

# CA-ESO 法を用いた位相最適化に関する研究

## STUDY ON TOPOLOGY OPTIMIZATION OF USING CA-ESO METHOD

間野 明人\*

Akito MANO

There are two methods for topology optimization of structures. One is heuristic method, the other is mathematical programming method. In this paper, the performance of a heuristic method is verified by comparing with mathematical programming methods. The CA-ESO method is used for one of heuristic method, and the density approaches are used for mathematical programming method. The CA-ESO method was proposed by Manabe and Fujii for the particle method. In this paper, this method is applied to finite element method in order to match a condition with density approaches. Several examples are shown to clarify the performance of the CA-ESO method.

**Keywords :** Cellular Automaton Method, Evolutionary Structural Optimization Method, Heuristic Method, Finite Element Method, Density Method

位相最適化, CA 法, ESO 法, 発見的的手法, 有限要素法, 密度法

### 1 はじめに

境界形状だけでなく、内部の穴の数や穴の形状まで最適化できる位相最適化手法は、機械部品の軽量化や建築分野の構造形態の創生手法として、幅広く応用が進んでいる。このような位相最適化手法は、大きく分けて、均質化法<sup>1)2)</sup>、密度法 (SIMP 法)<sup>3)4)</sup>などの数理計画法に基づく方法と、CA 法<sup>5)6)</sup>、ESO 法<sup>7)10)</sup>などの発見的手法に基づく方法がある。どちらの方法も多くの論文が発表されているが、これら2種の方法を同じ解析条件で比較した研究は見あたらない。

本研究では、粒子法による位相最適化手法で提案された CA 法と ESO 法を組み合わせた発見的手法 (CA-ESO 法)<sup>11)14)</sup>を有限要素法に適用し、数理計画法に基づく2つの密度法(要素に設計変数を持つ密度法<sup>1)15)</sup>と、節点に設計変数を持つ密度法 2 (OPTISHAPE-ES<sup>16)</sup>)との比較により、CA-ESO 法の有効性を検討する。

### 2 CA-ESO 法の有限要素法への適用

本研究では、図1に示す4節点アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法<sup>15)</sup>に、CA-ESO 法を適用する。この場合、要素内変位と要素内座標は次式で表される。

$$u(x) = \mathbf{N}u^e, \quad v(x) = \mathbf{N}v^e, \quad x = \mathbf{N}x^e, \quad y = \mathbf{N}y^e \quad (1)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \\ \mathbf{u}^e &= [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4], \quad \mathbf{v}^e = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4] \\ \mathbf{x}^e &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4], \quad \mathbf{y}^e = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4] \end{aligned} \quad (2)$$
$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

有限要素法の定式化は一般的なもので、要素内積分はガウス積分の2点積分で行い、シアールッキングを防ぐため、せん断ひずみ成分は1点積分で行っている。

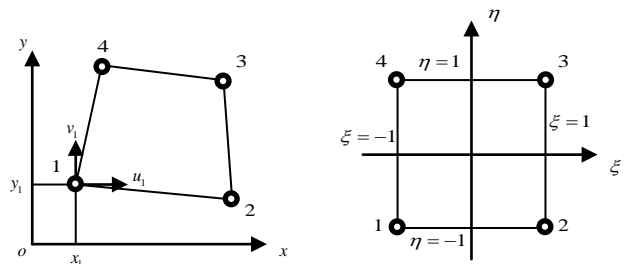


図1 4節点アイソパラメトリック要素

CA-ESO法は、大森らの拡張 ESO 法の考え方をういて要素を消去し、また CA 法の考え方をういて要素を復活することで、最適位相を求めるものである。図2は、本手法の計算フローを示したものである。

