CA-ESO 法とボクセル有限要素法を用いた３次元構造物の位相最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF 3D STRUCTURES USING CA-ESO METHOD AND VOXEL FINITE ELEMENT METHOD

岡部　諒*

Ryo OKABE

Recently, topology optimization of three dimensional (3D) structures is paid attention again by the development of manufacturing technology using 3D printer.　Therefore, in this paper, an efficient topology optimization method for 3D structures is proposed.　In the proposed method, CA-ESO method is used for the topology optimization and the voxel finite element method is used for the stress analysis of 3D structures.　In this method, the design domain is divided in same rectangular parallelepiped elements (voxels), and in the optimization process, elements with low stress are deleted by ESO (Evolutionary Structural Optimization) method, and peripheral elements of the element with high stress are generated by CA (Cellular Automaton) method.　Also, in the voxel finite element method, the stress assumed element, CG solver, and element by element method are used.　Several numerical examples are shown in order to demonstrate the effectiveness of the present method for 3D structures.

Keywords:　*Topology optimization, CA-ESO method, Voxel finite element method, Three dimensional structure, Structural Morphogenesis*

位相最適化，CA-ESO 法，ボクセル有限要素法，3 次元構造，構造形態創生

１．はじめに

境界形状だけでなく，内部の穴の数や穴の形状まで最適化できる位相最適化手法は，機械部品の軽量化や建築分野の構造形態の創生手法として，幅広く応用が進んでいる．位相最適化手法は，大きく数理計画法にもとづく方法と発見的手法にもとづく方法の 2 種に分類されるが，発見的手法である CA-ESO 法は２次元の剛性最大化問題において，数理計画法にもとづく SIMP[1-3]法と同等以上の性能を有することが示された．

ところで，BESO 法は，SIMP 法と非常に類似した方法で，SIMP 法が要素密度を連続関数として各ステップの密度の増減を求めるのに対して，BESO 法は各ステップの目標体積を定めて，ひずみエネルギー感度の低い要素を除去し，感度の高い要素の周辺要素を付加する発見的手法である．

本論文では, 文献 6)で提案した CA-ESO 法と Hollister and Kikuchi[8]によって提案されたボクセル（voxel）有限要素法を組み合わせた３次元構造物の位相最適化手法を提案し, 数理計画法にもとづく SIMP 法及び発見的手法にもとづく BESO 法と比較することにより，３次元問題における CA-ESO 法の有効性を検討する．

２．ボクセル有限要素法の概要

ボクセル有限要素法では, 設計領域を包含する直方体領域を考え，これを均等な直方体要素（voxel）で分割する．そして，実際の設計領域はボクセルの材料密度の有無（1/0）によって与える．この直方体領域の各辺の長さを L_X, L_Y, L_Z とし，各辺の有限要素分割数を n_X, n_Y, n_Z とすると, 直方体要素（voxel 要素）の各辺の長さ l_X, l_Y, l_Z は次式で定義される．

$$l_X = \frac{L_X}{n_X},\quad l_Y = \frac{L_Y}{n_Y},\quad l_Z = \frac{L_Z}{n_Z} \tag{1}$$

この時，領域各辺の節点数は $(n_X+1), (n_Y+1), (n_Z+1)$ であり，全節点数は $(n_X+1)\times(n_Y+1)\times(n_Z+1)$ となる．CA-ESO 法では，各要素の von Mises 応力を要素生滅の指標に用いるため，本論文では，応力の解析精度が高い 8 節点応力仮定法要素 [7),12)]を用いる．本要素は，要素剛性マトリクスの計算にやや時間を要するが，ボクセル有限要素法では，すべて同一形状の要素を用いるため，１度計算して保存しておけば良い．

8 節点応力仮定法要素の剛性マトリクスは次式で表される [7),10)]．

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{M}_B{}^T \mathbf{M}_S{}^{-1} \mathbf{M}_B \tag{2}$$

ここに，$\mathbf{K}_e$ は 24×24．$\mathbf{M}_S$ は 18×18，$\mathbf{M}_B$ は 18×24 のマトリクスで，

$$\mathbf{M}_S = \int_{-\frac{l_X}{2}}^{\frac{l_X}{2}}\int_{-\frac{l_Y}{2}}^{\frac{l_Y}{2}}\int_{-\frac{l_Z}{2}}^{\frac{l_Z}{2}} \mathbf{N}_S{}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_S\, dxdydz,\quad \mathbf{M}_B = \int_{-\frac{l_X}{2}}^{\frac{l_X}{2}}\int_{-\frac{l_Y}{2}}^{\frac{l_Y}{2}}\int_{-\frac{l_Z}{2}}^{\frac{l_Z}{2}} \mathbf{N}_S{}^T \mathbf{B}\, dxdydz \tag{3}$$

ただし,

$$\mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} 1 & y & z & yz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & x & zx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix}$$

また，$\mathbf{D}$（6×6）は弾性マトリクス，$\mathbf{B}$（6×24）は要素内変位 $\mathbf{u}$ を次式で仮定した場合の歪－変位関係マトリクスである．

