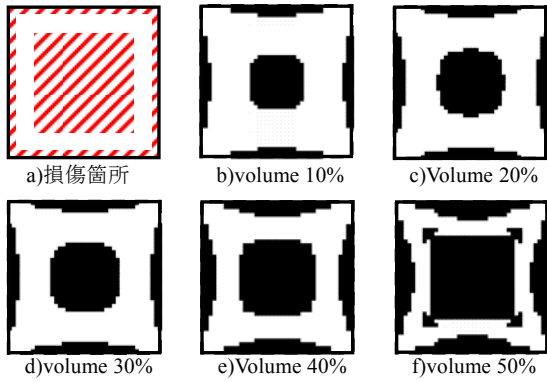


図10 損傷箇所 61.25%

#### 4.5 Case.4 (破壊モデル)

床スラブの最終破壊時には、スラブの下面中央部から隅部に向かうように亀裂が発生する。これは森村らのスラブの破壊実験からも確認されている。よって、ここでは損傷部分をスラブ中央部と周辺部、及び中央部から隅部の斜め亀裂とし、損傷範囲を二段階に分け、それぞれ解析を行う。

図11、図12は解析結果を示し、図より、ほぼCase.3と同様の傾向を示す。しかしながら、CFRP板による補強 volume を増すにつれて、よりせん断破壊による損傷箇所を補うような位相を示した。

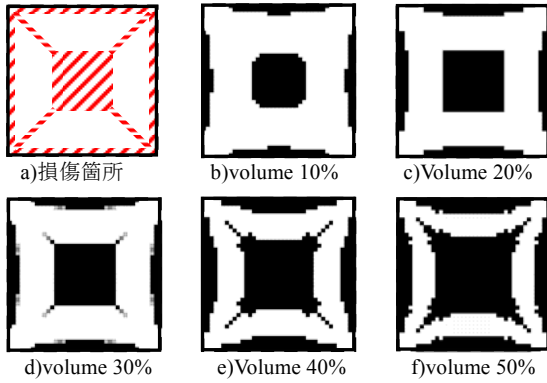


図11 損傷箇所 37.50%

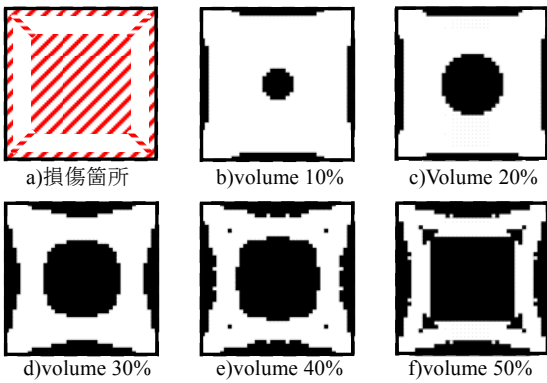


図12 損傷箇所 62.50%

#### 4.6 一般的施工例との比較

ここでは、一般的施工例を用いて本研究で用いる位相最適化手法に基づくレイアウトの有効性を解析的に検証する。用いる一般的な施工法は、図13に示すような等間隔に補強を施すものとする。

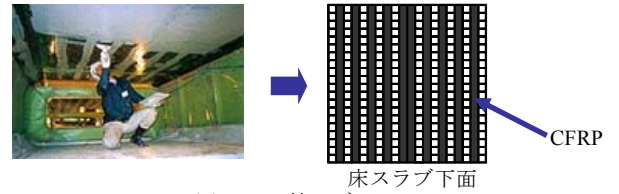


図13 比較モデル

剛性 100%時を、無補強の損傷を有しない床スラブの剛性とする。そして、損傷を有する床スラブを補強した時の剛性比率を  

$$\text{剛性比率} = \delta_0 / \delta \times 100 (\%) \quad (14)$$
 で評価する。ここで  $\delta_0$  は損傷を有しない床スラブの最大たわみであり、 $\delta_0 = 2.263\text{mm}$  である。

一般的施工法によって補強を施した場合と、位相最適化手法に基づくレイアウトを参考に補強を施した場合の、剛性比率の比較を図14～図16にそれぞれ示す。ここで、それぞれ図に示す破線は一般的施工法によって補強を施した場合を示す。図より、すべての損傷パターンにおいて一般的施工法によるCFRP板50%使用時より、位相最適化手法に基づいたCFRP板10%使用時のレイアウトの方が剛性が高いことがわかる。