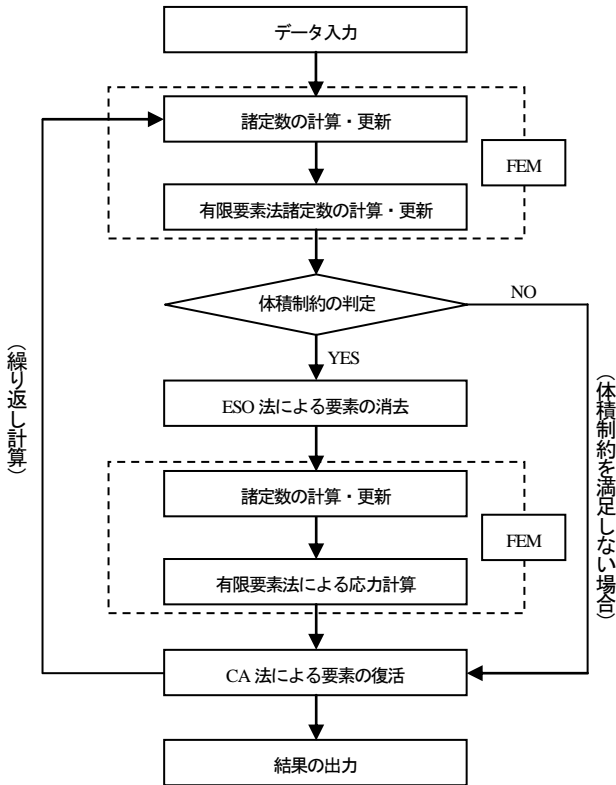


図2 CA-ESO法による位相最適化計算のフロー

まず、ESO法の敏感数(要素消去の条件)として、次式で定義される von Mises 応力  $\sigma^{VM}$  を用いる。

$$\sigma^{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6\tau_{xy}^2} \quad (3)$$

ESO法では、各要素の敏感数が与えられた閾値よりも小さくなるとその要素が消去される。大森らの拡張 ESO 法では、この敏感数(ここでは応力  $\sigma^{VM}$ )の閾値  $X_{cr}$  は、

応力平均値  $\sigma_{cr}$  と平均値からの偏差平均  $\phi$  を用いて次式で定義される。

$$X_{cr} = \sigma_{cr} - \eta \cdot \phi \quad (4)$$

ここに、 $\eta$  は適当に与えられる制御変数である。また、 $\sigma_{cr}$  と  $\phi$  は次式により定義される。

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^{VM}, \quad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_i^{VM} - \sigma_{cr})^2}{N}} \quad (5)$$

ここに、 $N$  は要素数を示す。

ただし、有限要素法では、要素を消去すると計算が不安定になるため、消去された要素のヤング係数を  $1/10^3$  にすることで対応する。(4)式の  $X_{cr}$  は、応力の不均等性が高い場合は緩い閾値となり、応力が平均値に均等化されてくると平均値に近い閾値となる。また、制御変数  $\eta$  が大きくなると粒子が消去されにくくなり、 $\eta$  が小さくなると消去されやすくなる。

次に、消去された要素を復活させる条件として CA 法の考え方をういる。CA 法は、各要素の敏感数にしたがってその要素の近傍要素の生滅を決めるもので、ここでは、各要素の  $\sigma^{VM}$  が  $\sigma_{cr}$  より大きい場合にその要素の近傍要素を発現(復活)させるものとする。

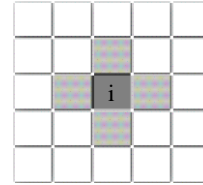


図3 i番目の要素と辺を共有する要素 (Neumann 近傍)

また、ESO法の消去と CA 法の復活によって、要素数比  $R_N$  が目標の要素数比  $R_N^{obj}$  以下になった場合は、要素数が目標数以上になるまで ESO 法による消去を飛ばすようにしている。設計領域の体積制約を満足しない場合は、CA 法による要素の復活のみを繰り返し、ESO 法による過剰な要素の消去を防ぐ。

### 3 解析例

#### 3.1 CA-ESO法の有効性の検討

まず、図3に示す解析モデルで解析を行う。ただし、ヤング係数  $E = 206 \text{ kN/m}^2$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$ 、要素分割数は  $120 \times 75$  とする。

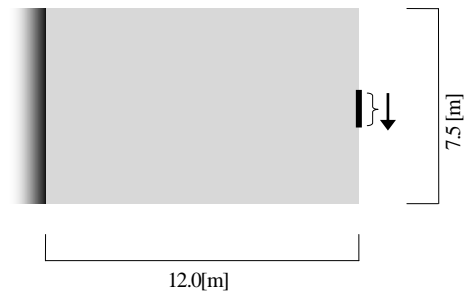


図4 解析モデル1

図5は、(4)式の制御変数  $\eta$  の影響について調査したものである。 $\eta$  の値が大きくなると目標の要素数比に到達せずに収束することがわかる。

