力法による骨組構造の形状最適化

SHAPE OPTIMIZATION OF FRAME STRUCTURES USING TRACTION METHOD

垣田　仁*

Jin KAKITA

In this paper, the traction method is applied to shape optimization of frame structures. The traction method was proposed by Azegami, but in the present method, the sensitivity analysis is different from Azegami's one. The compliance of structure is chosen for objective function, and the coordinates of all nodes of beam elements are chosen for design variables. The method of sensitivity analysis is similar to a method used in topology optimization, but in this case the sensitivity of coordinate transformation matrix and length of elements is necessary. The effectiveness of the present method is verified by comparing with methods using SLP or CONLIN. Several numerical examples of 2-D frame structures are shown to demonstrate the effectiveness of the present method.

Keywords: *Shape optimization, Traction method, Sensitivity analysis, SLP method, CONLIN method, Frame structure*

形状最適化，力法，感度解析，逐次線形計画法，凸線形化法，骨組構造

１．はじめに

近年，構造解析および施工技術の発達により，幾何学にとらわれないより不定形で自由な形態の建築物が設計・建築されるようになってきている．また，シェル構造等では，意匠設計者の求める恣意的な形態に対して，形状最適化手法を適用して形状修正を行う方法[1)-5)]が発展してきている．

シェル構造の形状最適化問題を扱った研究は，1950 年代に線形計画法，1960 年代に非線形計画法が開発されて以来，多くの研究成果が挙げられている[1),4)]．我が国においても，シェル構造の曲げモーメントの最小化を目的とした大森ら[6),7)]の研究，座屈荷重の最大化を目的とした山本ら[8),9)]，小河ら[10)]の研究，コンプライアンス最小化を目的とした Ohsaki ら[11),12)]の研究などがある．また，これらの研究を背景に，ひずみエネルギーの感度係数に基づいて自由曲面シェルの形状を決定する手法が実設計に応用されている[13)]．

一方，形状最適化技術は，機械分野の部品等の形状設計にも利用されており，これまで有限要素法を用いた様々な形状最適化手法が提案されてきた[14)]．有限要素法による形状最適化手法として最も原始的な方法は，境界節点座標を設計変数とする最適化問題を数理計画法によって解く方法[15)]であるが，この方法では，形状を記述する自由度（設計変数）を有限要素モデルの自由度よりも少なく制限しないと境界形状が波打つなどの問題が生じる[16)]．このため，境界形状の自由度を制限する方法として，形状を B-スプライン曲線やベジエ曲線で与える方法[17),18)]や，形状を基本変形モードの線形和で表し，その係数を設計変数に選ぶ方法[19)-21)]（ベーシスベクトル法）などが提案されている．しかしながら，形状の自由度を制限する方法では，形状のコントロールポイントや基本変形モードをユーザーが設定する必要があり，一般ユーザーにとっては扱いにくい．これに対して，畔上，下田ら[22)-24)]は，形状の自由度を制限せずに形状最適化を行う方法を提案した．この方法は，目的関数の節点座標に関する感度係数に負号を付けた値を節点荷重として加え，その時の変形にしたがって形状を変更していく方法で，力法（Traction method）と呼ばれている．この方法では，境界形状の波打ち現象が生じないことが証明されており，弾性変形にしたがって形状を変更していくため，メッシュのゆがみが生じにくいというメリットがある．

最近，建築分野では，連続体のシェル構造のみならず，骨組構造に対してもより自由な形態を模索する傾向があり，骨組構造の形態にも構造的合理性を付与できる手法が望まれている．そこで，本研究では，畔上らによって提案された力法を，建築骨組の形状最適化問題に適用する方法を示す．ただし，畔上らの方法では，目的関数の感度解析に随伴変数法が用いられているが，本研究では，目的関数をコンプライアンスとし，位相最適化手法等で一般的に用いられている感度解析法を採用する．本方法は，佐々木[13)]が，ひずみエネルギーの感度解析として用いている方法と同様であるが，本論文では，感度係数の導出法，計算法について詳細に示す．なお，本論文

*　近畿大学大学院システム工学研究科　博士前期課程

Master's Course, Graduate of System Engineering Kinki University.