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{d} \tag{4}$$

*　近畿大学大学院システム工学研究科　博士前期課程　　Master’s Course, Graduate School of Systems Engineering, Kinki University

(2)式から作られる全体剛性方程式の解法には前処理付き共役勾配法[11)]を用いる．また，反復計算においては要素剛性マトリクスと変位ベクトルのかけ算を要素ごとに行い，これをベクトルとして保存していく Element-by-Element[12)]法を用いる．

以上の CG 法の反復計算によって得られた解（変位ベクトル）から，各要素の応力は次式から計算される．

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_S \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{M}_B \mathbf{d} \tag{5}$$

計算効率を上げるためには，(2)式の要素剛性マトリクスの他に，(5)式の $\mathbf{N}_S \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{M}_B$ もあらかじめ計算して保存しておく必要がある．

３．比較手法の概要

3.1　SIMP 法による３次元構造の位相最適化

SIMP 法では，要素の剛性に比例する係数を要素密度と定義し，i 番目要素の剛性マトリクスが次式で表されるものとする．

$$\mathbf{k}_i = (\rho_i)^{pp} \cdot \mathbf{k}_{pi}^0 + (\rho_i)^{ps} \cdot \mathbf{k}_{si}^0 \qquad 0 < \rho_i \le 1 \tag{6}$$

ただし，$\mathbf{k}_{pi}^0, \mathbf{k}_{si}^0$ は i 番目要素の垂直歪エネルギー成分とせん断歪エネルギー成分からなる初期要素剛性マトリクスを表す．また，ρ_i は i 番目要素の要素密度を表し，pp, ps は要素密度をなるべく 0 または 1 に近づけるためのべき乗係数である．ここで，要素剛性マトリクスを分離し，別々のべき乗係数を設定するのは，0 と 1 の間の中間密度のせん断剛性により大きなペナルティを課すためである．

SIMP 法では，(6)式の要素密度 ρ_i を設計変数として，次式の最適化問題を解く．

$$\begin{aligned} &\text{min} \quad f_{obj}(\boldsymbol{\rho}) = C(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ &\text{subject to} \quad m(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \le \bar{m} \\ &\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_i, \cdots, \rho_N\} \qquad 0 < \rho_i \le 1, \quad (i = 1, \cdots, N) \end{aligned} \tag{7}$$

ここに，C はコンプライアンス，$\mathbf{d}, \mathbf{K}$ は節点変位ベクトルと全体剛性マトリクス，m は総密度，$\bar{m}$ は総密度の制約値，N は要素総数である．なお，ここでは ρ_i の下限値を $1/10^3$ に設定している．

３次元問題の(7)式の解法は文献 7)に示しているが，ここではこれを文献 8)の方法に改良して用いる．文献 8)の方法では，(7)式の目的関数 f_{obj} を次式のように書き換える．

$$f_{obj}(\boldsymbol{\rho}) = C(\boldsymbol{\rho}) + w \cdot C^0 \left[1/G(\boldsymbol{\rho}) \right] \tag{8}$$

ここに，w は重み係数，C^0 は初期（均等密度）のコンプライアンス，$G(\boldsymbol{\rho})$ は次式で定義されるフィルタリング関数である．

$$G(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\rho_i \rho_j + (1-\rho_i)(1-\rho_j) \right] \Big/ \sum_{i=1}^{N} n_i \tag{9}$$

ただし，n_i は i 番目要素と面を共有する要素の数である．(9)式の G は $0 \le G \le 1$ の範囲で，グレースケールやチェッカーボード状の密度分布が増えると値が小さくなる．目的関数を(8)式とした(7)式の最適化問題は，CONLIN 法を用いた非線形計画法で解かれる．

3.2　BESO 法による３次元構造の位相最適化

BESO 法における要素のひずみエネルギー感度の計算では，まず，SIMP 法と同様に，要素の剛性に比例する係数を要素密度と定義し，i 番目要素の剛性マトリクスが次式で表されるものとする．

$$\mathrm{k}_i = \rho_i \mathrm{K}_i \qquad 0 \le \rho_i \le 1 \tag{10}$$

ただし，ρ_i は i 番目要素の要素密度を表し，K_i は i 番目要素の初期剛性マトリクスを表す．ただし，ここでは，密度 ρ_i にべき乗のペナルティは課さない．

また，最適化問題も，SIMP 法と同様，質量制約下でのコンプライアンスの最小化とする．

$$\begin{aligned} &\text{min} \quad f_{obj}(\boldsymbol{\rho}) = C(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ &\text{subject to} \quad m(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \le \bar{m} \\ &\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_i, \cdots, \rho_N\} \qquad 0 < \rho_i \le 1, \quad (i = 1, \cdots, N) \end{aligned} \tag{11}$$

ここに，C はコンプライアンス，$\mathbf{d}, \mathbf{K}$ は節点変位ベクトルと全体剛性マトリクス，m は総密度，$\bar{m}$ は総密度の制約値，N は要素総数である．このとき，コンプライアンス C の設計変数 ρ_i に関する感度は次式により計算される．