図6は、 $\eta = 1.0$  の場合で、図2に示す最適化計算ステップ数と位相の変化の関係を示したものである。図よりほぼ46ステップで最終位相に収束しており、それ以降のステップは変化があまり見られないことがわかる。

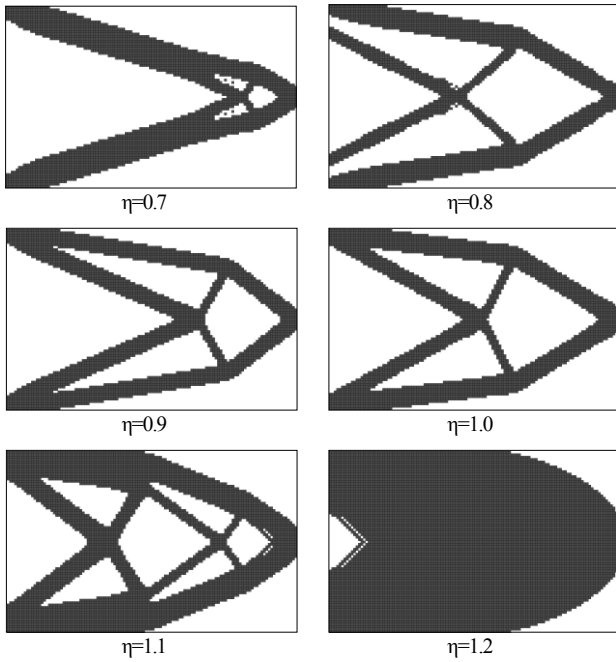


図5 制御変数 $\eta$ の影響に関する調査

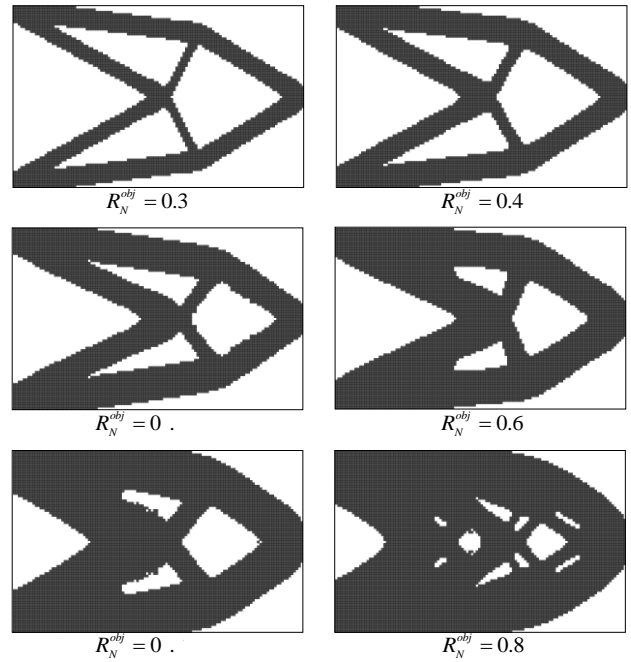


図7 各要素数比制約における位相

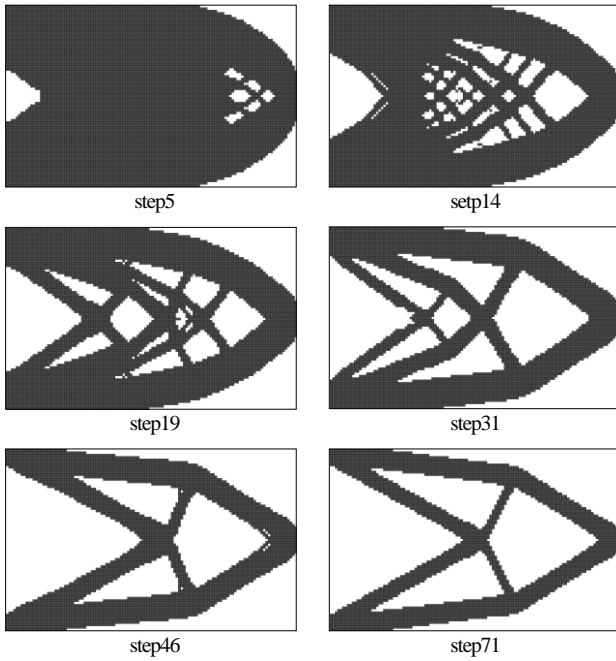


図6 最適化ステップ数と位相の変化

図7は、要素数比  $R_N^{obj}$  を 0.3~0.8 に変化させた場合の位相を示したものである。図に示すように、要素数比の制約が 0.8 になると、異なる位相が求まることがわかる。

