

位相最適化 粒子法 発見的手法
幾何学的非線形性 CA法 ESO法

1 緒言

近年、工学諸分野において位相最適化手法に関する研究が盛んに行われている。数理計画法 (Mathematical Programming) に基づく手法としては、均質化設計法 (HDM: Homogenization Design Method)¹⁾、密度法 (Density Approach)²⁾が挙げられる。また、構造の位相変化を許容しながら明確な外形形状を得る構造最適化の方法として、レベルセット法 (Level Set Method) に基づく形状最適化の方法がある。一方、数理計画法によらない最適化手法も研究されており、それらは一般的に、発見的手法 (Heuristics)³⁾と呼ばれる。主たる対象が離散構造物である手法としては、遺伝的アルゴリズム (GA: Genetic Algorithm)、免疫アルゴリズム (IA: Immune Algorithm)、シミュレーテッドアニーリング (SA: Simulated Annealing)、タブーサーチ (Taboo Search) などが挙げられる。主たる対象が連続体構造物である手法としては、ESO (Evolutionally Structural Optimization) 法、セルラオートマトン (CA: Cellular Automaton) 法などが挙げられる。また、これらの手法は、応力制約条件のもとでは、全応力設計法 (FSDM: Fully Stressed Design Method) に準ずる位相最適化手法である。

最近では、計算技術の発達から、位相最適化手法は非線形問題に対しても適用が試みられている⁴⁾。特に、幾何学的非線形問題に関しては線形問題からの拡張が比較的容易であるため、関連する研究も多く報告されており、幾何学的非線形性を考慮した場合、有限変形を記述した結果として、設計荷重に対して座屈を起こし難い位相が得られるという報告もある⁷⁾。

位相最適化手法は、線形・非線形、静的・動的を問わず、幅広く設計問題へ適用され、特に、静的線形問題に関しては、ほぼ成熟した研究分野であるといえる。これはやはり、近年における飛躍的な計算技術の発達によるところが大きく、位相最適化手法のほとんどは、有限要素法 (FEM: Finite Element Method) による応力変位解析を基調とするものである。有限要素法は研究の歴史も長く、汎用性の高い手法であるが、幾何学的非線形解析においてはメッシュに由来する問題点を克服する必要がある、これには煩雑な手続きを必要とする。

メッシュを用いる有限要素法に対し、メッシュにとらわれない、あるいはメッシュを用いない解析手法に関しても盛んに研究されており、一般的に、前者をメッシュフリー法⁹⁾、後者を粒子法¹⁰⁾と呼ぶ。メッシュフリー法のうち、代表的な手法としては、エレメントフリーガラーキン法 (EFGM: Element Free Galerkin Method)、有限被覆法 (FCM: Finite Cover Method)、拡張有限要素法 (XFEM: eXtended Finite Element Method) が挙げられる。また、一般化有限要素法 (GFEM: Generalized Finite Element Method)、重合メッシュ法 (Overlaying Mesh Method) もメッシュフリー法に分類でき、拡張有限要素法は一般化有限要素法の特殊な場合である。

粒子法のうち、代表的な手法としては、離散要素法 (DEM: Discrete

Element Method)、SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法、MPS (Moving Particle Semi-implicit) 法が挙げられる。

メッシュフリー法の多くは有限要素法をベースとしたものであるため、構造最適化問題への適用も徐々に研究されるようになっていく。一方、粒子法を用いた位相最適化手法に関する研究はほとんどみられない。これは、粒子法があくまでも物理ベースシミュレーションのツールであるという認識が広く根付いているためと考えられるが、課題は残るものの、各種非線形解析における粒子法の有効性は既往の研究によって十分に示されている。

しかしながら、粒子法の位相最適化手法への適用は有限要素法に比して困難である。離散要素法は基本的には連続体を対象としておらず、SPH 法においては、Tensile Instability が生じることが報告されており、いくつかの解決策が提案されているが、これらの手法を適用するには解決すべき問題点が多く、直ちに設計問題へ導入するのはやはり困難であると考えられる。一方、MPS 法では応力の計算において静水圧成分を粒子位置で計算し、偏差成分を粒子間で計算しているため Tensile Instability は生じない。このような経緯から、著者らは MPS 法を用いてセルラオートマトン法¹¹⁻¹³⁾の局所規則により位相を更新する手法を提案しており、粒子法を用いれば比較的容易に幾何学的非線形性を反映した位相が得られることを示している¹⁴⁾。