で随伴変数法による感度解析を用いない理由は，定式化が理解しやすく，プログラム実装も容易であるためである．また，本論文では，力法による形状最適化手法と SLP 法（逐次線形計画法）および CONLIN 法（凸線形化法）による同様の手法との比較により，骨組構造の形状最適化でも，SLP 法，CONLIN 法では，境界の波うち現象が生じ，一般の骨組構造に対しても複雑な最適形状が得られやすいのに対して，力法では，構造デザインに適用しやすいより滑らかな形状が得られることを示す．なお，能井，藤井 [25]が提案した力法の原理を用いた形状最適化手法は，コンプライアンスの節点座標に関する感度係数の代わりに節点変位を用いるもので，シェル構造のように一方向のみの形状変更で最適化が可能な問題には適しているが，一般の骨組構造のように，最適化の過程で節点座標に関する感度係数が正負双方向に変化するような問題には適用できない．

以下，本論文第 2 章では，最適化問題の定式化と感度解析法を示す．第 3 章では，力法による骨組構造の形状最適化の方法を示す．第 4 章では，いくつかの解析例に対して，力法と SLP 法，CONLIN 法の比較を行い，力法の有効性を検証する．第 5 章では，以上のまとめを述べる．

２．最適化問題の定式化と感度解析法

2.1　最適化問題の定式化

本論文では，２次元骨組の形状最適化問題として，以下のような問題を考える．ただし，２次元骨組はベルヌーイ・オイラーの仮定にもとづくはり要素によって離散化するものとする [26]．

目的関数

$$C(\mathbf{q}) = \mathbf{f}^T\mathbf{d} = \mathbf{d}^T\mathbf{K}\mathbf{d}$$

を最小にする節点座標

$$\mathbf{q} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_i, y_i, \cdots, x_n, y_n\}$$

を求める．

ただし，要素総長さの制約条件

$$L = \sum_{i=1}^{m} l_i \le L^U \tag{1}$$

を満足するものとする．

ここに，C はコンプライアンス，$\mathbf{f}$ は節点外力ベクトル，$\mathbf{d}$ は節点変位ベクトル，$\mathbf{K}$ は全体剛性マトリクス，x_i, y_i は i 番目節点の座標値，L は要素の総長さ，l_i は i 番目要素の長さ，L^U は要素総長さの制約値，n は座標変更を行う節点数，m は要素数である．ただし，荷重は節点への集中荷重のみとし，分布荷重は考慮しない．また，支持点の節点座標は変動しないものとする．

(1)式を SLP 法で解く場合は，(1)式をテーラー展開し，節点座標の増分値を設計変数とする次式の問題に変換する．

目的関数

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial C^{(k)}}{\partial q_j} \Delta q_j$$

を最小にする節点座標の増分

$$\Delta\mathbf{q} = \{\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta x_2, \Delta y_2, \cdots, \Delta x_i, \Delta y_i, \cdots, \Delta x_n, \Delta y_n\}$$

を求める．

ただし，要素総長さの制約条件

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial L^{(k)}}{\partial q_j} \Delta q_j \le L^U - L^{(k)} \tag{2}$$

を満足するものとする．

ただし，$C^{(k)}, L^{(k)}$ は，繰り返し回数が k ステップ時のコンプライアンスと要素総長さを表す．(2)式の問題をシンプレックス法等の線形計画法で繰り返し解き，$\Delta\mathbf{q}$ が十分小さくなる解を最適解とする．ただし，SLP 法では，設計変数の増分にムーブリミット（上下限値）を設定し，このムーブリミットを徐々に絞り込んで解を強制的に収束させる方法を用いる．

一方，CONLIN 法では，感度係数が正の場合は(2)式と同様にテーラー展開し，感度係数が負の場合は設計変数の逆数でテーラー展開する．そして，このように線形化された問題を双対法と SQP 法（逐次２次計画法）を用いて解く．SLP 法は解が発散しにくい反面，対称問題でも非対称な最適解が得られやすく，CONLIN 法では非線形性が強い問題では解が発散しやすいが，対称問題では対称な最適解が得られやすい特徴がある．なお，文献 27)に以上の CONLIN 法の詳しい定式化が示され，付属 CD に SLP 法および CONLIN 法の FORTRAN ソースプログラムが含まれているので参照されたい．

2.2　感度解析法

次に，(2)式のコンプライアンス C の節点座標に関する微分（感度係数）の計算法を示す．

まず，(1)式の目的関数の関係式より，

$$\frac{\partial C}{\partial q_j} = \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j}\mathbf{d} + 2\mathbf{d}^T\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial q_j} \tag{3}$$

また，次式の剛性方程式

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \tag{4}$$

の両辺を q_j で微分すると，

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j}\mathbf{d} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial q_j} = \mathbf{0} \tag{5}$$

ここで，(5)式の関係を(3)式に代入すると，次式が得られる．

$$\frac{\partial C}{\partial q_j} = -\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j}\mathbf{d} \tag{6}$$

ここで，全体剛性マトリクス $\mathbf{K}$ は，要素剛性マトリクスを用いて次のように表すことができる．

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{L}_i^T \mathbf{T}_i^T \mathbf{k}_i^e \mathbf{T}_i \mathbf{L}_i \tag{7}$$