### 3.2 CA-ESO 法と密度法との比較

次に、図4と、荷重の位置と支持条件を変えた図8、図9の解析モデルで、CA-ESO 法と、数値計画法に基づく2つの密度法との比較を行う。

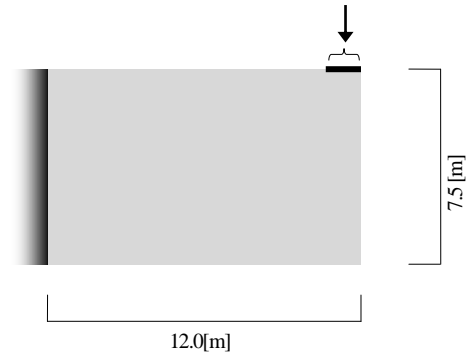


図8 解析モデル2

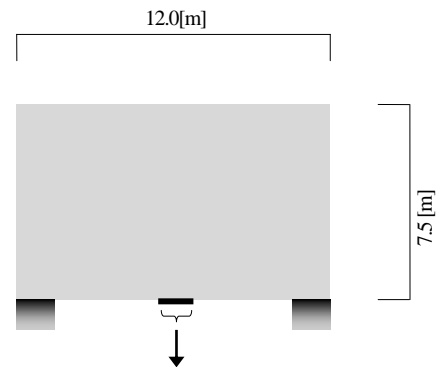
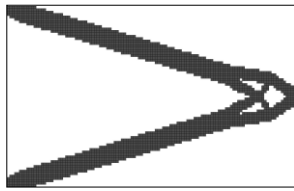
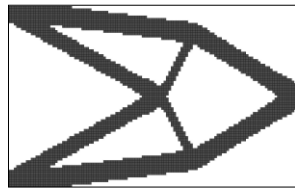


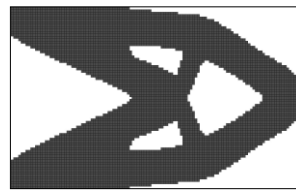
図9 解析モデル3



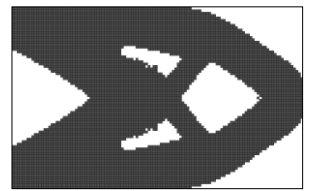
$R_N = 0.2166$ , compliance=4.088  
[CA-ESO 法]



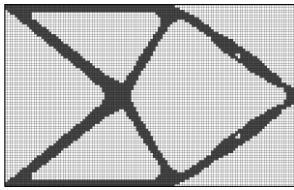
$R_N = 0.3294$ , compliance=2.324  
[CA-ESO 法]



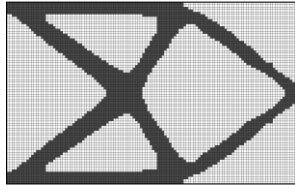
$R_N = 0.6030$ , compliance=1.374  
[CA-ESO 法]



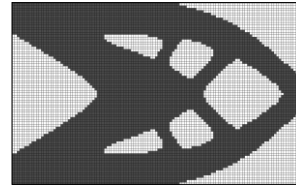
$R_N = 0.7069$ , compliance=1.182  
[CA-ESO 法]



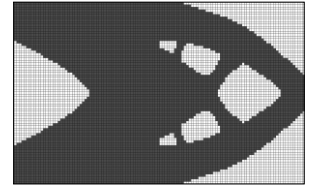
質量制約 = 0.2166  
[密度法 1]



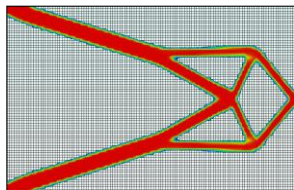
質量制約 = 0.3294  
[密度法 1]