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = -\mathbf{d}_i^T \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \rho_i} \mathbf{d}_i = -\mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \tag{12}$$

したがって，ESO 法[1)]では，次式の値を要素のひずみエネルギー感度として，これを要素の除去・復活の指標に用いている．

$$\alpha_i^e = (1/2) \mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \tag{13}$$

しかし，BESO 法[2,3)]では，チェッカーボード状の密度分布を防ぐため，まず，(13)式の感度から次式により節点の感度を求める．

$$\alpha_j^n = \left(\sum_{i=1}^{M^e} V_i \alpha_i^e \right) \Big/ \sum_{i=1}^{M^e} V_i \tag{14}$$

ここに，α_j^n は j 番目節点のひずみエネルギー感度，M^e は j 番目節点に繋がる要素数，V_i は j 番目節点に繋がる要素の体積を表す．ただし，ボクセル有限要素法では，要素体積は均一であるため，実際には次式で計算される．

$$\alpha_j^n = \left(\sum_{i=1}^{M} \alpha_i^e \right) \Big/ M^e \tag{15}$$

さらに，(15)式から要素の除去・復活の指標に用いる要素のひずみエネルギー感度は次式により計算される．

$$\alpha_i = \left(\sum_{j=1}^{M^n} w(r_{ij}) \alpha_j^n \right) \Big/ \sum_{i=1}^{M^n} w(r_{ij}) \tag{16}$$

ここに，α_i は i 番目要素のひずみエネルギー感度，M^n は i 番目要素の要素中心から影響半径 $r_{\min}$ の球体内に含まれる節点数，r_{ij} は要素中心から j 番目節点までの距離，$w(r_{ij})$ は要素中心からの距離に比例する重みで，次式で表される．

$$w(r_{ij}) = r_{\min} - r_{ij} \qquad (j = 1, 2, \cdots, M^n) \tag{17}$$

なお，BESO 法では，除去要素の急激な感度低下を防ぐために，現更新ステップと 1 つ前の更新ステップの感度との平均値をとり，最終的に次式により要素の感度を評価している．

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^{(k)} + \alpha_i^{(k-1)}}{2} \tag{18}$$

BESO 法では，以上の感度計算法により，残存要素，除去要素両方の感度を求めている．

４．CA-ESO 法による３次元構造の位相最適化

CA-ESO 法による位相最適化では，設計領域における各有限要素の応力を指標として要素密度の除去(0)・復活(1)を繰返し，最終的に目的の位相（構造形態）を求める．この場合，SIMP 法等の数理計画法にもとづく方法と比較して感度解析の必要がなく，また，除去要素の密度を完全に 0 にできるため，特に３次元問題では最適化が進むほど計算効率が良くなる．

ここでは，ボクセル解析のメリットを生かすため，最適化の過程でリメッシュ（節点の再番号付け）は行わず，存在要素（または生成要素）の密度を 1，除去要素の密度を 0 とすることで各ステップの設計領域を定義する．そして，除去要素（密度 0 の要素）は, Element-by-Element 法の計算から除外する．

4.1　ESO 法による要素の除去

CA-ESO 法では，要素除去に関しては，拡張 ESO 法のルールを用いる．拡張 ESO 法 [16),17)] では，各要素の von Mises 応力を要素除去に関する指標とし，この応力が閾値以下になると要素が除去される．すなわち，

$$\rho_i = 0 \quad \text{if} \quad \sigma_i^{VM} < X_{cr} \qquad ; i = 1, \cdots, N_L \tag{19}$$

ここに，N_L は残存要素数，ρ_i は i 番目要素の材料密度，σ_i^{VM} は i 番目要素の von Mises 応力で，次式により計算される．

$$\sigma^{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{yz}}^2 + {\tau_{zx}}^2\right)\right\}} \tag{20}$$

また，(19)式の X_{cr} は閾値で，次式で定義される．

$$X_{cr} = \sigma_m - \eta \cdot \phi \tag{21}$$

ただし，σ_m と ϕ は残存要素の von Mises 応力の平均値と偏差平均であり，次式から計算される．

$$\sigma_m = \frac{1}{N_L}\sum_{i=1}^{N_L} \sigma_i^{VM} \qquad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_L}\left(\sigma_i^{VM} - \sigma_m\right)^2}{N_L}} \tag{22}$$

ここに，η は要素の除去量を制御する制御変数であり，η が大きいと要素が除去されにくく，η が小さいと除去されやすくなる．

4.2　CA 法による要素の生成

CA-ESO 法では，要素の生成（付加）を CA 法のルールにもとづいて行う．本論文では，i 番目要素の Neumann 近傍要素（面を共有する要素）に対して，次式の簡単なルールを採用する．

$$\rho_{s_{ij}} = 1 \quad \text{if} \quad \sigma_i^{VM} \geq \sigma_m^{CA} \qquad ; i = 1, \cdots, N_L, \quad j = 1, \cdots, n_i \tag{23}$$