ここに，$\mathbf{T}_i$ は i 番目要素の座標変換マトリクス，$\mathbf{k}_i^e$ は i 番目要素の要素固有の座標系における要素剛性マトリクスである．また，$\mathbf{L}_i$ は i 番目要素の剛性マトリクスを全体剛性マトリクスに割り当てる 0 と 1 の成分で構成される収集行列 [28]で，次式の関係がある．

$$\mathbf{d}_i^e = \mathbf{L}_i\mathbf{d} \tag{8}$$

ただし，$\mathbf{d}_i^e$ は要素の全体座標系の節点変位ベクトルである．

図 1 に示すように s 番目節点の座標が変化すると，s 番目節点に接続する $s_1 \sim s_4$ 番目の要素のみが変化し，その他の要素は変化しない．したがって，この場合，s 番目節点の x, y 座標に関する(6)式の感度係数は，(7)，(8)式を考慮すると，

$$\frac{\partial C}{\partial x_s} = -\sum_{i=s_1}^{s_4}\left\{\mathbf{d}_i^{eT}\frac{\partial\left(\mathbf{T}_i^T\mathbf{k}_i^e\mathbf{T}_i\right)}{\partial x_s}\mathbf{d}_i^e\right\}$$
$$\frac{\partial C}{\partial y_s} = -\sum_{i=s_1}^{s_4}\left\{\mathbf{d}_i^{eT}\frac{\partial\left(\mathbf{T}_i^T\mathbf{k}_i^e\mathbf{T}_i\right)}{\partial y_s}\mathbf{d}_i^e\right\} \tag{9}$$

ただし，x_s, y_s は，s 番目節点の x, y 座標を示す．ここで，(9)式の右辺の括弧内の微分は次式から計算される．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\mathbf{T}_i^T\mathbf{k}_i^e\mathbf{T}_i\right)}{\partial x_s} &= \mathbf{T}_i^T\frac{\partial\mathbf{k}_i^e}{\partial x_s}\mathbf{T}_i + 2\mathbf{T}_i^T\mathbf{k}_i^e\frac{\partial\mathbf{T}_i}{\partial x_s}\\
\frac{\partial\left(\mathbf{T}_i^T\mathbf{k}_i^e\mathbf{T}_i\right)}{\partial y_s} &= \mathbf{T}_i^T\frac{\partial\mathbf{k}_i^e}{\partial y_s}\mathbf{T}_i + 2\mathbf{T}_i^T\mathbf{k}_i^e\frac{\partial\mathbf{T}_i}{\partial y_s}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

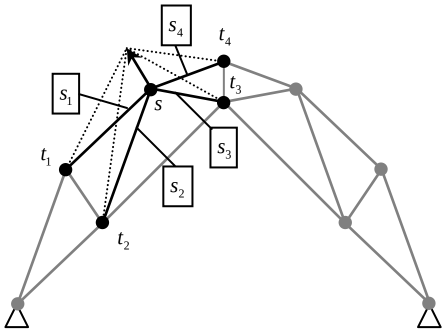


図 1　骨組構造における節点移動

2.3　2 次元骨組の感度係数計算法

次に，2 次元骨組について，(9)式の計算法を示す．いま，i 番目要素の両端の節点番号を s と t_r とする（図 1 の場合，$i=s_1\sim s_4$，$r=1\sim 4$）．このとき，i 番目要素の剛性マトリクス，座標変換マトリクス，節点変位ベクトルは次式となる．

$$
\mathbf{k}_i^e = \begin{bmatrix}
\frac{E_iA_i}{l_i} & & & & & \text{Sym.}\\
0 & \frac{12E_iI_i}{l_i^3} & & & & \\
0 & \frac{6E_iI_i}{l_i^2} & \frac{4E_iI_i}{l_i} & & & \\
-\frac{E_iA_i}{l_i} & 0 & 0 & \frac{E_iA_i}{l_i} & & \\
0 & -\frac{12E_iI_i}{l_i^3} & -\frac{6E_iI_i}{l_i^2} & 0 & \frac{12E_iI_i}{l_i^3} & \\
0 & \frac{6E_iI_i}{l_i^2} & \frac{2E_iI_i}{l_i} & 0 & -\frac{6E_iI_i}{l_i^2} & \frac{4E_iI_i}{l_i}
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix}
\cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0\\
0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\tag{11}
$$

$$
\mathbf{d}_i^e = \left\{u_s \quad v_s \quad \theta_s \quad u_{t_r} \quad v_{t_r} \quad \theta_{t_r}\right\}^T
$$

ただし，

$$
l_i = \sqrt{\left(x_{t_r}-x_s\right)^2+\left(y_{t_r}-y_s\right)^2},\quad \cos\alpha_i = \frac{x_{t_r}-x_s}{l_i},\quad \sin\alpha_i = \frac{y_{t_r}-y_s}{l_i} \tag{12}
$$