本研究では粒子法による幾何学的非線形解析を用いた発見的手法に基づく新規の位相最適化手法を提案し、有限変形を伴う弾性体の位相最適化における有効性を示す。

2 粒子法による動的弾性解析

MPS 法はベクトル解析における微分演算子に対応する粒子間相互作用モデルを用いて連続体の支配方程式を離散化するものである。

MPS 法では、重み関数 w を次式で定義する。

$$w(\|\mathbf{r}_{ij}^0\|) = \begin{cases} \frac{r_e}{\|\mathbf{r}_{ij}^0\|} - 1 & (0 \leq \|\mathbf{r}_{ij}^0\| \leq r_e) \\ 0 & (\|\mathbf{r}_{ij}^0\| < r_e) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 \mathbf{r}_{ij}^0 は初期粒子配置における相対座標、 r_e は粒子間相互作用の影響半径であり、本報告では r_e を最小粒子間距離の 2 倍とする。また、粒子数密度 n_i^0 は粒子 i の位置における重み関数の和として次式で定義する。

$$n_i^0 = \sum_{i \neq j} w(\|\mathbf{r}_{ij}^0\|) \quad (2)$$

MPS 法では、これらを用いて勾配モデルおよび発散モデルを計算する。

動的な弾性体の支配方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} = v_\alpha, \quad \rho \frac{Dv_\alpha}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}) + K_\alpha \quad (3)$$

ただし、 ρ は単位体積質量、 v_α は速度、 $\varepsilon_{\gamma\gamma}$ は体積歪、 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ は歪テンソル、 K_α は外力である。また、弾性解析において、Lame の弾性定数 λ, μ は次式で定義される。

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

加速度を計算する際に、第1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル^{15,16)}の発散をとるが、粒子間位置ですべての成分が必要ではないため、相対座標 \mathbf{r}_{ij} 方向で内積をとる。歪テンソルの \mathbf{r}_{ij} 方向成分 ε_{ij}^n と接線成分 ε_{ij}^s は次式となる。

$$\varepsilon_{ij}^n = \frac{\mathbf{u}_{ij}^n}{\|\mathbf{r}_{ij}^0\|}, \quad \varepsilon_{ij}^s = \frac{\mathbf{u}_{ij}^s}{\|\mathbf{r}_{ij}^0\|} \quad (5)$$

式(5)を用いれば、垂直応力 σ_{ij}^n とせん断応力 σ_{ij}^s は次式となる。

$$\sigma_{ij}^n = 2\mu \varepsilon_{ij}^n = 2\mu \frac{\mathbf{u}_{ij}^n}{\|\mathbf{r}_{ij}^0\|}, \quad \sigma_{ij}^s = 2\mu \varepsilon_{ij}^s = 2\mu \frac{\mathbf{u}_{ij}^s}{\|\mathbf{r}_{ij}^0\|} \quad (6)$$

粒子 i に働く静水応力 σ_i^m は、MPS法の発散モデルを用いて、体積歪 $\varepsilon_{\gamma\gamma}$ から次式のように表される。

$$\sigma_i^m = \lambda (\varepsilon_{\gamma\gamma})_i = \lambda \frac{d}{n^0} \sum_{i \neq j} \varepsilon_{ij}^n \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|} w(\|\mathbf{r}_{ij}^0\|) \quad (7)$$

次に、式(3)の運動方程式を、垂直応力の偏差項、せん断応力項、静水応力項に分けて計算するものとする。式(3)は、粒子 i について、MPS法の発散モデルを用いて次式のように表すことができる。ただし、ここでは物体力は省略する。

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right] = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right]_n + \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right]_s + \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right]_m \quad (8)$$

Lagrange 座標系において、粒子に働く加速度は第1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル σ の発散を用いて次式のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma \quad (9)$$