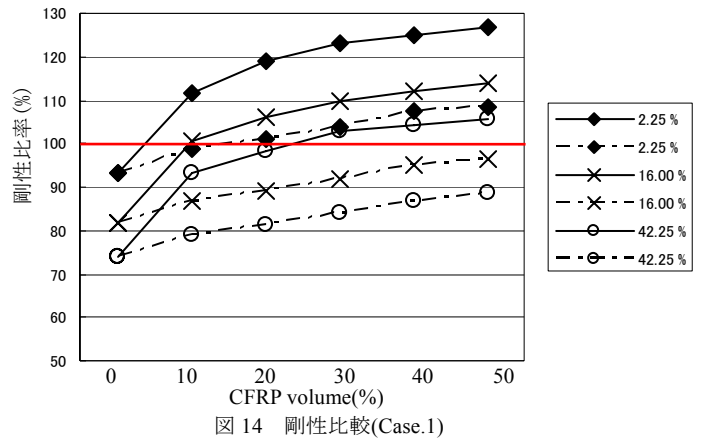


図14 剛性比較(Case.1)

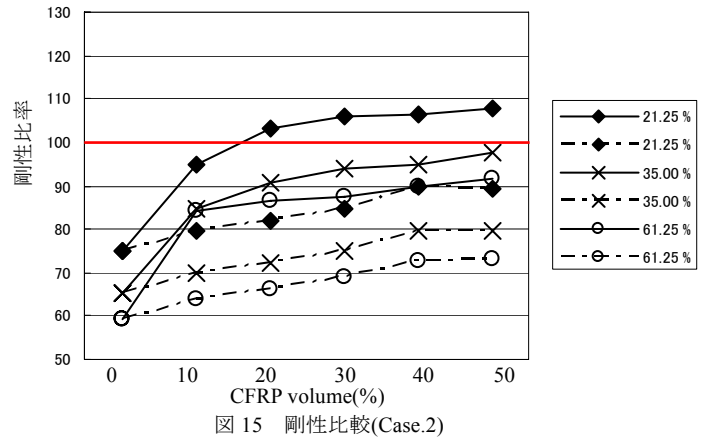


図15 剛性比較(Case.2)

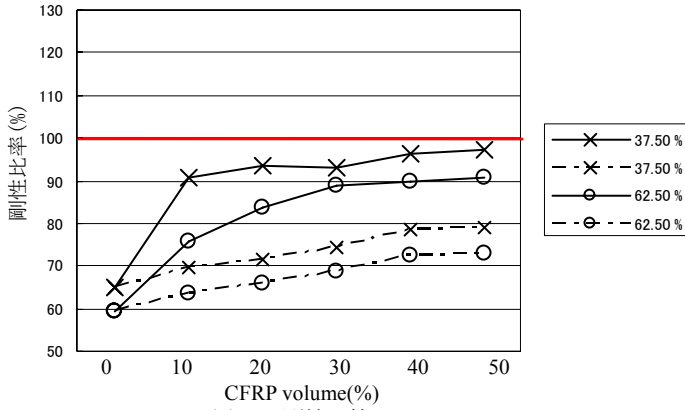


図 16 剛性比較(Case.3)

## 5. 実験による検証

ここでは、正方形床スラブ試験体を対象として、CFRP 板の最適な補強方法（配置）及び補強効果について実験的に検証する。まず、損傷を有しない試験体に対し破壊実験を行う。さらに、実験により損傷を有した試験体に対し、位相最適化手法に基づく最適補強を施す。補強後に再度、試験体に対し載荷実験を行い、補強後の効果がどの程度であるかを検討する。

### 5.1 補強前の破壊実験

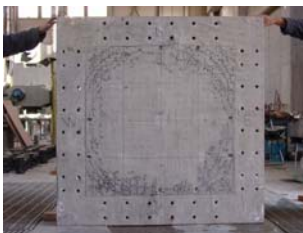
まず、損傷を有しない試験体に対して、破壊実験を行う。試験体には、コントローラーで調整しながら圧力をかけていくと、油圧ユニットからジャッキ 9 本に油が送られピストンの圧力となり、試験体に荷重がかかる。試験体の変位・たわみ・荷重はそれぞれのセンサーが持つコードやリード線をデジタルひずみ測定器につなげて測定する。荷重は 0kN→0.5kN→0kN→1.0kN→0kN→1.5kN→・・・と 0.5kN きざみで止めながら、試験体が破壊に至るまで増やしていく。このとき振動特性・遮音効果についての試験・ひび割れチェックも同時進行で繰り返し行う。実験結果を表 1 に示す。図 19 には実験を終え破壊した試験体を示し、図より、試験体上面の周辺部・試験体下面の中央部に引張による破壊を起こしているのがわかる。