ただし，σ_m^{CA} は残存要素の応力平均値で(21)式の σ_m と同様に計算される．また，s_{ij} と n_i は i 番目要素と面を共有する要素（ノイマン近傍要素）の要素番号と要素数である．

4.3　感度計算の概要

本論文では，要素感度を節点感度に置き換える，BESO 法の感度計算の考え方を導入する．また，BESO 法においては，要素感度としてひずみエネルギー感度を用いているが，本方法では von Mises 応力を用いるものとする．

4.4　CA-ESO 法の計算フロー

図 1 は CA-ESO 法の計算フローを示したものである．図に示すように，本方法では，総密度 $m\left(=N_L\right)$ が与えた制約値 $\bar{m}$ より大きい場合は ESO 法による要素除去を行い，小さい場合は CA 法による要素生成を行う．そして，各ステップで制約条件を $0.95 < m/\bar{m} < 1.05$ の範囲で満たし，(22)式の σ_m と ϕ/σ_m が共に小さくなる解，すなわち次式の値が最小となる解を最適解として保存する [6)]．

$$f_{obj} = \sqrt{\left(\sigma_m/\sigma_m^0\right)^2 + \left\{\left(\phi/\sigma_m\right)/\left(\phi/\sigma_m\right)^0\right\}^2} \tag{24}$$

ただし，σ_m^0 および $\left(\phi/\sigma_m\right)^0$ は初期構造（0 step）の値である．なお，制約条件を ±5% 緩和しているのは，CA-ESO 法では，総密度の増減を(21)式のパラメータ η のみで制御しているため，厳密に制約条件を満足する解が見つかりにくいためである．

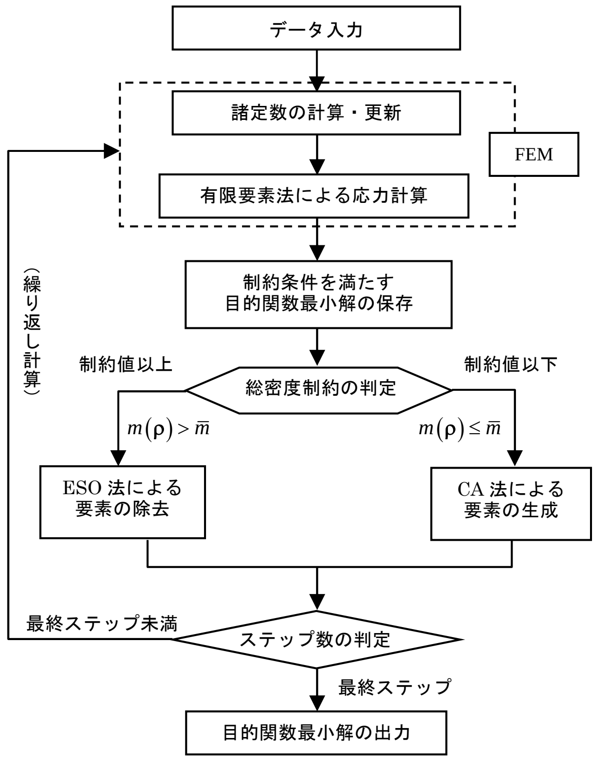


図 1　CA-ESO 法の計算フロー

以上の計算において，問題によっては同じ解が繰り返し現れたり，要素が除去されすぎて解が発散する場合があるため，プログラム内に以下の方法を組み込むことでこのような問題を回避する [6)]．

(a)　CA 法において，応力平均値が変化せず，ステップが進んでも要素生成が行われない場合があるため，総密度 m が制約値 $\bar{m}$ 以下になる場合，各ステップで 1%ずつ応力平均値 σ_m^{CA} の値を減少させる．ただし，総密度が制約値を超えた時点で元に戻し，再び，制約値以下になると同様な操作を加える．

(b)　ESO 法による要素除去量が多く解が発散する場合，逆に ESO 法による要素除去量が少なく目的の総密度まで減少しない場合があるため，前ステップからの要素除去量が 30%を超えた場合は 30%以下，10%未満になる場合は 10%以上となるようにプログラム内で η を調整する．ただし，総密度が制約値の 1.2 倍以内になった場合は，除去量の上限を 10%，下限を 0%となるように η を調整する．なお，η の調整は 1/100 単位で行う．

(c)　ESO 法による要素除去量が多く，解の収束が遅くなる場合があるため，CA 法を経て ESO 法による要素除去を行う場合，まず，(21)式の η を 1.5 まで上昇させ，その後，ESO の要素除去が繰り返されるごとに η を 0.1 刻みで減少させる．ただし，η の下限値は初期データ値とし，CA 法を経るごとに $\eta = 1.5$ に戻す．

(d)　総密度制約を満足する解を得やすくするために，CA 法を経て ESO 法による要素除去を行う場合，除去量の上限を 20%，下限を 5%（ただし，総密度が制約値の 1.2 倍以内になった場合は，除去量の上限を 3%，下限を 0%）となるように η を調整する．なお，η の調整は 1/100 単位で行う．