式(9)にMPS法の発散モデルを適用することで応力による加速度項が得られ、式(8)の右辺第1項及び第2項は次式で表される。

$$\left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right]_n = \frac{d}{\rho n_i^0} \sum_{i \neq j} \frac{2\sigma_{ij}^n}{\|\mathbf{r}_{ij}^0\|} w(\|\mathbf{r}_{ij}^0\|), \quad \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right]_s = \frac{d}{\rho n_i^0} \sum_{i \neq j} \frac{2\sigma_{ij}^s}{\|\mathbf{r}_{ij}^0\|} w(\|\mathbf{r}_{ij}^0\|) \quad (10)$$

静水応力項に関して、式(7)によって得られる静水応力 σ_i^m は粒子 i の位置で定義されているため、粒子 ij 間で定義される静水応力 σ_{ij}^m を用いれば応力による加速度項と同様にMPS法の発散モデルを適用することで、式(8)の右辺第3項は次式で表される。

$$\left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right]_m = \frac{d}{\rho n_i^0} \sum_{i \neq j} \frac{2\sigma_{ij}^m \mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}^0\| \|\mathbf{r}_{ij}^0\|} w(\|\mathbf{r}_{ij}^0\|) \quad \left(\sigma_{ij}^m = \frac{\sigma_i^m + \sigma_j^m}{2} \right) \quad (11)$$

微分方程式上は運動量保存則から角運動量保存則が導かれるが、こ

れは離散化によって成り立たなくなり、せん断応力によってトルクが生じるため、角運動量保存則は満たされない。そこで、せん断応力から生じたトルクを打ち消すように粒子に回転運動のトルクを与え、角運動量を保存させる。

粒子 ij 間のせん断応力 σ_{ij}^s により粒子 i が受ける力 \mathbf{F}_{ij} は、粒子の質量 m を用いて、次式で表される。

$$\mathbf{F}_{ij} = m \left[\frac{\partial \mathbf{v}_{ij}}{\partial t} \right] = \frac{dm}{\rho n_i^0} \sum_{i \neq j} \frac{2\sigma_{ij}^s}{\|\mathbf{r}_{ij}^0\|} \quad (m = \rho l_0^2 l_i) \quad (12)$$

一方、粒子 j には、同じ絶対値で逆方向の力がかかる。この偶力により発生するトルク \mathbf{T}_{ij} は、相対座標 \mathbf{r}_{ij} と \mathbf{F}_{ij} の外積を用いると次式で表される。

$$\mathbf{T}_{ij} = -\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} \quad (13)$$

角運動量を保存するため、式(13)の \mathbf{T}_{ij} を打ち消すように、粒子 i と粒子 j に半分ずつトルクを与える。

$$I_i \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial t} \right] = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \mathbf{T}_{ij} \quad \left(I_i = m_i \frac{l_0^2}{6} \right) \quad (14)$$

ここに、 I_i 及び $\boldsymbol{\omega}_i$ は粒子 i の慣性モーメント及び角速度である。

新しい時刻 $k+1$ における速度 \mathbf{v} と座標 \mathbf{r} は次式で計算し、更新する。

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_i^k + \Delta t \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right]^k, \quad \mathbf{r}_i^{k+1} = \mathbf{r}_i^k + \Delta t \mathbf{v}_i^{k+1} \quad (15)$$

ただし、2次元の場合、角速度 ω と回転角 θ はスカラーとなり、次式で更新する。

$$\omega_i^{k+1} = \omega_i^k + \Delta t \left[\frac{\partial \omega_i}{\partial t} \right]^k, \quad \theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \Delta t \omega_i^{k+1} \quad (16)$$

以上の定式化において、式(15)、(16)に示す時間積分はハミルトン形式に対する1次のシンプレクティックスキームであり、全エネルギーを高精度で保存する。

3 位相最適化手法

本研究では、位相最適化手法として、セルラオートマトン法とESO法¹⁷⁻¹⁹⁾の統合法を用いる。

まず、本報告における最適化問題は、位相の更新ごとに変動する応力制約条件下における総質量 W の最小化問題として次式のように表される。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } M = \sum m \\ & \text{Subject to } (\sigma_i^{VM})^k \geq (X_{cr})^k \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 σ_i^{VM} は、粒子 i の von Mises 応力、 k は当該の進化段階、 X_{cr} はESO法において位相更新の基準となる閾値である。ただし、MPS法において偏差応力は粒子間で定義されているため、まず、粒子 ij 間で定義される von Mises 応力 σ_{ij}^{VM} を次式で計算する。

$$\sigma_{ij}^{VM} = \sqrt{(\sigma_{ij}^{mx})^2 + (\sigma_{ij}^{my})^2 - \sigma_{ij}^{mx} \sigma_{ij}^{my} + 3(\sigma_{ij}^s)^2} \quad (18)$$