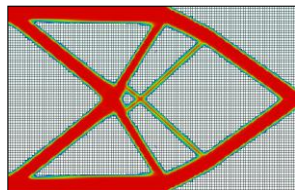
質量制約 = 0.6030  
[密度法 1]



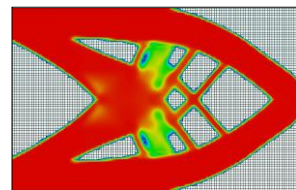
質量制約 = 0.7069  
[密度法 1]



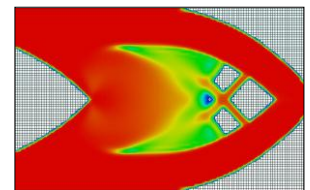
Volume制約 = 0.22  
[密度法 2]



Volume制約 = 0.33  
[密度法 2]



Volume制約 = 0.60  
[密度法 2]



Volume制約 = 0.71  
[密度法 2]

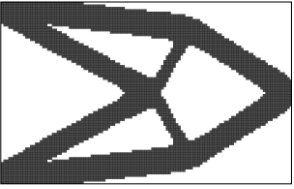
要素数比制約 0.2

要素数比制約 0.3

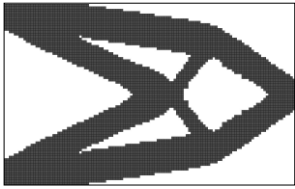
要素数比制約 0.6

要素数比制約 0.7

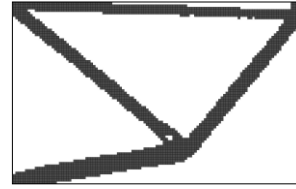
図 10 解析モデル 1 での比較



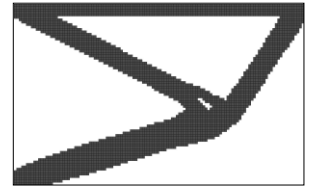
$R_N = 0.4204$ , compliance=1.854  
[CA-ESO 法]



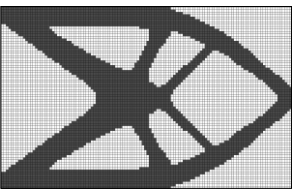
$R_N = 0.5124$ , compliance=1.581  
[CA-ESO 法]



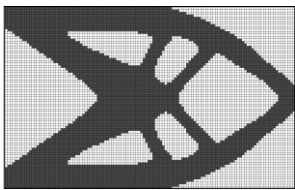
$R_N = 0.2141$ , compliance=3.928  
[CA-ESO 法]



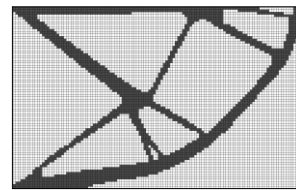
$R_N = 0.3159$ , compliance=2.622  
[CA-ESO 法]



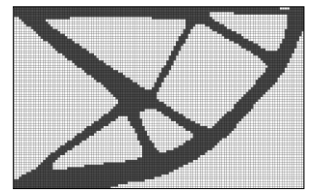
質量制約 = 0.4204  
[密度法 1]



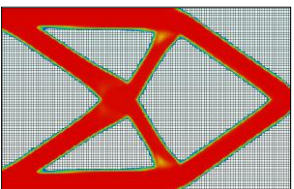
質量制約 = 0.5124  
[密度法 1]



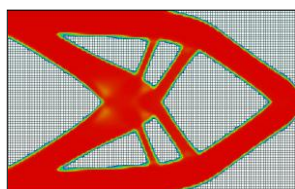
質量制約 = 0.2141  
[密度法 1]



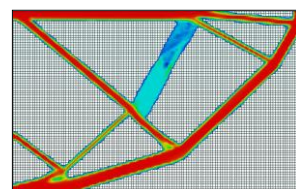
質量制約 = 0.3159  
[密度法 1]



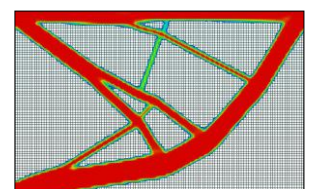
Volume制約 = 0.42  
[密度法 2]



Volume制約 = 0.51  
[密度法 2]



Volume制約 = 0.21  
[密度法 2]