なお，(b)と(d)は，３次元解析に対して新たに加えたものである．

以上の計算において，最適化に関する入力データは，繰返し計算回数（ステップ数），総密度制約値 $\bar{m}/m^0$ （ m^0 は初期総密度：設計対象要素の密度をすべて 1 とした場合の総密度），(21)式の η のみである．このように，本手法の計算アルゴリズムは非常に簡単であるため，プログラムの実装も極めて容易である．

５．解析例

5.1　基本的な例題

まず，文献 1)等で取り上げられている片持梁例題の解析を行う．

図 2 は，設計領域および荷重条件・境界条件を示す．ただし，長さ L，幅 B，高さ H の比は 1.6 : 0.4 : 1 とし，設計領域の要素分割数は 80×20×50 としている．また，応力集中を防ぐため，荷重は 9 節点に均等に与えている．また，総密度制約値 $\bar{m}/m^0$ は 0.2，最適化ステップ数は 50 とした．

図 3 は，各ステップの総密度比と(24)式の目的関数の推移を示したものである（図の縦の点線は，制約条件を満たす目的関数最小解が得られたステップ）．また，図 4 は，総密度制約を $0.95 < m/\bar{m} < 1.05$ の範囲で満たす解の側面図と透視図を示したものである．ただし，(12)式の η は 0.7 としている．なお，図 3 中には，コンプライアンス比 C/C^0 （ C^0 は初期コンプライアンス）も示している．これらの図に示すように，ESO 法と CA 法の繰り返しにより，目的関数値および構造形態がより剛性の高いものに改善されて行くことがわかる．

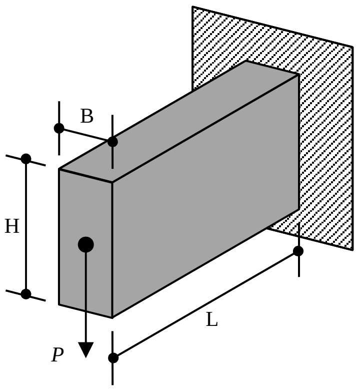


図２　解析例１

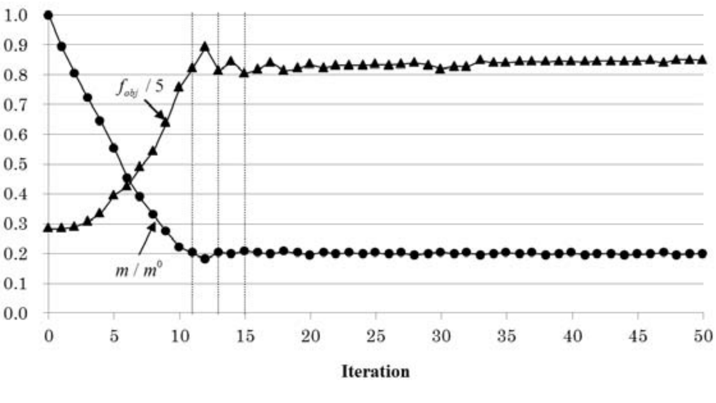
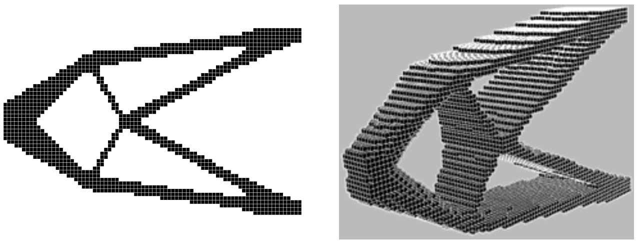
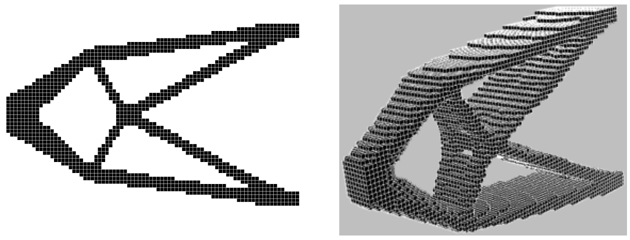


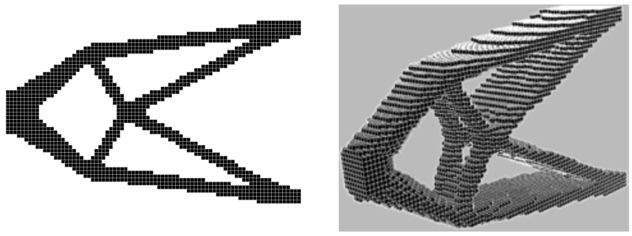
図３　各ステップにおける総密度比（ m/m^0 ）と目的関数 f_{obj} の推移



