

ESO 法とグラウンドストラクチャ法を用いた骨組構造物の位相最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF FRAME STRUCTURES USING ESO METHOD AND GROUND STRUCTURE METHOD

高坂憲治*

Kenji KOSAKA

In this paper, a simple method for topology optimization of frame structures is proposed. In this method, ESO (Evolutionary Structural Optimization) method is applied to ground structure method. An exact optimal solution may not be obtained by ESO method because it is a heuristic method. However, the approximate solution useful for structural design can be obtained by this method. In the proposed method, the ground structure is generated by connecting all nodes by beam elements (but it is possible to limit the maximum length of the elements, and it is also possible to remove the unnecessary elements), and in the optimization process, the elements with the lowest strain energy are deleted based on ESO method. In order to demonstrate the effectiveness of the proposed method, in several numerical examples, the solutions obtained by the proposed method are compared with the solutions obtained by the density approach method (mathematical programming).

Keywords: *Topology optimization, ESO method, Ground structure method, Frame structure, Computational Morphogenesis*

位相最適化, ESO 法, グラウンドストラクチャ法, 骨組構造, 構造形態創生

1. はじめに

近年、解析技術や生産・製造技術等の発達により、様々な形態の建築物が造られるようになってきている。また、3D プリンタの普及により、より軽量で剛性の高い構造形態を創生する技術の必要性が高まっている。位相最適化手法は、このようなニーズに応える形態創生手法の一つである。

このような位相最適化手法には、連続体を対象とするものと骨組構造を対象とするものがある。骨組構造を対象とする方法は、一般にグラウンドストラクチャ法¹⁻³⁾と呼ばれており、設計領域に適当な節点を配置し、節点間を可能な限りの線要素で結んだグラウンドストラクチャに対して、各線要素の材料密度（または断面積）を最適化することで最適位相を求めるものである。特に、建築構造は、骨組構造として設計される場合が多いため、骨組構造の位相最適化は、建築構造の形態創生や耐震ブレース・制震ブレースの最適配置問題など幅広い応用分野が考えられる。

建築分野のグラウンドストラクチャ法による位相最適化の研究としては、トラス構造（ピン接合）を対象とした河村、大森の研究⁴⁾、高田、松岡の研究⁵⁾、骨組構造（剛接合）を対象とした藤井らの研究⁶⁻⁸⁾、河村、大森の研究⁹⁾などが挙げられる。河村、大森の研究では、最適化手法として GA (Genetic Algorithm) が用いられており、高田、松岡の研究では線形計画法が、藤井らの研究では非線形計画

法が用いられている。また、これまでの研究では、骨組の各要素の材料密度（または断面積）を最適化することで位相を求めるため、解として得られた位相の各要素の太さは一般に異なっている。特に、高田、松岡の方法⁵⁾では、断面積の上限が制約されていないため、部材太さが大きく異なる場合も見られる。また、藤井ら方法⁶⁻⁸⁾は、連続体の SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法と同様に材料密度の 0/1 問題としても解けるため、原理的には部材太さを均一に近づけることも可能だが、多くの場合中間密度（細い部材）が残る。一方、河村、大森⁴⁾⁹⁾の方法で用いられている GA では、このような問題は容易に解決できるが、部材数が多くなると計算効率が悪く、計算負荷の大きい動的問題や非線形問題への応用が難しい。

一方、連続体の位相最適化では、中間的な材料密度を完全に除く方法として、Xie, Steven らによって提案された ESO 法¹⁰⁾および BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) 法¹¹⁾がある。本方法は、最適解への収束の保証が無い発見的な手法ではあるが、剛性最大化問題では、数値計画法にもとづく SIMP 法に比較しても遜色の無い方法であることが示されている¹²⁾。また、本方法は、骨組問題（グラウンドストラクチャ法）にも応用されている¹³⁾。

そこで本研究では、文献 13)の方法に着目し、この方法を応用することで、建築骨組の形態創生、あるいは耐震ブレースや制震ブレースの最適配置問題に利用できないかを検討する。ただし、本研究

* 近畿大学大学院システム工学研究科 博士前期課程

Master's Course, Graduate of System Engineering Kinki University

で提案する方法は、既往の研究のように部材断面積（材料密度）を連続的（段階的）に変化させるのではなく、ひずみエネルギー密度の小さい部材（要素）を順に除いていく単純な方法で、問題によっては、文献 14 に指摘されているように最適解を見逃す可能性もある。しかしながら、建築構造設計を考える場合、最適解が必ずしも実用的な解とはならないため、最適解に近い優良解（初期設計を改善する解）が得られれば、実務上は十分有効に活用できると考えられる。