ここに，E_i, A_i, I_i は，i 番目要素のヤング係数，断面積，断面 2 次モーメントである．

したがって，(10)式を計算するために必要な微分計算は次式となる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l_i}{\partial x_s} &= -\frac{x_{t_r}-x_s}{l_i} = -\cos\alpha_i\\
\frac{\partial l_i}{\partial y_s} &= -\frac{y_{t_r}-y_s}{l_i} = -\sin\alpha_i
\end{aligned}
\tag{13a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{1}{l_i}\right) = -\frac{1}{l_i^2}\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_s}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{1}{l_i}\right) = -\frac{1}{l_i^2}\left(\frac{\partial l_i}{\partial y_s}\right)\\
&\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{1}{l_i^2}\right) = -\frac{2}{l_i^3}\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_s}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{1}{l_i^2}\right) = -\frac{2}{l_i^3}\left(\frac{\partial l_i}{\partial y_s}\right)\\
&\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{1}{l_i^3}\right) = -\frac{3}{l_i^4}\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_s}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{1}{l_i^3}\right) = -\frac{3}{l_i^4}\left(\frac{\partial l_i}{\partial y_s}\right)
\end{aligned}
\tag{13b}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\cos\alpha_i}{\partial x_s} = -\frac{x_{t_r}-x_s}{l_i^2}\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_s}\right) - \frac{1}{l_i},\quad \frac{\partial\cos\alpha_i}{\partial y_s} = -\frac{x_{t_r}-x_s}{l_i^2}\left(\frac{\partial l_i}{\partial y_s}\right)\\
&\frac{\partial\sin\alpha_i}{\partial x_s} = -\frac{y_{t_r}-y_s}{l_i^2}\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_s}\right),\quad \frac{\partial\sin\alpha_i}{\partial y_s} = -\frac{y_{t_r}-y_s}{l_i^2}\left(\frac{\partial l_i}{\partial y_s}\right) - \frac{1}{l_i}
\end{aligned}
\tag{13c}
$$

以上の式から(11)式が計算され，これにより(10)式を計算することができる．

一方，要素総長さ L の感度係数は，次式から計算できる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_s} &= \sum_{i=s_1}^{s_4}\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_s}\right) = -\sum_{r=1}^{4}\left(\frac{x_{t_r}-x_s}{l_i}\right)\\
\frac{\partial L}{\partial y_s} &= \sum_{i=s_1}^{s_4}\left(\frac{\partial l_i}{\partial y_s}\right) = -\sum_{r=1}^{4}\left(\frac{y_{t_r}-y_s}{l_i}\right)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

以上により，(2)式の感度係数を効率よく計算できる．

3．力法による形状最適化

次に，力法による形状最適化の方法を示す．

SLP 法では，(2)式をシンプレックス法などの線形計画法（LP 法）で解き，節点座標の最適増分 $\Delta\mathbf{q}$ を求めるが，力法では，まず，目的関数の各節点の x, y 座標に関する感度係数を求め，この感度係数に負号を付けたものを各節点の x, y 方向荷重として加える．ただし，該当する節点が x または y 方向のみの移動となる場合は，移動可能方向のみの感度係数を求め，その方向のみの荷重を加えることになる．そして，線形弾性解析によって各節点の変位を求め，この変位に適当な倍率を掛けたものを節点座標の増分 $\Delta\mathbf{q}$ とする．なお，変位に掛ける倍率は，逐次線形計画法における設計変数増分のムーブリミットと同様の意味を持つ．以上の計算を繰り返し，節点座標の増分がほぼ 0 になる解を最適解とする．なお，力法は，一種の勾配法であり [22)-24)]，局所解の可能性はあるにしても，収束解は目的関数の最小解を与えると考えられる．

形状変更の倍率としては，本論文では，要素長さの平均値，

$$
\bar{l} = \frac{L}{m} = \sum_{i=1}^{m} l_i \Big/ m \tag{15}
$$

を基準とし，初期（第 1 ステップ）の節点座標増分の最大値（絶対値）が $\alpha\bar{l}$ となるように変更倍率を設定する．また，最適化の総計算ステップ数を N_{OP} とすると，N_{OP}/β までは，変更倍率（$\alpha\bar{l}$ ）の絞り込みは行わず，それ以降のステップでは $\alpha\bar{l}/\gamma^{(k-N_{OP}/\beta)}$ となるよう絞り込みを行う．ただし，k はステップ数，γ は 1～1.1 の範囲で与えるものとする．なお, 本論文では，α は入力データとして与え，$\beta=3$，$\gamma=1.01$ としている．ただし，β と γ の値は，基本的な例題で，繰り返し計算回数を 50～100 回とし，安定的に最適解に収束する値を試行錯誤で求めたものである．