11step　$m/m^0 = 0.200$　$f_{0bj} = 4.11$　$C/C^0 = 3.50$

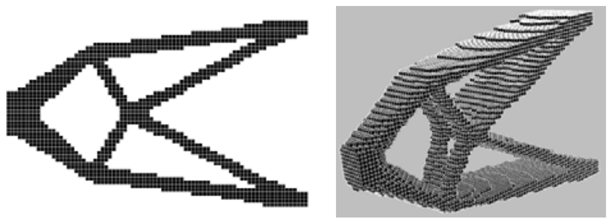


13step　$m/m^0 = 0.204$　$f_{0bj} = 4.06$　$C/C^0 = 3.42$

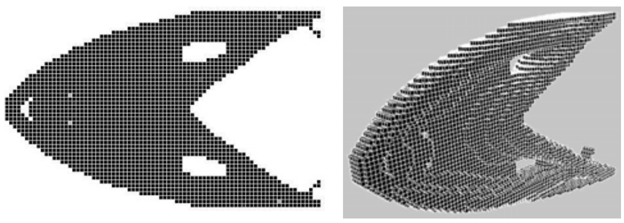


15step　$m/m^0 = 0.209$　$f_{0bj} = 4.02$　$C/C^0 = 3.35$

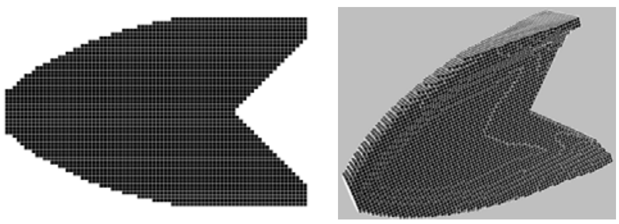
図４　制約条件を満たす解の要素分布



CA-ESO法　$C/C^0 = 3.35$



SIMP法　$C/C^0 = 3.44$



BESO法　$C/C^0 = 2.96$

図５　SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法の解の比較

図 5 は，SIMP 法，BESO 法の解と CA-ESO の解（図 4 の 15step の解）を比較したものである．ただし，SIMP 法では，(6)式の *pp* を 2， *ps* を 2.5（以下の解析例も同じ設定），(8)式の *w* を 2.0 とし，最適化ステップ数 50 として解析している．また，BESO 法では，各ステップの体積減少率を 1%，要素の最大付加比率を 5%，最適化ステップ数 100 として解析を行った. 図より, SIMP 法 BESO 法の解は, 内部構造が板（面）となっているのに対し，CA-ESO 法では骨組的な構造となっていることがわかる. なお, SIMP 法では, (8)式の *w* の値をさらに増加させれば内部構造に穴を空けることもできるが，コンプライアンス比が高くなり局所解となる．

5.2 橋梁モデルの解析

橋梁モデルの解析例として，文献 5)に掲載されているイタリアフィレンツェ新駅コンペ案の構造形状決定に用いられた解析例を取り上げる．図 6 は，文献に示されている条件をもとに作成した設計領域である．解析は対称性を利用して 1/4 領域で行い，要素分割数は 150×42×30 の 189000 要素としている．ただし，長手方向中央の高さ 6m の空間と短手方向中央の 2m×6m のスリット（通路）は密度 0 に固定し，また，分布荷重が加わる上面一層は密度 1 に固定する．また，総密度制約値 $\bar{m}/m^0$ は 0.1，最適化ステップ数は 100 とし，支持点は応力集中を避けるため 9 節点の正方形領域で固定する．

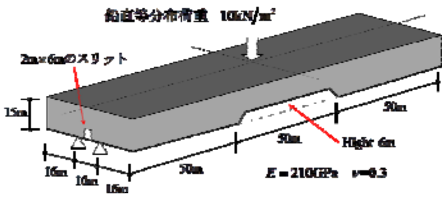
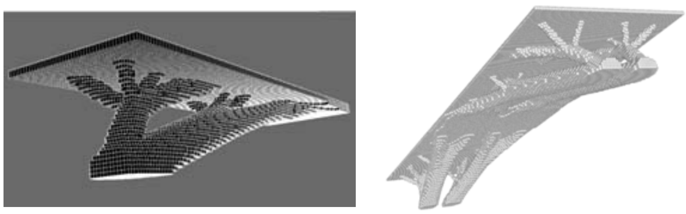
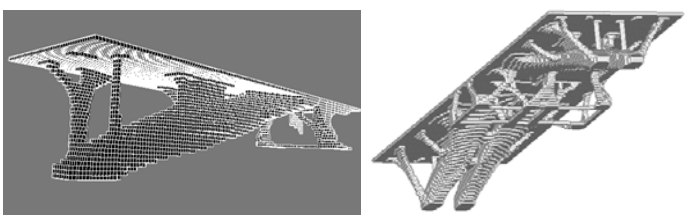


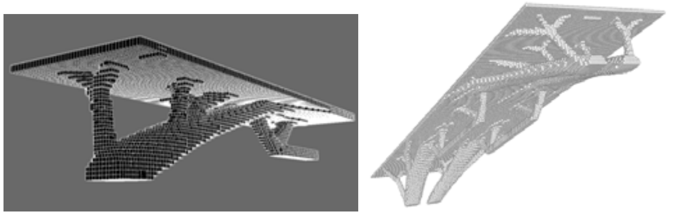
図 6 解析例 2



CA-ESO法 $C/C^0 = 2.46$



SIMP法 $C/C^0 = 2.67$



BESO法 $C/C^0 = 2.38$

図 7 SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法の解の比較

図 7 は，SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法の 1/4 領域及び全領域の透視図を比較したものである．ただし，SIMP 法では(8)式の *w* を 1.0 とし，最適化ステップ数 50 としている．また，BESO 法では，各ステップの体積減少率を 1%，要素の最大付加比率を 5%，最適化ステップ数 100 とした．図より，SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法のコンプライアンス比を比較した場合，CA-ESO 法の解で最も低くなっており，SIMP 法に比較して樹木を連想させるより自然な形態となっていることがわかる．