以下本論文 2 章では、提案手法の有効性を確かめるために比較に用いる文献 8,15 に示すグラウンドストラクチャ法の概要を示す。3 章では、提案手法である ESO 法をグラウンドストラクチャ法に適用する方法を示す。4 章では、提案手法と従来法との比較により、提案手法の有効性を検証する。5 章では以上のまとめを述べる。

2. 比較に用いるグラウンドストラクチャ法

比較に用いるグラウンドストラクチャ法^{8),15)}では、節点間をすべての可能な線要素で連結したグラウンドストラクチャに対して、 i 番目要素の剛性マトリクス \mathbf{k}_i を要素密度 ρ_i を用いて次式のように表す。

$$\mathbf{k}_i = \rho_i^p \mathbf{k}_i^0 \quad 0 < \rho_i \leq 1 \quad (1)$$

ここに、 \mathbf{k}_i^0 は初期の要素剛性マトリクス、 p はべき乗の係数であり、1 より大きい値を与えることにより、 $0 < \rho_i < 1$ の場合、実際の密度より \mathbf{k}_i が小さく評価される。ただし、文献 8,15 では、密度の上限は制約していないが、ここでは上限を 1 に制約している。

位相最適化問題は、設計変数 $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_N\}$ に対して、質量制約下でコンプライアンスを最小化する次の問題として定式化される。

$$\begin{aligned} \min C(\boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{f} \\ \text{subject to } m(\boldsymbol{\rho}) &= \sum_{i=1}^N \rho_i A_i l_i \leq \bar{m}, \quad 0 < \rho_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 C はコンプライアンス、 \mathbf{d}, \mathbf{f} は節点変位ベクトルと節点外力ベクトル、 \mathbf{K} は全体剛性マトリクス、 m は質量、 N は要素数、 A_i, l_i は i 番目要素の断面積と長さ、 \bar{m} は質量の制約値を表す。

本論文では、(2)式の最適化問題を CONLIN 法^{8),15)}を用いて解く。ただし、CONLIN 法の改修計算回数は 40 としている。しかしながら、本問題は、初期値依存性の高い多峰性問題であるため、1 回の最適化計算では大域的最適解に収束しない場合がある。そこで、文献 8,15 では最適化計算で得られた解を再度初期値として同じ最適化計算を繰り返す方法を用いており、本論文でもこの方法を採用する。なお、この最適化計算の繰り返し回数を再計算回数と呼ぶ。また、文献 8,15 では、(1)式のべき乗係数 p を再計算にしたがって 1 から徐々に増加させる方法を用いているが、ここでは p は初期に与えた値で固定する。

3. ESO 法を用いたグラウンドストラクチャ法

ここでは、初期の ESO 法¹⁰⁾の考え方にもとづき、非常にシンプルな計算アルゴリズムを提案する。

まず、グラウンドストラクチャの作成法は従来どおりである。文献 15 には、Excel によるプリプロセスでグラウンドストラクチャを自動生成するソフトが提供されているので参照されたい。本ソフトでは、生成される要素長さの上限を設定でき、また、設計対象要素と非設

計対象要素を区別できるようになっている。

本方法では、以上のグラウンドストラクチャに対して以下の計算アルゴリズムを適用する。

- ① グラウンドストラクチャの静的弾性解析を行い、各設計対象要素のひずみエネルギー密度を計算する。なお、(1), (2)式の表記を用いれば i 番目要素のひずみエネルギー密度 V_i は次式により計算される。

$$V_i = (1/2) \mathbf{d}_i^{eT} (\rho_i \mathbf{k}_i^0) \mathbf{d}_i^e / (A_i l_i) \quad (3)$$

ただし、 \mathbf{d}_i^e は i 番目要素の節点変位である。また、要素密度 ρ_i は、残存している要素は 1 とし、除去要素は $1/10^3$ とする。なお、除去要素の密度を 0 としないのは、不安定構造になった時の連立方程式の特異性を避けるためである。

- ② 設計対象要素（残存要素）の要素番号をひずみエネルギー密度の小さい順に並べる。
- ③ 最もひずみエネルギー密度の小さい要素番号の要素をグラウンドストラクチャから除去する。なお、同じ最小ひずみエネルギー密度の要素が複数ある場合は、複数除去する。（これは対称性を有する構造の対称性を保つための処置でもある。）
- ④ すべての設計対象要素が無くなるまで①～③を繰り返す。
- ⑤ 汎用可視化ソフトを用いて、すべての除去ステップを参照し、優良解を選定する。