また，力法においては，要素総長さの制約条件は，目的関数へのペナルティ関数として与えるものとする．すなわち，第 k ステップの目的関数 $f_{obj}^{(k)}$ を次式のように置く．

$$\boxed{f_{obj}^{(k)} = C^{(k)} + wC^{(0)}\left(\frac{L^{(k)}}{L^U} - 1\right)^2 \qquad ;\text{if} \quad \frac{L^{(k)}}{L^U} \le 1 \quad \text{then} \quad w = 0} \qquad (16)$$

ここに，$C^{(0)}$ は初期形状のコンプライアンス，w は重み係数である．なお，本論文では，w は入力データとして与えている．

図 2 は，力法による解析のフローを示したものである．準備計算としては，各節点に接続する要素数(図 1 の s 番目節点の場合は 4)，要素番号（図 1 の $s_1 \sim s_4$），各要素の片端の節点番号（図 1 の $t_1 \sim t_4$）を調べておくと計算効率が向上する．

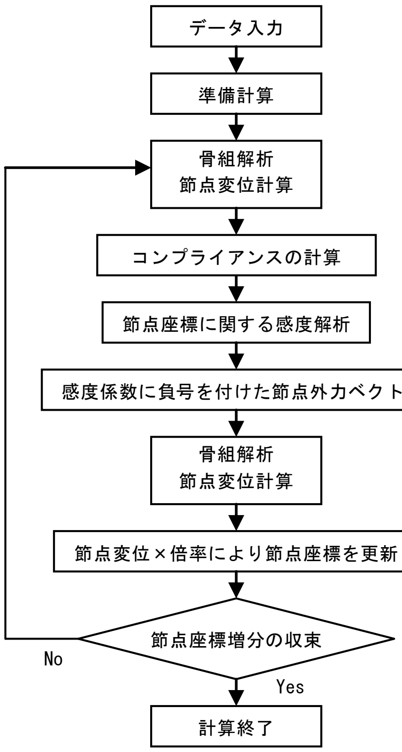


図 2　力法の解析フロー

4．解析例

4.1　厳密解が得られる解析例

図 3 は，単純支持された三角形トラスの剛性を最大化（コンプライアンスを最小化）する高さ h（節点 C の y 座標）を求める問題を示す．本問題は静定問題であるため，仮想仕事法によりコンプライアンスおよびその感度係数を陽な式で求めることができる．

まず，コンプライアンス C は図 3 に示す表記を用いると次式のように求められる．

$$C = -P \cdot v_C = \frac{P^2}{EAh^2}\left(\frac{\left(h^2 + (l/2)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{l^3}{16}\right) \qquad (17)$$

また，高さ h に関する感度係数は次式となる．

$$\frac{\partial C}{\partial h} = -\frac{P^2}{EA}\left(\frac{\left(h^2 + (l/2)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{h^3} - \frac{3\left(h^2 + (l/2)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2h} + \frac{l^3}{8h^3}\right) \qquad (18)$$

(18)式は，2.2 節の感度解析法で行っても同じ解が得られ，2.2 節の感度解析法が正しいことが確かめられる．また，Mathematica を用いて，$\partial C/\partial h = 0$ の解を求めると，$h = \pm\left(\sqrt{3}/2\right)l$ が得られ，最適形状は正三角形となる．

以上の問題で，本研究で作成した力法，SLP 法，CONLIN 法プログラムの有効性を検討したところ，すべて厳密解（正三角形）に収束することが確かめられた．

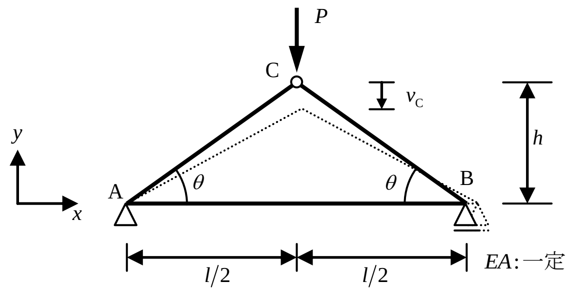


図 3　静定三角形トラスの解析例

4.2　境界に波打ち現象が生じる解析例

図 4 は，連続体を有限要素法で離散化し，境界形状の最適化を行った場合，境界に波打ち現象が生じるとされる例題 [29]を参考に，骨組の形状最適化問題を作成したものである．図に示すように，本モデルでは，境界枠を梁材で構成するものとし，これを 37 要素で分割している．梁材は 30cm×40cm の鋼材中実断面としている．また，構造上部の梁の形状を設計対象とし，水平材の節点は x 方向のみ移動でき，斜材の節点座標は x, y 方向に移動できるものとする．