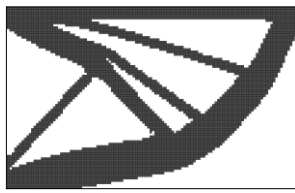
Volume制約 = 0.32  
[密度法 2]

要素数比制約 0.4

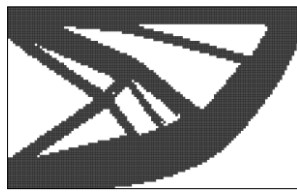
要素数比制約 0.5

要素数比制約 0.2

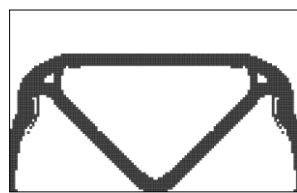
要素数比制約 0.3



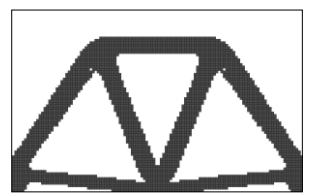
$R_v = 0.4194$ , compliance=1.892  
[CA-ESO 法]



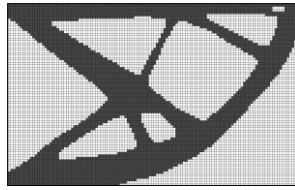
$R_v = 0.5156$ , compliance=1.545  
[CA-ESO 法]



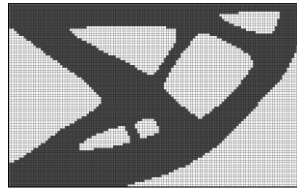
$R_v = 0.2062$ , compliance=0.020  
[CA-ESO 法]



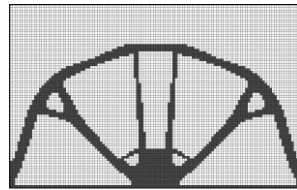
$R_v = 0.3131$ , compliance=0.008  
[CA-ESO 法]



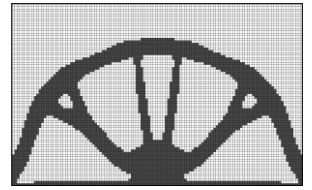
質量制約=0.4194  
[密度法 1]



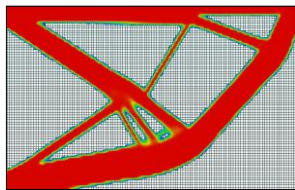
質量制約=0.5156  
[密度法 1]



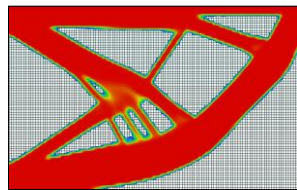
質量制約=0.2062  
[密度法 1]



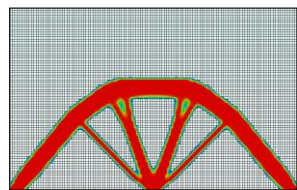
質量制約=0.3131  
[密度法 1]



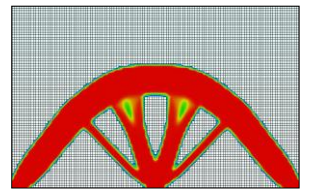
Volume制約=0.42  
[密度法 2]



Volume制約=0.52  
[密度法 2]



Volume制約=0.21  
[密度法 2]



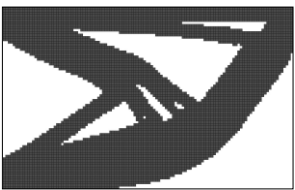
Volume制約=0.31  
[密度法 2]

要素数比制約 0.4

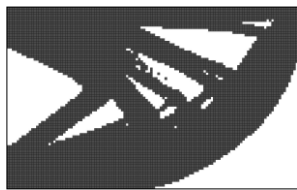
要素数比制約 0.5

要素数比制約 0.2

要素数比制約 0.3



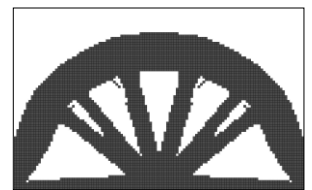
$R_v = 0.6108$ , compliance=1.410  
[CA-ESO 法]