以上のプロセスを図 1 の簡単なトラスの例題で示す。図 1 には、解析モデルとすべての除去ステップを汎用可視化ソフトで表示した結果を示している（上記プロセス⑤）。図に示すように、各ステップでひずみエネルギー密度が最小となる要素が 1 要素ずつ除去されていることがわかる。図中、Step2 と Step4 は不安定構造となっているが、除去要素の密度を $1/10^3$ としているため解が得られている。

以上のように、本手法は、非常に単純であり、また、中間密度が無いため、解の選択も容易であることがわかる。

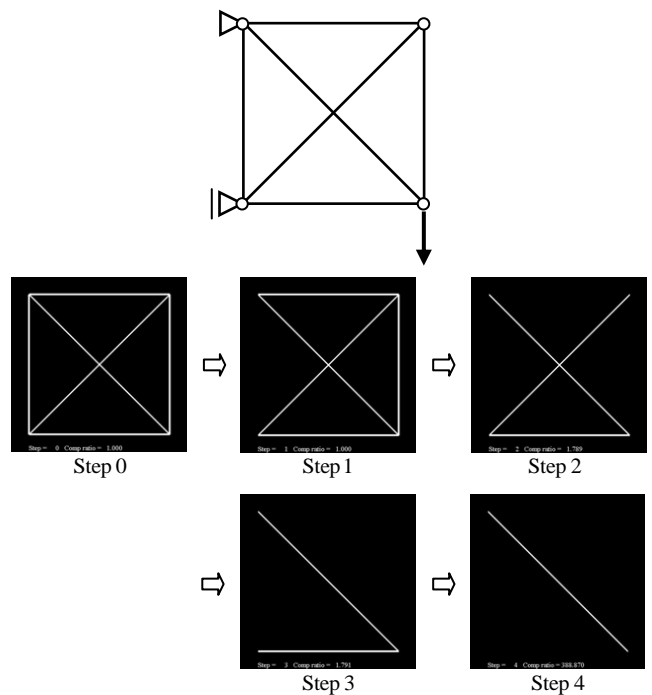


図 1 トラスの解析モデルと解析プロセス

4. 解析例

ここでは、3章で提案した単純な手法（提案手法）の有効性を、2章に示す数値計画法にもとづく手法（以下比較手法と呼ぶ）との比較により検証する。

4.1 9節点トラス構造の位相最適化

図2は、基本的なトラス構造のグランドストラクチャを示す。部材断面積はすべて等しく、接合部および支点はピン接合である。

図3は、Case Aについて3章に示す提案手法の全ステップの解析結果を示している。図中には、各ステップのコンプライアンス比 C/C^0 (C^0 は0ステップのコンプライアンス) も示している。図3において、Step 3, 6, 7は不安定構造であるが、除去要素が微小密度 ($1/10^3$) を有しているため解が得られている。また、Step 3, 4は、剛性に寄与しない要素を除くとStep 5と同じになる。図4は、2章に示す比較手法の解析結果 (Case A) を示す。ただし、(1)式のべき乗数 p と質量制約 \bar{m}/m^0 (m^0 は初期構造の質量) は、図に示すとおりである。再計算回数は30としている。図3と図4を比較すると、図4の比較手法の最適位相は提案手法のStep 5で得られていることがわかる。

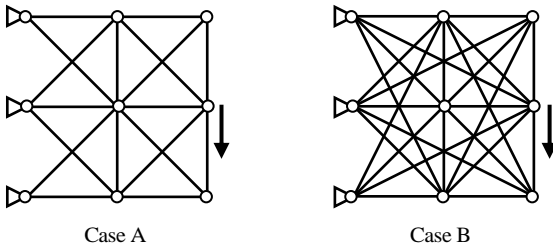


図2 解析例1 (9節点トラス)