図 5 は，力法，SLP 法，CONLIN 法の解析結果を示したものである．ただし，要素総長さ制約値は $L^U = 1.2L^{(0)}$ （$L^{(0)}$ ：初期形状の要素総長さ）で，最適化の繰り返し計算回数は 3 つの手法ともに 100 回としている．なお，SLP 法，CONLIN 法の方は 40 回程度で収束するが，ここでは条件を合わせている．また，力法の初期変更倍率係数 α は 0.5，重み係数 w は 0 としている．なお，α の値は，試行錯誤の結果，コンプライアンスの最も小さくなる値を用いている．図中の C_r は収束解と初期形状のコンプライアンスの比を示し，L_r は収束解と初期形状の要素総長さの比を示す．図より，SLP 法，CONLIN 法では，連続体の有限要素解析の場合と同様に，境界形状が波打つ現象が見られる（最適性基準は満足しない）のに対し，力法では，そのような現象が生じないことがわかる．

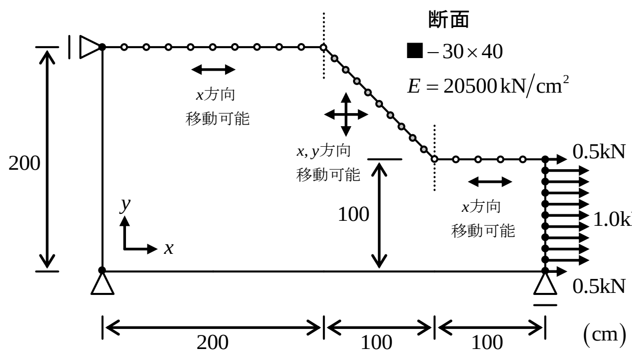
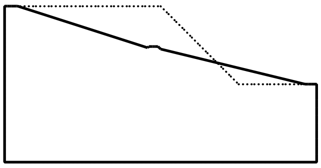
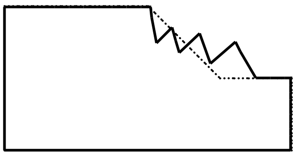


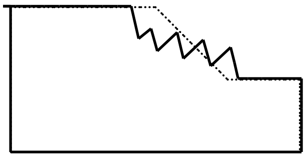
図 4　境界に波打ち現象が生じる解析例



(a) 力法　$C_r = 0.884$, $L_r = 0.977$



(b) SLP法　$C_r = 0.768$, $L_r = 1.007$



(c) CONLIN法　$C_r = 0.914$, $L_r = 1.149$

図 5　解析結果の比較

4.3　フィーレンディールアーチ橋の解析例

図 6 は，フィーレンディールアーチ橋の解析モデルを示す．本解析モデルでは，白丸の節点が y 方向に移動可能としている．ただし，梁材は鋼材中実断面（$E = 20500\,\mathrm{kN/cm^2}$）としている．

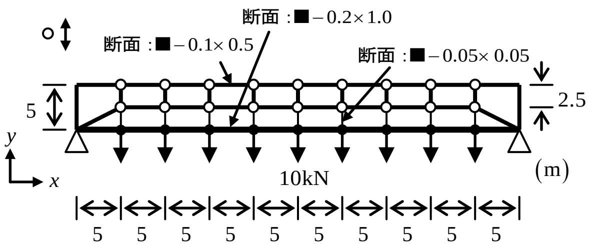
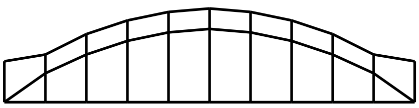
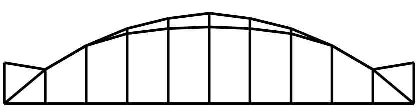


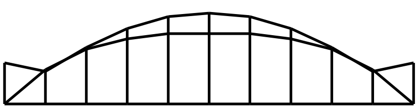
図 6　解析モデルの初期形状



(a) 力法　$C_r = 0.211$, $L_r = 1.201$



(b) SLP法　$C_r = 0.150$, $L_r = 1.170$

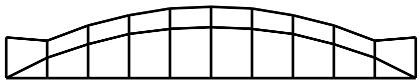


(c) CONLIN法　$C_r = 0.158$, $L_r = 1.166$

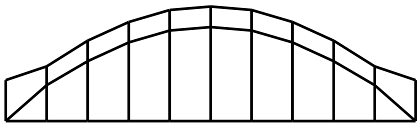
図 7　解析結果の比較

図 7 は，力法，SLP 法，CONLIN 法の解析結果を示したものである．ただし，要素総長さ制約値は $L^U = 1.2L^{(0)}$ で，最適化の繰り返し計算回数は 3 つの手法ともに 100 回としている．また，力法の初期変更倍率係数 α は 1.3，重み係数 w は 400 としている．図中の C_r は収束解と初期形状のコンプライアンスの比を示し，L_r は収束解と初期形状の要素総長さの比を示す．図より，力法では，解析の意図どおりフィーレンディールアーチ橋となっているのに対し，SLP 法，CONLIN 法では，コンプライアンス比は力法に比較して小さいものの，解析者の意図とは異なる形状のアーチとなることがわかる．