ここで、 σ_{ij}^x は σ_{ij}^n の x 方向成分、 σ_{ij}^y は σ_{ij}^n の y 方向成分である。したがって、粒子 i の von Mises 応力 σ_i^{VM} は式(18)の重み付き平均として次式で求められる。

$$\sigma_i^{VM} = \frac{d}{n^0} \sum_{i \neq j} \sigma_{ij}^{VM} w(\|\mathbf{r}_{ij}^0\|) \quad (19)$$

von Mises 応力の分散から、標準偏差 ϕ は von Mises 応力の平均値 σ_{mean}^{VM} を用いて次式から求められる。

$$\phi = \frac{1}{N} \sqrt{\sum (\sigma_i^{VM} - \sigma_{mean}^{VM})^2} \quad (20)$$

これらを用いて閾値 X_{cr} は次式で計算する。

$$X_{cr} = \sigma_{mean}^{VM} - \phi \quad (21)$$

MPS 法による応力変位解析が終了したとき、粒子 i の von Mises 応力 σ_i^{VM} が von Mises 応力の平均値を超えれば、近傍粒子として粒子 j が発生し、 σ_i^{VM} が X_{cr} の値を下回れば、粒子 i は消滅するという局所規則を適用する。ただし、近傍粒子の判定には、次式に示す近傍判定係数 $_{CA}r_e^k$ を最小粒子間距離に乘じた近傍粒子半径を用いる。

$$_{CA}r_e^k = (_{CA}r_e^0)^\psi, \quad \psi = \sqrt{\frac{MR^k - MR_{end}}{1 - MR_{end}}} \quad (22)$$

ここに、 MR^k は当該の進化段階における質量比、 MR_{end} は質量制約条件を満たす質量比である。これは、進化の初期段階においては大幅な粒子の復活を許容し、進化に伴って近傍粒子を Neumann 近傍へ収束させるものである。これにより、ESO 法において双方向進化を可能としている。

4 数値解析例

4.1 微小変形問題

ここでは、微小変形の範囲において、片持ち梁の数値解析例を示す。

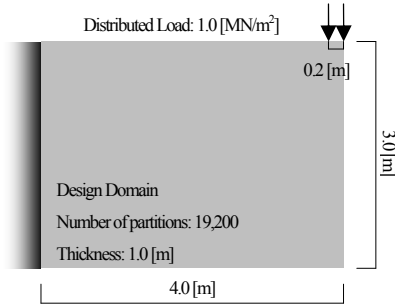


Fig.1 Case 1 の解析モデル

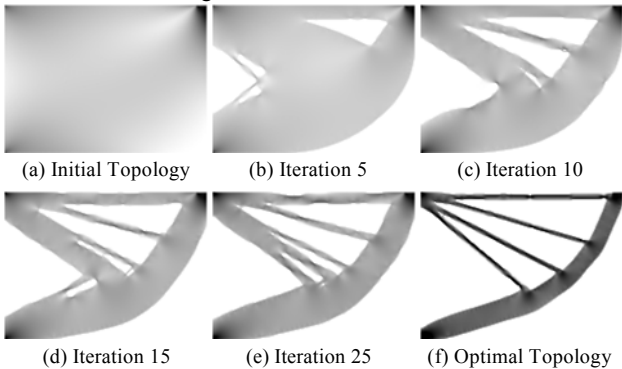


Fig.2 Case 1 の解析結果

Fig.1 は Case 1 の解析モデルを示し、材料定数はヤング率 $E:100[GPa]$ 、単位体積質量 $\rho:5000[kg/m^3]$ 、ポアソン比 $\nu:0.3$ とする。Fig.2 に Case 1 の解析結果、Fig.3 に Case 1 における相対標準偏差の推移を示す。Fig.2, 3 より、得られた最適位相においては、初期の位相と比べて相対標準偏差は減少しており、等応力状態に近い位相が得られているといえる。