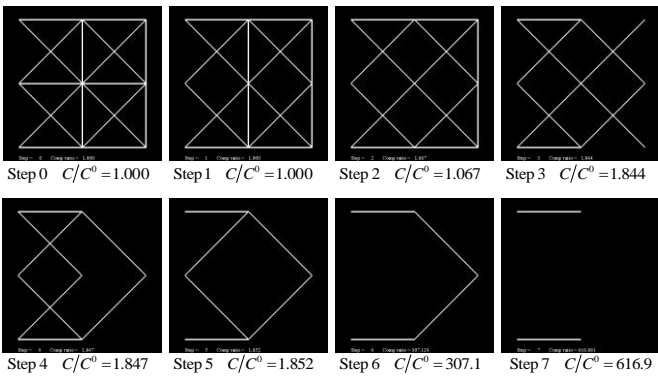


図3 解析例1 (Case A) の提案手法による解析結果

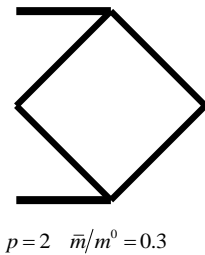


図4 解析例1 (Case A) の比較手法による解析結果

図5と図6は、Case Bについて、提案手法の全ステップの解析結果と比較手法の解析結果を示している。ただし、比較手法の質量制約とべき乗数 p は図に示すとおりで、再計算回数は1回としている。図より、この場合も、比較手法の $\bar{m}/m^0 = 0.3$, $\bar{m}/m^0 = 0.1$ の解は提案手法のStep 9, Step 11の解と一致することがわかる。

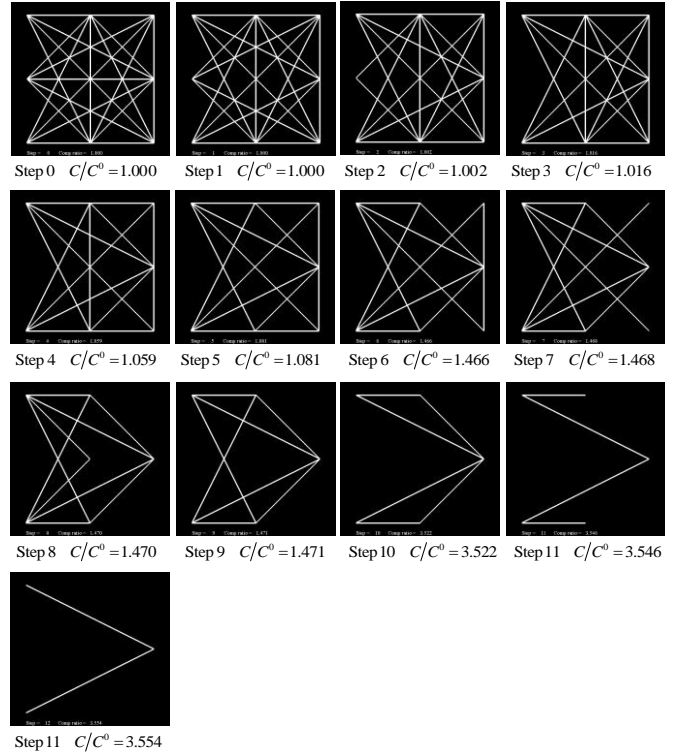


図5 解析例1 (Case B) の提案手法による解析結果

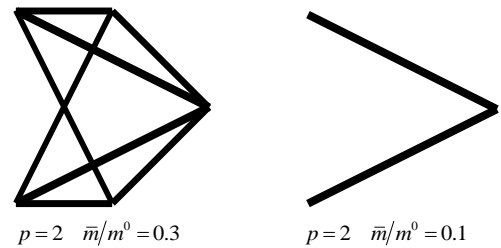


図6 解析例1 (Case B) の比較手法による解析結果

4.2 15節点トラス構造の位相最適化

次に、図7は、15節点のトラス構造のグランドストラクチャを示す。ただし、Case AとCase Bでは、支持点と荷重点の位置が異なる。図8、図9は、提案手法の解と比較手法の解を比較したものである。ただし、比較手法の質量制約は $\bar{m}/m^0 = 0.1$ 、再計算回数は100としている。これらの図より、Case Aは似通った位相、Case Bは一致した位相が得られていることがわかる。ただし、コンプライアンス値の比較では、比較手法の結果は部材太さが異なるため、得られた解の部材断面積をすべて均一にして再計算したものと比較している。その結果、図中に示すように比較手法の解と提案手法の解のコンプライアンス比は、Case Aでは0.992、Case Bでは1.000となった。したがって、Case Aでは、提案手法の解の剛性が比較手法の解の剛性に比較してやや小さいことがわかる。

以上の結果より、トラス問題では、図7のCase Aを除いて、提案手法により比較手法の最適位相と一致した解が得られることがわかった。なお、図7のCase Aについては、部材太さの不均一性が影響しているのではないかと考え、試しに、3章に示す方法で、最小ひずみエネルギー密度の要素をすぐに除去するのではなく、要素密度を $1 \rightarrow 0.5 \rightarrow 1/10^3$ と、2段階で除去する方法で再度解析を行ってみた。その結果、図10に示すように、鉛直部材のみ密度0.5となる位相が得られ、部材太さを均一にすると、比較手法の解のコンプライアンスよりも小さくなった。したがって、より最適な位相を得るためには、要素密度を段階的に小さくする方法も考えられるが、その分、解析ステップ数も増加し、また、中間密度が残ることにより複雑な位相となる場合もあるため、本論文では採用しない。