次に，図 8 (a), (b)は，力法における制約条件の有効性を示すために，L^U を $1.1L^{(0)}$ および $1.3L^{(0)}$ にした場合の解析結果を示している．図に示すように，力法においても制約値を変化させることによりアーチのライズを変化させることができる．



(a) $L_r = 1.103$



(b) $L_r = 1.301$

図 8　要素総長さ制約値を変えた場合の結果（力法）

4.4　骨組シェル構造の解析例

図 9 は，岐阜県各務市の市営斎場「瞑想の森」の断面図を元に作成した骨組シェル構造の解析モデルを示す．本解析モデルでは，柱と屋根の両端の上下端の節点の移動を固定し，それ以外の全節点が y 方向に移動可能としている．ただし，梁材は鋼材中実断面（$E = 20500\,\mathrm{kN/cm^2}$）としている．また，荷重は節点への集中荷重として与えている．

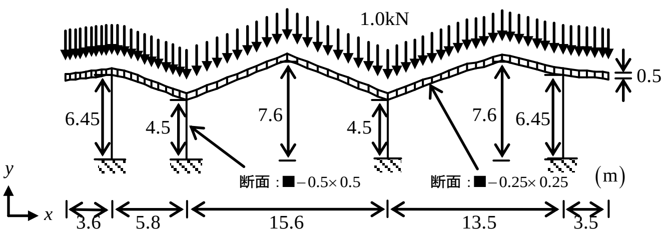
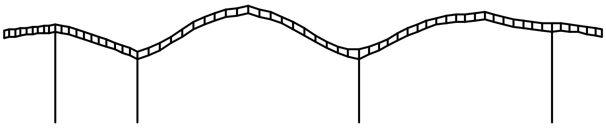


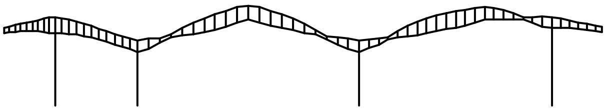
図 9　解析モデルの初期形状

図 10 は，力法，SLP 法，CONLIN 法の解析結果を示したものである．ただし，要素総長さ制約値は $L^U = 1.1L^{(0)}$ で，計算に使う要素はシェルを形成する上下の要素とし，最適化の繰り返し計算回数は 100 回としている．また，力法の初期変更倍率係数 α は 0.7，重み係数 w は 1.0 としている．図中の C_r は収束解と初期形状のコンプライアンスの比を示し，L_r は収束解と初期形状の要素総長さの比を示す．図より，力法では初期形状の形態を崩さずに，形状修正を行うことができるのに対し，SLP 法，CONLIN 法では，コンプライアンス比は力法に比較して小さいものの，初期形状とは大きく異なる形態と

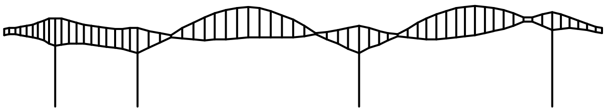
なってしまうことがわかる．これは，本論文で用いている力法が，制約条件をペナルティ法で与える勾配法であり，SLP 法，CONLIN 法に比較して制約条件の影響を受けにくいためではないかと考えられる．



(a) 力法　$C_r = 0.815$,　$L_r = 1.00$



(b) SLP法　$C_r = 0.420$,　$L_r = 1.00$



(c) CONLIN法　$C_r = 0.202$,　$L_r = 1.00$

図 10　解析結果の比較

５．まとめ

本論文では，畔上らによって提案された力法を，建築骨組の形状最適化問題に適用する方法を示した．また，目的関数（コンプライアンス）の感度解析法は，位相最適化手法等で一般的に用いられている方法を採用し，2 次元骨組を例に詳細な解析法を示した．

まず，簡単な例題による厳密解との比較により，提案手法が厳密解に収束することを確かめ，感度解析法が正しいことを示した．次に，境界に波打ち現象が生じる例題を示し，SLP 法，CONLIN 法では境界に波打ち現象が生じるのに対して，力法では，このような現象が回避できることを示した．次に，フィーレンディールアーチ橋および骨組シェル構造の解析例により，力法では，初期形状の形態を保ちつつ形状変更がなされるのに対して，SLP 法，CONLIN 法では，初期形状とは異なる形態に収束することを示した．これは，本論文に示した力法が感度係数を荷重とする骨組の弾性変形にしたがって形状変更を行うためである．したがって，どのような骨組に対しても，よりスムーズな最適形状を得ることができると考えられる．