図 17 変位計設置風景



図 18 試験体上面 9 点載荷風景



a) 試験体上面



b) 試験体下面

図 19 破壊に至った試験体

表 1 実験結果

	ジャッキ 1 本時 最大荷重 (kN)	ジャッキ 9 本時 最大荷重 (kN)	中央たわみ (mm)
試験体破壊時	21.47	189.00	14.001

### 5.2 補強方法

解析には 3 節で述べた位相最適化手法を用いる。境界条件は、周辺完全固定とし、図 20～図 23 に示す赤く示した破線部を上下方向のみ固定とする。さらに、荷重は破壊実験で用いた 9 点鉛直等荷重とし、赤く示した箇所は損傷部分を示す(図 20 参照)。ここで、損傷箇所は図 19 の破壊に至ったスラブを基とする。なお、本解析では図 3 に示すように CFRP 板をスラブの下面に貼るものとし、スラブ部分と CFRP 板部分の層を分けて解析を行う。

補強に用いる CFRP 板を、設計要素の 30%とした場合の位相解析の結果を図 21 の位相を示す。位相解析により求めた位相から、図 22 の施工性を考慮したモデルに置換し、その後、たわみ等を求めるための解析を行う。また、この補強方法の有効性を確かめるために、一般的施工法による比較モデルを用いて最適補強との比較も同時に行う。ここで、荷重条件、境界条件及び補強量は位相解析時と同様とする。

表 2 は解析結果を示し、表より、一般的施工法より位相最適化手法に基づいたレイアウトの方が剛性が高いことがわかる。

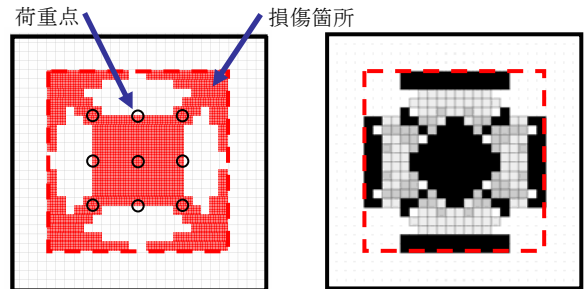


図 20 損傷箇所

図 21 最適位相

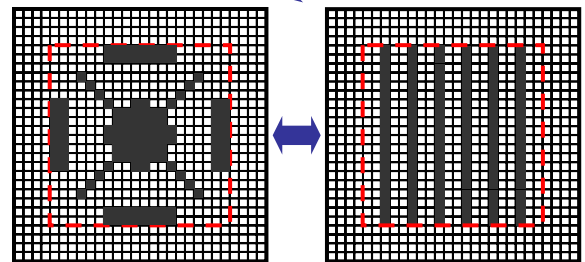


図 22 施工性を考慮した位相

図 23 一般的施工法

表 2 解析結果

	最適位相	一般的施工法
剛性比率(%)	78.17	70.57

### 5.3 実験的検証

ここでは、破壊に至った試験体に対する最適補強の有効性を実験的に検証する。図 19 に示す破壊に至った試験体下面に対し図 24 c)に示す最適補強を施し、5.1 節で述べた破壊実験を再度行う。また、施工フローを図 24 に示す。



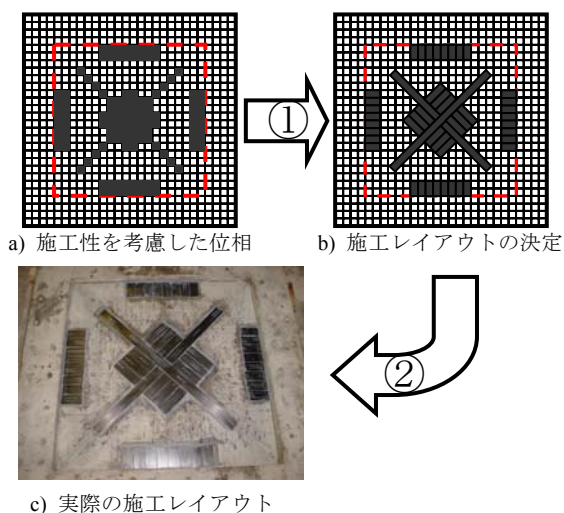


図 24 施工フロー

図 25 は実験結果を示し、図より、損傷のない試験体に比べ最適補強した試験体の方が最大荷重が高いことがわかる。ここで CFRP 板は引張側に補強を施すのが一般的であるが、試験体下面周辺部は圧縮側となる。この圧縮側に補強を施すことで、破壊に至ったコンクリートの曲げ剛性がある程度回復できたとと思われる。

また、荷重を与えた初期段階では最適補強後の方が曲げ剛性が低く、その後徐々に補強前の曲げ剛性を上回っていった。これは、初期段階では荷重による力が CFRP 板に伝達されなかったためと思われる。