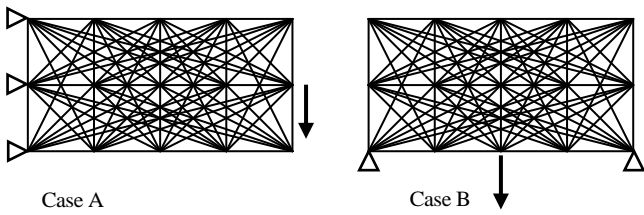


図7 解析例2 (トラス)

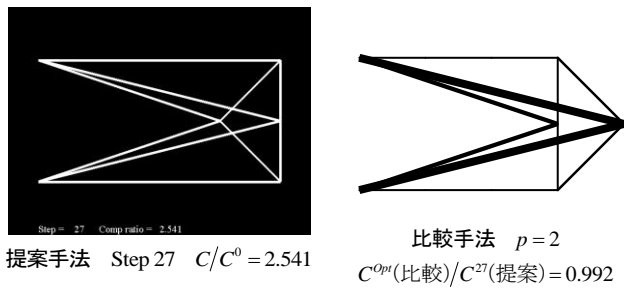


図8 解析例2 (Case A) の解析結果の比較

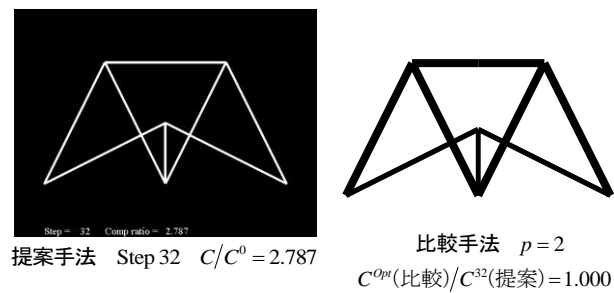


図9 解析例2 (Case B) の解析結果の比較

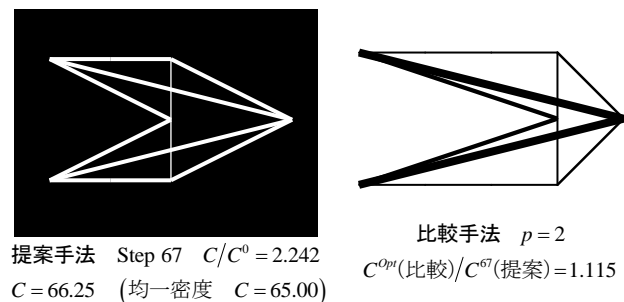


図10 要素密度を2段階に変化させた場合の解析結果の比較

4.3 剛接骨組構造の位相最適化

図11は節点数35の剛接骨組構造の解析モデルとそのグランドストラクチャを示したものである。部材断面積は均一とし、ヤング係数は206GPa、荷重は1kN/cmの鉛直等分布荷重と0.2kN/cmの水平等分布荷重を一番上の梁(水平材)に加えている。ただし、荷重が加わる梁の要素密度は固定(非設計対象要素)とし、それ以外の全部材を設計対象要素とする。なお、鉛直荷重による解析と水平荷重による解析は別々に行っている(1ステップ2回の解析)。