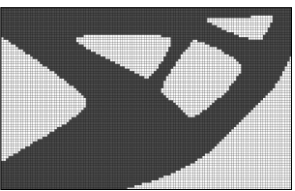
$R_v = 0.7074$ , compliance=1.249  
[CA-ESO 法]



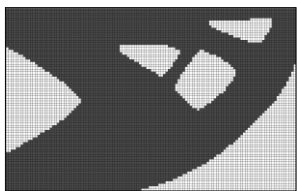
$R_v = 0.4167$ , compliance=0.006  
[CA-ESO 法]



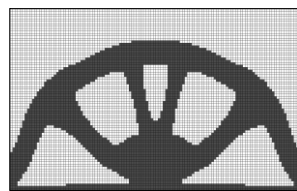
$R_v = 0.5062$ , compliance=0.005  
[CA-ESO 法]



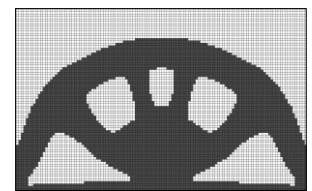
質量制約=0.6108  
[密度法 1]



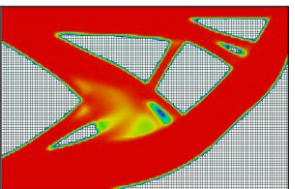
質量制約=0.7074  
[密度法 1]



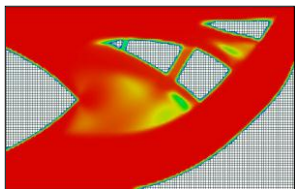
質量制約=0.4167  
[密度法 1]



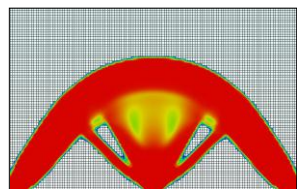
質量制約=0.5062  
[密度法 1]



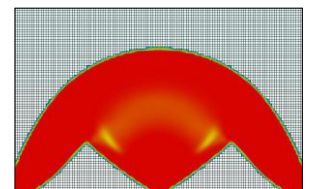
Volume制約=0.61  
[密度法 2]



Volume制約=0.71  
[密度法 2]



Volume制約=0.42  
[密度法 2]



Volume制約=0.51  
[密度法 2]

要素数比制約 0.6

要素数比制約 0.7

要素数比制約 0.4

要素数比制約 0.5

図 11 解析モデル 2 での比較

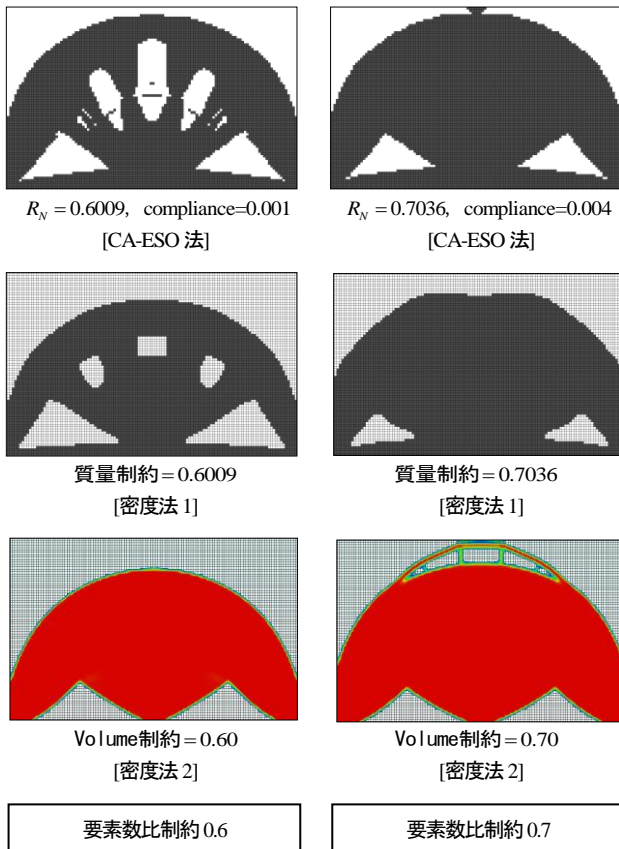


図12 解析モデル3での比較

図10, 11, 12は, 図4, 図8, 図9の解析モデルで, 要素数比(密度法1では質量比, 密度法2(OPTISHAPE-ES)ではVolume)の制約を変化させた場合(要素数比制約0.2~0.7)の最適位相を, CA-ESO法と, 2つの密度法で, それぞれ比較したものである。