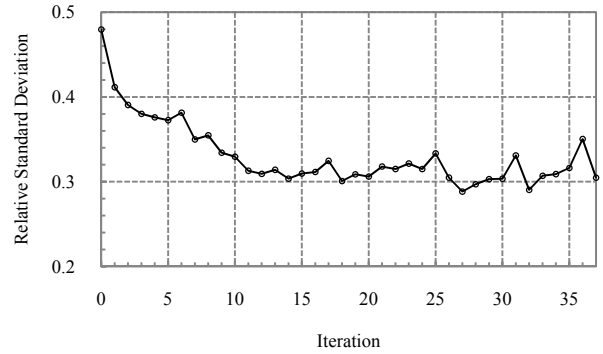


Fig.3 Case 1 における相対標準偏差の推移

4.2 有限変形問題

ここでは、異なる設計荷重により有限変形を伴う梁の数値解析例を示す。Fig.4 は Case 2 の解析モデルを示し、材料定数はヤング率 $E:100[GPa]$ 、単位体積質量 $\rho:5000[kg/m^3]$ 、ポアソン比 $\nu:0.3$ とする。

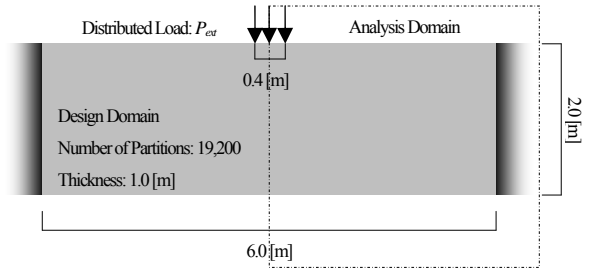


Fig.4 Case 2 の解析モデル

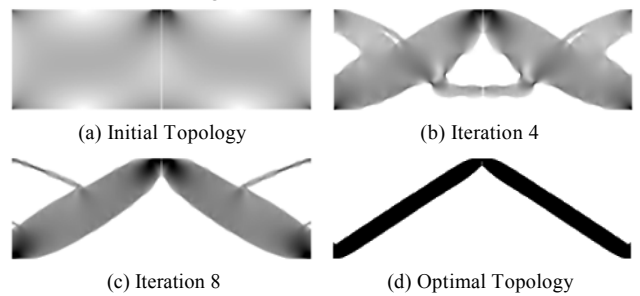


Fig.5 Case 2.1 $P_{ext}: 1.0 MN/m^2$

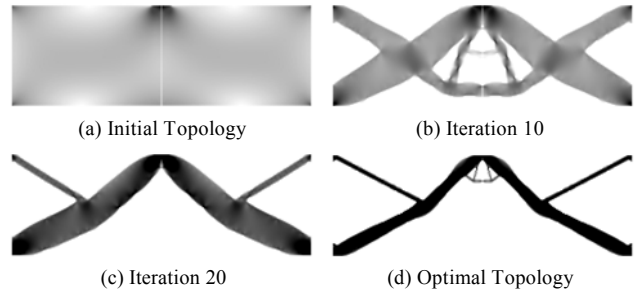


Fig.6 Case 2.2 $P_{ext}: 100.0 MN/m^2$

Fig.5, 6, 7に Case 2 の解析結果を示す. これより, 有限変形を表現した結果として, 設計荷重の大きさによって異なる位相が得られることがわかる. Fig.8に Case 2における相対標準偏差の推移を示す. 相対標準偏差は, 位相更新の途中段階においては激しく振動するものの, 得られた最適位相においては初期の位相と比べて相対標準偏差は減少しており, 等応力状態に近い位相が得られているといえる.