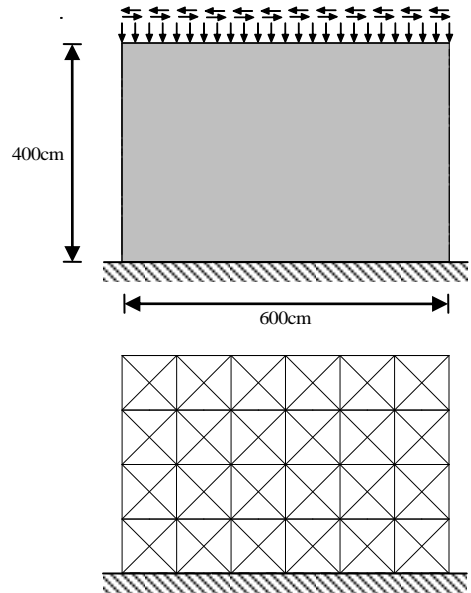


図11 解析例3の解析モデルとグランドストラクチャ

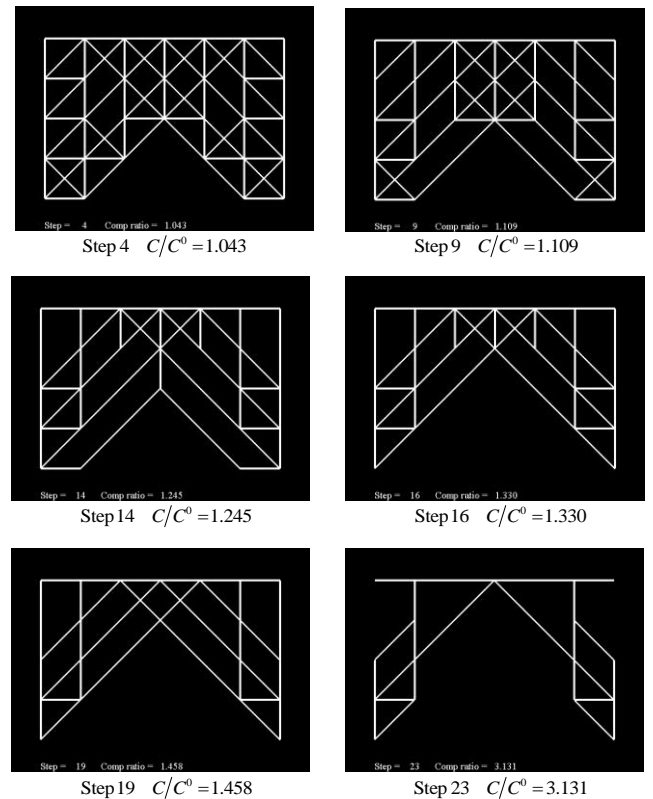


図12 解析例3の提案手法による解析結果

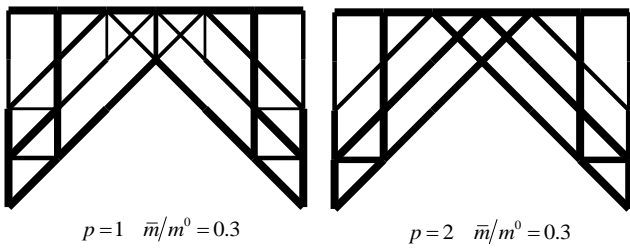


図 13 解析例 3 の比較手法による解析結果

図 12 は、提案手法の解の中から適当に抽出したステップの解を示している。また、図 13 は、比較手法によって得られた解を示している。ただし、質量制約 \bar{m}/m^0 およびべき乗数 p は図に示すとおりであり、再計算回数は 10 としている。図 12 と図 13 を比較すると、比較手法の $p=1$ の解は、提案手法の Step 16 の解と一致しており、 $p=2$ の解は、Step19 の解と一致していることがわかる。

したがって、提案手法では、剛接骨組構造においても、比較手法と同じ最適位相が得られることがわかる。ただし、比較手法では、質量制約やペナルティに用いるべき乗数等の計算条件によって様々な解が得られるため、提案手法と比較手法の解が一致するのは、ある特定の計算条件の解であることに注意が必要である。

4.4 骨組構造の形態創生

図 14 は、ビルのファサードの形態創生解析モデルとそのグランドストラクチャ¹⁵⁾を示したものである。グランドストラクチャの部材はすべて 10cm×10cm の中実断面とし、床梁のヤング係数は鋼材を想定し 206GPa、柱および斜材のヤング係数は鉄筋コンクリートを想定し 20.6GPa とし、荷重は 1kN/cm の鉛直等分布荷重と 0.2kN/cm の水平等分布荷重を床梁に加え、床梁は非設計対象要素としている。

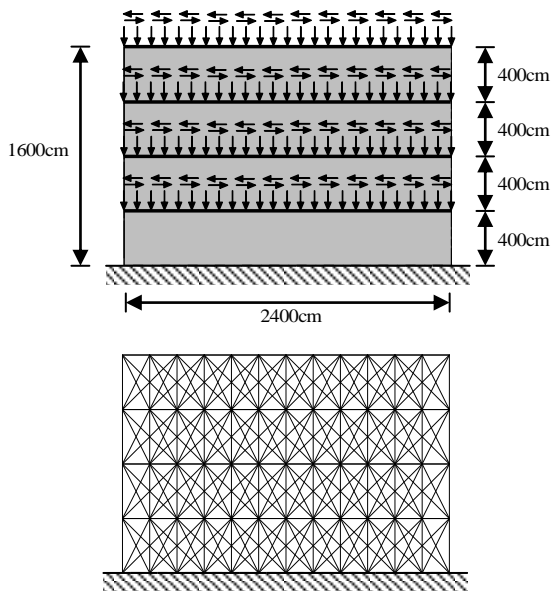


図 14 解析例 4 の解析モデルとグランドストラクチャ

図 15 は、提案手法の解の中から適当に抽出したステップの解を示している。図 16 は、比較手法によって得られた解を示している。ただし、比較手法の質量制約およびべき乗数は図に示すとおりであり、