なお, CA-ESO法の場合, 目標とする要素数比に収束しない場合があるため, 若干の誤差が生じる。また, 密度法1の質量制約と密度法2(OPTISHAPE-ES)のVolume制約は, CA-ESO法の最終ステップの要素数比に対応したものとしている。

図10, 11, 12より, CA-ESOの最適位相と密度法1, 密度法2(OPTISHAPE-ES)の最適位相は, 必ずしも一致しないものの, 同様な位相となることがわかる。また, 2つの密度法の位相がほぼ同じであり, 要素数比制約が変化しても最適位相は変化しないが, CA-ESO法では, 要素数比の制約値により位相が変化することがわかる。

#### 4 まとめ

本研究では, 粒子法による位相最適化手法<sup>11)~14)</sup>で提案されたCA-ESO法を有限要素法に適用し, 数理計画法に基づく2つの密度法(要素に設計変数を持つ密度法<sup>15)</sup>と, 節点に設計変数を持つ密度法<sup>2(OPTISHAPE-ES<sup>16)</sup>)との比較により, CA-ESO法の有効性を検討した。その結果, 有限要素法に適用したCA-ESO法では, 得られる位相が,</sup>

要素消去の閾値を制御するパラメータ $\eta$ に依存すること, 要素数比の設定値が大きくなると位相が変化することなどがわかった。

また, 密度法との比較により, CA-ESOの位相の変化に関する制御変数 $\eta$ や要素数比に適切な値を与えることができれば, 簡単なアルゴリズムのCA-ESO法でも密度法と同様な位相を得ることができた。

#### 参考文献

- 1) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 2) K. Suzuki and N. Kikuchi, A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 3) Zhou, M. and Rozvany, G.L.N., The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **89**, 309-336, 1991
- 4) Yang, R.J. and Chuang, C.H., Optimal topology design using linear programming, Computers & Structures, **52**(2), 265-275, 1994
- 5) 北 栄輔, 豊田哲也, 野村壮史, セルラ・オートマタを用いた構造物の設計, 日本機械学会論文集 **A, 64** (622), pp.1717-1724, 1998.
- 6) 三井和男, セルオートマトンによる構造システムの自律的生成と最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.555, 2002.
- 7) Xie, Y.M., GP. Steven, Evolutionary Structural Optimization for Dynamic Problems. Computers and Structures, Vol. 58, No. 6: pp. 1067-1073, 1996.
- 8) 大森博司, 崔昌禹, 等値線を利用した拡張 ESO 法による構造形態の創生. 日本建築学会構造系論文集, Vol. , No. 539: pp. 87-94, 2001.
- 9) 大森博司, 崔昌禹, 拡張 ESO 法による構造形態の創生-多目的適応型構造とシェル構造への適応-. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 552, No. : pp. 109-116, 2002.
- 10) 大森博司, 崔昌禹, 佐々木睦朗, 拡張 ESO 法による構造形態の創生-三次元構造への拡張-, 日本建築学会構造系論文集, pp. 79-86, 2004
- 11) 真鍋匡利, 藤井大地, 粒子法を用いた位相最適化手法の提案, コロキウム構造形態の解析と創生2008, pp. 41-46, 日本建築学会, 2008
- 12) 真鍋匡利, 藤井大地, 粒子法を用いた弾性体の位相最適化 CA-ESO 法の適用, 日本建築学会中国支部研究報告集, 201, 2009. 3
- 13) 真鍋匡利, 藤井大地, 粒子法を用いた有限変形を伴う弾性体のトポロジー最適化, 計算工学講演会論文集, 2009.5
- 14) 真鍋匡利, 藤井大地, 粒子法を用いた発見的手法に基づく有限変形を伴う弾性体のトポロジー最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集(東北) 構造 I, pp.349-350, 2009.8
- 15) 藤井大地, 「建築デザインと最適構造」, 丸善, 2008
- 16) 株式会社くいんと, 「教育用位相最適化プログラム OPTISHAPE-ES」