5.3 建築モデルの解析

建築モデルの解析例として，文献 4)に示される例題（図 8）の解析を行う．解析は，対称性を利用して 1/4 領域で行い，要素分割数は，60×60×40 の 144000 要素（1/4 領域）としている．また，総密度制約値 $\bar{m}/m^0$ は 0.05，最適化ステップ数は 50 としている．ただし，応力集中を避けるため，支持点の拘束は 4 節点で与えている．

図 9 は，SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法の 1/4 領域及び全領域の透視図を比較したものである．ただし，SIMP 法では，(8)式の *w* を 0.5 とし，最適化ステップ数 50 として解析している．また，BESO 法では, 各ステップの体積減少率を 1%, 要素の最大付加比率を 5%, 最適化ステップ数 100 として解析を行った．

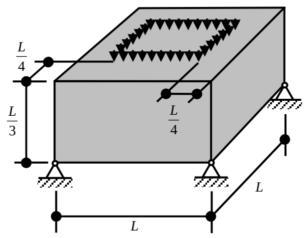
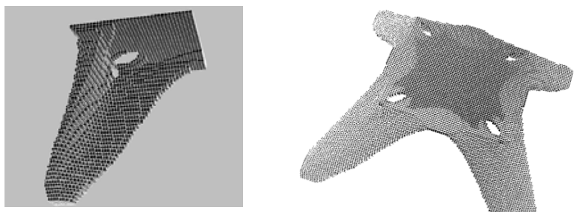
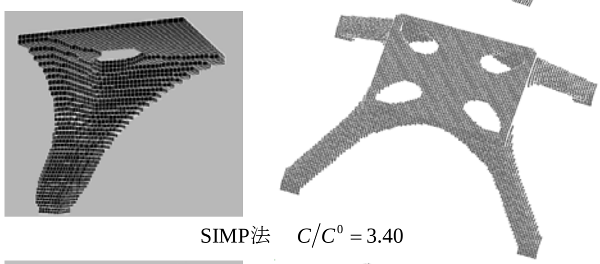


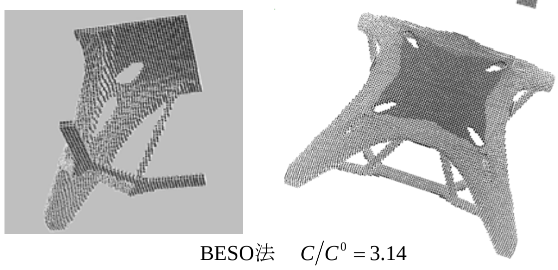
図 8 解析例 3



CA-ESO法 $C/C^0 = 3.14$



SIMP法 $C/C^0 = 3.40$

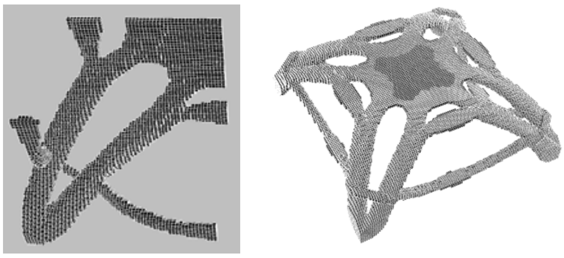


BESO法 $C/C^0 = 3.14$

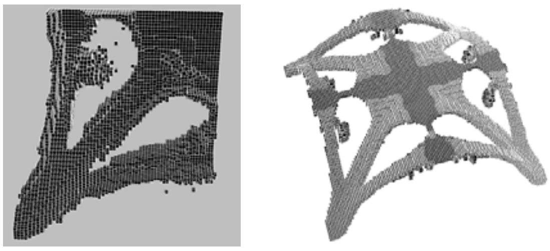
図 9 SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法の解の比較

図 9 より，SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法において同様の位相が得られているが，CA-ESO 法では，ヒトデを連想させるより自然な形態が得られていることがわかる．

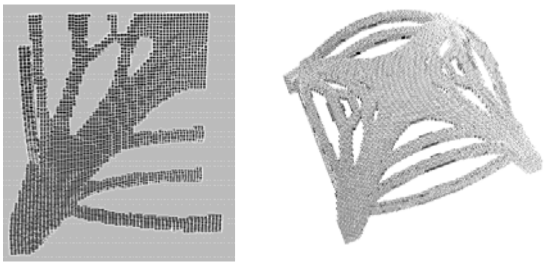
図 10 は，図 8 の解析例 3 を自重問題として解いた場合の，SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法の 1/4 領域及び全領域の透視図を比較したものである．ただし，SIMP 法では，(8)式の w を 0.5 とし，最適化ステップ数 50 として解析している．また，BESO 法では，各ステップの体積減少率を 1%，要素の最大付加比率を 5%，最適化ステップ数 100 として解析を行った．