再計算回数は 30 としている。図 15 と図 16 を比較すると、比較手法の $\bar{m}/m^0=0.2$ の解は、提案手法の Step 103 あたりの解が類似しており、 $\bar{m}/m^0=0.1$ の解は、Step116 あたりの解が類似していることがわかる。しかしながら、ファサードデザインを考える場合、提案手法の Step 123, Step128 のような解も設計のヒントを与えると思われる。したがって、このようなシンプルな形態まで求められるのは提案手法の利点と言える。また、比較手法では中間密度にペナルティを与えても最適位相の部材太さに違いが見られるのに対して、提案手法では部材太さが変わらない位相を求められるところも利点である。

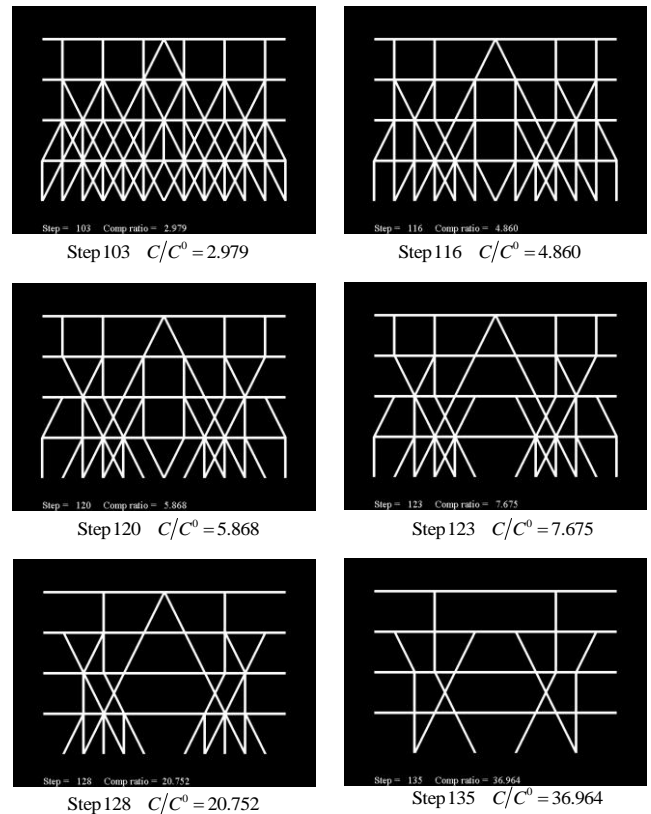


図 15 解析例 4 の提案手法による解析結果

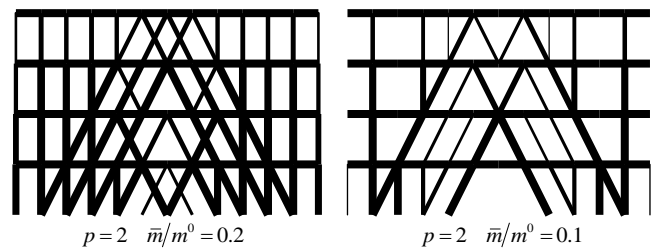


図 16 解析例 4 の比較手法による解析結果

図 17 は、提案手法の Step 123 から考えたファサードデザインの一例である。ただし、このファサードは、鉄筋コンクリート構造をイメージし、型枠が製作しやすいよう、Step 123 の部材をある程度統合し、力の流れを考慮したデザインとしている。また、図 18 は、図 17 のファサードを用いた建物の外観イメージパースである。これらの図より、意匠設計者が、提案手法で得られた位相をもとに、建物の構造デザインを行うことは十分可能であると考えられる。