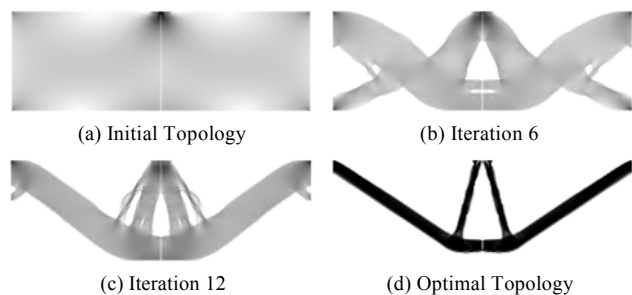


Fig.7 Case 2.3 $P_{ext} : 200.0MN/m^2$

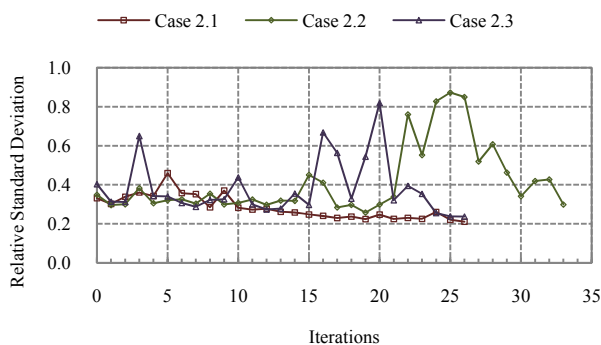


Fig.8 Case 2における相対標準偏差の推移

5 結語

本研究では, 粒子法による幾何学的非線形解析を用いた発見的手法に基づく位相最適化手法を提案した. 有限変形を伴う問題においては, 既往の研究で示されている解と同様の傾向をもち, なおかつグレースケール・チェッカーボードを含まない明確な位相が得られた.

参考文献

- 1) M. P. Bendsøe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, pp.197-224, 1988
- 2) M. P. Bendsøe, Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, Vol. 1, pp. 193-202,1989
- 3) 三井和男, 大崎純, 大森博司, 田川浩, 本間俊雄, 発見的手法による構造のフォームとシステム, *計算工学シリーズ4*, コロナ社, 2004
- 4) T. Buhl, C. B. W. Pedersen, O. Sigmund, Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 19, pp. 93-104, 2001
- 5) T. Sekimoto, H. Noguchi, Homologous topology optimization in large displacement and buckling problems, *JSME International Journal Series A*, Vol. 44, pp. 616-622, 2001
- 6) T. E. Bruns, D. A. Tortorelli, Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp. 3443-3459, 2001
- 7) 松井和己, 寺田賢二郎, 西脇真二, 石橋慶輝, 有限変形を伴う構造物に対する consistent トポロジー最適化手法, *Transactions of JSCES*, Paper No. 20010046, 2001
- 8) S. Cho, H. Jung, Design sensitivity analysis and topology optimization of displacement-loaded non-linear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, pp. 2539-2553, 2003
- 9) 鈴木克幸, 長嶋利夫, 萩原世也, メッシュフリー法, *計算力学レクチャーシリーズ4*, 丸善, 2006
- 10) 越塚誠一, 粒子法, *計算力学レクチャーシリーズ5*, 丸善, 2005
- 11) 三井和男, セルオートマトンによる構造システムの自律的生成と最適化, *日本建築学会構造系論文集*, No. 555, pp. 101-105, 2002
- 12) 三井和男, 周期的に変動する条件下における構造形態創生のための発見的手法, *日本建築学会構造系論文集*, No. 593, pp. 73-79, 2005
- 13) 加藤恭義, 光成友孝, 築山洋, *セルオートマトン法—複雑系の自己組織化と超並列処理—*, 森北出版, 1998
- 14) 真鍋匡利, 藤井大地, 粒子法を用いた位相最適化手法の提案, *コロキウム構造形態の解析と創生* 2008, pp. 41-46, 日本建築学会, 2008
- 15) 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992
- 16) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995
- 17) 大森博司, 崔昌禹, 等値線を利用した拡張 ESO 法による構造形態の創生, *日本建築学会構造系論文集*, No. 539, pp. 87-94, 2001
- 18) 大森博司, 崔昌禹, 拡張 ESO 法による構造形態の創生—多目的適応型構造とシェル構造への適用—, *日本建築学会構造系論文集*, No. 552, pp. 109-116, 2002
- 19) 大森博司, 崔昌禹, 佐々木睦朗, 拡張 ESO 法による構造形態の創生—三次元構造への拡張—, *日本建築学会構造系論文集*, No.576, pp. 79-86, 2004