CA-ESO法　$C/C^0 = 2.38$



SIMP法　$C/C^0 = 28.6$



BESO法　$C/C^0 = 3.51$

図 9　SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法の解の比較

5.4　SIMP 法，BESO 法，CA-ESO 法の計算時間等の比較

最後に表 1 は, 以上 3 つの解析例の計算時間を比較したものである．なお，最適化ステップ数は，SIMP 法及び CA-ESO 法では 50 とし，BESO 法では 100 とする．表より，CA-ESO 法の計算時間は SIMP 法及び BESO 法に比較して短いことがわかる．また，BESO 法の計算時間が SIMP 法及び CA-ESO 法と比較して長いのは，各ステップにおける要素の除去率が小さく収束までに時間がかかるためである．

表 1　計算時間の比較

	CA-ESO 法	SIMP 法	BESO 法
解析例 1	7 分	10 分	19 分
解析例 2	4 時間 40 分	5 時間 19 分	5 時間 46 分
解析例 3	17 分	36 分	55 分
解析例 3(自重)	6 時間 21 分	6 時間 59 分	7 時間 41 分

プロセッサ：Intel Core i5-3770CPU@3.6GHz　メモリ：4GB

6．まとめ

本論文では，発見的手法である CA-ESO 法とボクセル（voxel）有限要素法を組み合わせた 3 次元構造物の位相最適化手法を提案し，既往の文献に示される解析モデルで解析を行い，その有効性を検討した．その結果，以下のことが明らかになった．

(1) 提案手法（CA-ESO 法）では，最適化の過程で解析対象要素数が減少して行くため計算効率が良い．

(2) 提案手法では，連立方程式の解法として反復解法（前処理付共役勾配法）を用いているため，剛性マトリクスが特異となる場合も安定的に解が求まる．

(3) 提案手法では，element by element 法により全体剛性マトリクスを構成せずに連立方程式を解くため，4GB のメモリで数十万要素の問題が容易に解析できる．

(4) 提案手法では，ESO 法と CA 法の繰り返しの過程で最小解が更新（改善）され，より剛性の高い解が得られる．

(5) 提案手法では，フィルタリング等の特別の操作をしなくてもパラメータ η の設定でシンプルな形態が得られる．

(6) 提案手法の解と SIMP 法及び BESO 法の解を比較した結果, いずれの場合も CA-ESO 法の方がより自然に近い形態（ヒトデや樹木のような形態）となる．

ただし，以上の結果は，あくまで応力を指標とする剛性最大化問題に対して言えることで，他の最適化問題への適用性についてはさらに検証を行っていく必要がある．また，SIMP 法については，本論文に示すペナルティのかけ方およびフィルタリング法を用いた場合の結果であることを付記しておく．

参考文献

1) Bendsøe, M. P. : Optimal shape design as a material distribution problem, Structual Optimization, Vol.1, pp.193-202, 1989

2) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N. : The COC algorithm, Part Ⅱ, Topological, geometrical and generalized shape optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, pp.309-336, 1991

3) Yang, R. J. and Chuang, C. H. : Optimal topology design using linear programming, Computers & Structures, Vol.52, No.2, pp.265-275, 1994

4) 大森博司, 崔昌禹: 等値線を利用した拡張 ESO 法による構造形態の創生，日本建築学会構造系論文集，第 539 号，pp.87-94，2001.1

5) 崔昌禹，大森博司，佐々木睦朗：拡張 ESO 法による構造形態の創生－三次元構造への拡張－，日本建築学会構造系論文集，第 576 号，pp.79-86，2004.2

6) 藤井大地，真鍋匡利：CA-ESO 法による構造物の位相最適化，日本建築学会構造系論文集，Vol.78，第 691 号，pp.1569-1574，2013.9

7) 藤井大地：パソコンで解く構造デザイン，丸善，2002

8) Hollister, S.J. and Kikuchi, N., Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, Biotechnology and Bioengineering, 43, No.7, pp.586-596, 1994

9) 藤井大地，鈴木克幸，大坪英臣：ボクセル有限要素法を用いた構造物の位相最適化，日本計算工学会論文集，Vol.2，pp.87-94，2000

10) 鈴木克幸分担執筆，計算力学ハンドブック（Ⅰ有限要素法構造編），日本機械学会，pp.23-31，1998

11) Wenget, J.M., Hughes, T.J.R. : Solution Algorithms for Nonlinear Transient Heat Conduction Analysis Employing Element-by- Element Iterative Strategies, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pp.711-815, 1985

12) 関口美奈子，菊池昇，混合的な有限要素剛性マトリックスの導き方に関する一考察－Clough 1960 年の論文を中心として－，計算工学講演会論文集，Vol.4，No.1，pp.131-134, 1999