一度破壊に至った試験体が最適補強後に無損傷試験体の最大荷重を超えることで、位相最適化手法を用いた補強法の有効性が確認できた。

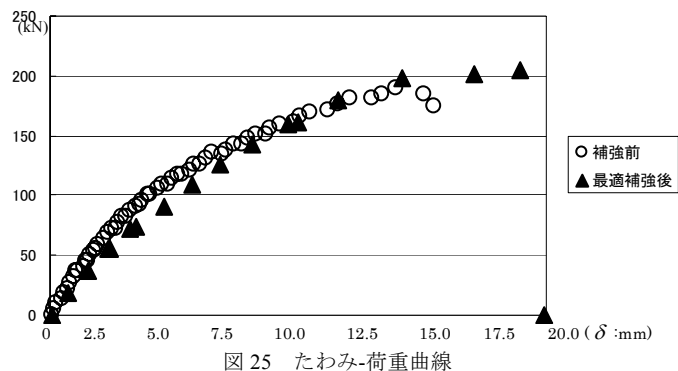


図 25 たわみ-荷重曲線

## 6. まとめ

本報では、CFRP 板による損傷を有する床スラブの耐震補強を効率よく行うために、位相最適化手法を用いて CFRP の適切なレイアウトを求める手法を示し、最適補強について解析及び実験的検証を行った。まず、損傷を有する床スラブに対し、効率のよい CFRP の張り方を解析的に求めた。さらに、その解析結果がおおよそ正しいものであるかを検討するため、最適化手法を用いて補強した試験体において実験を行い、解析結果との比較を行った。以下に結論を述べる。

- 1) 本報ではスラブ中央部のみの損傷例・スラブ中央部と周辺部の損傷例・スラブ中央部と周辺部及びせん断方向に向かう損傷例の 3 例を想定し、解析を行った。解析の結果、スラブ中央部のみ損傷を有する場合には、損傷を有しない場合と同様に、スラブ中央部及び周辺部に補強する必要があることがわかり、主にスラブ中央部への補強を必要とすることがわかった。また、スラブ中央部と周辺部に損傷を有する場合、スラブ中央部のみ損傷を有する場合に比べ、周辺部の補強の割合を高くする必要があるとわかった。さらに、スラブ中央部と周辺部及びせん断方向に損傷を有する場合、せん断方向にもバランスよく補強する必要があるとわかった。
- 2) 損傷のない試験体を一度破壊させた後、解析で求めた最適補強を施し、再度、破壊実験を行った。実験の結果、損傷のない試験体に比べ最適補強した試験体の方が最大荷重が高いことがわかった。一度破壊に至った試験体が最適補強後に補強前の最大荷重を超えることで、CFRP 板を 30%用いることで損傷のない試験体程度に曲げ強度を回復させることができたといえる。
- 3) 実際の施工においては、損傷の程度を理解し解析を行い、その後その解析結果を基に CFRP 板の volume を決定するのが望ましい。しかしながら、やむを得ずその過程を省略する場合、使用する CFRP 板の volume は 30%程度とし、中央部、周辺部及びせん断方向にバランスよく補強することが望ましい。
- 4) 解析と実験との比較により、位相最適化手法の実用性の検証を確かめることができた。このことより効率的にレイアウトできるため、改修に際してその費用も考慮できたとはいえる。

## 参考文献

- 1) 木村耕三, 服部明生, 土屋好男, 炭素繊維補強材とコンクリートとの付着特性, 日本建築学会大会学術講演梗概集(C-2), pp.957-958, 1998
- 2) 木村耕三, 服部明生, 土屋好男, CFRP 成型板による RC 補強部材の長期たわみ性状, 日本建築学会大会学術講演梗概集(C-2), pp.633-634, 1999
- 3) 木村耕三, 服部明生, 土屋好男, CFRP 板による既存構造物の補強工法の開発-振動下における接着剤の効果, 日本建築学会大会学術講演梗概集(A-1), pp.637-638, 2001
- 4) 森村毅, 在永末徳, 鉄筋コンクリート梁・スラブの炭素繊維補強に関する研究, 日本建築学会中国支部研究報告第 24 巻, pp.29-32, 2001.3
- 5) 森村毅, 在永末徳, 周辺拘束鉄筋コンクリート合成スラブの炭素繊維補強に関する研究, 日本建築学会中国支部研究報告第 25 巻, pp121-124, 2002.3
- 6) 藤井大地, 小泉智彦, 森村毅, 位相最適化手法を用いた CFRP による中空スラブの最適補強, 日本建築学会構造系論文集, 第 585 号, pp.109-114, 2004.11
- 7) 藤井大地, 中川恭一, 森村毅, 床スラブの CFRP 補強の効率化のための位相解析ツールの開発, 日本建築学会技術報告集, 第 24 号, pp.95-100, 2006.12
- 8) 関口美奈子, 菊池昇, 混合的な有限要素剛性マトリックスの導き方に関する一考察-Clough 1960 年の論文を中心として-, 計算工学講演会論文集, 4(1), pp.131-134, 1999
- 9) C. Fleury and V. Braibant : Structural Optimization: A new dual method using mixed variables, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.23, pp.409-428, 1986