以上の結果より，意匠設計者のデザインを初期形状として，形状変更を行う場合は，力法による骨組形状最適化手法が有効な手段となりえることがわかった．

参考文献

1) 浜田英明，大森博司：設計者の選好と力学的合理性を勘案した自由曲面シェル構造の構造形態創生法の提案－その１　多目的遺伝的アルゴリズムによる発見的方法, 日本建築学会構造系論文集, 第 609 号, pp.105-111, 2006.11
2) 浜田英明，大森博司：設計者の選好と力学的合理性を勘案した自由曲面シェル構造の構造形態創生法の提案－その２　最適性条件による理論的解法，日本建築学会構造系論文集，　第 618 号，pp.143-150，2007.8
3) 藤田慎之輔，大崎　純：ひずみエネルギーとパラメトリック曲面の代数不変量を考慮したシェルの形状最適化，日本建築学会構造系論文集，第 639 号，pp.857-863，2009.5
4) 木村俊明，大森博司：形状と厚さの同時最適化法の定式化とその応用－自由曲面シェル構造の構造形態創生手法の提案（その１），日本建築学会構造系論文集，第 640 号，pp.1091-1098，2009.6
5) 木村俊明，大森博司：形状と厚さの同時最適化法の構造位相決定問題への応用－自由曲面シェル構造の構造形態創生手法の提案（その２），日本建築学会構造系論文集，第 648 号，pp.367-376，2010.2
6) 大森博司，山本憲司：応力分布を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究－その１　シェル構造への適用，日本建築学会構造系論文集，第 496 号，pp.67-73，1997.6
7) 大森博司，山本憲司：応力分布を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究－その２　スペースフレームへの適用，日本建築学会構造系論文集，第 503 号，pp.77-83，1998.1
8) 山本憲司，皆川洋一，大森博司：座屈荷重を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究，日本建築学会構造系論文集，　第　564　号，pp.95-102　2003.2
9) 山本憲司，皆川洋一，大森博司：剛性行列のブロック対角化を利用した線形座屈荷重を目的関数とする単層トラスドームの形状最適化，日本建築学会構造系論文集，第 578 号，pp.51-58，2004.4
10) 小河利行，大崎　純，立石理恵：座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化，日本建築学会構造系論文集，第 570 号，pp.129-136，2003.8
11) Ohsaki, M., Nakamura, T. and Kohiyama, M. : Shape optimization of a double-layer space truss described by a parametric surface, Int. J. Space Structures, Vol. 12(2), pp.109-119, 1997
12) Ohsaki, M., Nakamura, T. and Isshiki, Y. : Shape-size optimization of plane trusses with designer’s preference, J. Struct. Engineering. ASCE, Vol.124, pp.1323-1330, 1998
13) 佐々木睦朗：FLUX STRUCTURE; フラックスストラクチャー，TOTO 出版，2005.6
14) 畔上秀幸：形状最適化問題の解法，計算工学，Vol.2, No.4, pp.27-35, 1997
15) Zienkiewicz, O.C. and Campbell, J.S. : Shape optimization and sequential linear programming, *Optimum Structural Design Theory and Applications*, edited by Gallager, R.H. and Zienkiewicz, O.C., John Wiley & Sons, London, pp.109-126, 1973
16) Iman, M.H. : Three-dimensional Shape Optimization, *Int. J. Num. Meth. Engrg*., Vol.18, pp.661-673, 1982
17) Braibant, V. and Fleury, C. : Shape optimal design using B-splines,　*Comput. Methods Appl. Mech*. *Engrg*., Vol.44, pp.247-267, 1984
18) Braibant, V. and Fleury, C. : An approximation concepts approach to shape optimal design, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*., Vol.53,　pp.119-148, 1985
19) Belegundu, A.D. and Rajan, S.D. : A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions,　*Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 66, pp.87-106, 1988
20) Raasch, I., Chargin, M.S. and Bruns, R. : Optimierung von pkwbauteilen in bezug auf form und dimensionierung, *VDI Berichte*, Nr. 699,　pp.713-748, 1988
21) Vanderplaats, G.N. and Miura, H. : GENESYS-structural synthesis software using advanced approximation techniques, *AIAA Report*,　92-4839-CP, pp.180-190, 1992
22) 畔上秀幸：領域最適化問題の一解法，日本機械学会論文集，A 編，60 巻，pp.1479-1486，1994.6
23) 下田昌利，呉志強，畔上秀幸，桜井俊明：汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法（力法によるアプローチ），日本機械学会論文集，A 編，60 巻，pp.2418-2425，1994.10
24) 畔上秀幸：線形弾性問題における領域最適化解析（力法によるアプローチ），日本機械学会，A 編，60 巻，pp.2312-2318，1994
25) 能井宏弥，藤井大地：力法の原理を用いたシェル構造の形状最適化，日本建築学会構造系論文集，第 616 号，pp.121-126，2007.6
26) 例えば，藤井大地：Excel で解く構造力学，丸善，2003.8
27) 藤井大地：建築デザインと最適構造，丸善，2008.10
28) Fish, J. and Belytschko, T; 山田貴博監訳：有限要素法，丸善，2008.12
29) 山川宏：最適化デザイン，培風館，1993.4