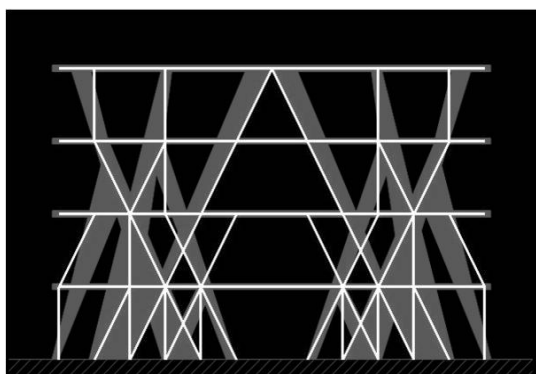


図 17 ファサードデザイン例

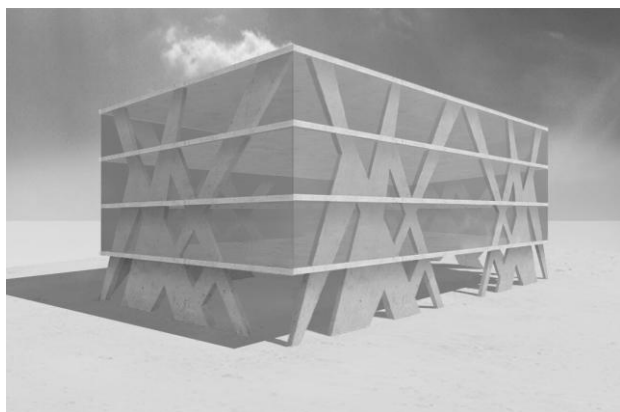


図 18 外観イメージパース

5. まとめ

本論文では、グランドストラクチャ法に初期の ESO 法（双方向ではなく一方向）の考え方を適用した骨組構造の簡易的な位相最適化手法を提案した。そして、提案手法により得られる解と従来の線要素の材料密度を連続的に変化させて最適位相を求める方法（比較手法）との解を比較し、提案手法の有効性を検証した。その結果、以下のような知見が得られた。

- (1) トラス構造の位相最適化問題では、提案手法により、比較手法の最適解の位相と一致するかあるいは類似する位相が得られ、また、類似する位相もコンプライアンスは大差なく、最適解に近い優良解となることがわかった。
- (2) 剛接骨組構造の位相最適化問題でも、比較手法において、適当

な質量制約と解析パラメータを設定することで、提案手法と一致する最適位相が得られることがわかった。

- (3) 建築物のファサードデザインを創生する問題では、提案手法と比較手法の解は類似性を持っているが、完全に一致する位相は得られなかった。しかしながら、提案手法では、位相の変化がステップごとに参照できるため、力の流れを把握しやすく、これらをもとに、力学的な合理性を有する構造デザインを考えることは十分可能であることがわかった。

以上の結果より、本提案手法は、すべての場合に必ずしも最適解を与えるものではないが、構造設計や構造デザインに対して、明確な提案を与えることができ、また、計算アルゴリズムも非常に簡単であることから、動的問題や非線形問題など幅広い分野に应用が可能であることがわかった。なお、本手法の最終解に到達するまでの計算時間は解析例 4 においても通常のパソコンで数秒であり、計算負荷は小さいことを付記しておく。

参考文献

- 1) Dorn, W., Gomory, R. and Greenberg, H. : Automatic design of optimal structures. *J. de Mecanique*, 3, 25-52, 1964
- 2) Rozvany, G.I.N. : *Structural Design via optimality Criteria*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- 3) Rozvany, G.I.N. (ed.) : *Topology Optimization in Structural Mechanics*, CISM Courses and Lectures 374, Springer, 1997
- 4) 河村拓昌, 大森博司 : 遺伝的アルゴリズムによる立体トラス構造物の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 538 号, pp.115-121, 2000.12
- 5) 高田豊文, 松岡貴士 : 体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジー最適化問題への線形計画法の適用, 日本建築学会構造系論文集, 第 598 号, pp.87-91, 2005.12
- 6) 藤井大地, 松本慎也, 藤谷義信, 菊池昇 : グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化, 構造工学論文集, Vol.46B, pp.1-8, 2000.3
- 7) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣 : 最適化手法 CONLIN を用いた骨組構造の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.548, pp.59-66, 2001.10
- 8) 藤井大地, 真鍋匡利, 高田豊文 : グランドストラクチャー法による建築構造の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 633 号, pp.1967-1973, 2008.11
- 9) 河村拓昌, 大森博司 : 遺伝的アルゴリズムによる接合状態を考慮した離散的構造物の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 555 号, pp.121-128, 2002.5
- 10) Xie, Y. M., Steven, G. P. : A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Computers and Structures* Vol.49, pp.885-886, 1993
- 11) Young, V., Querin, O. M., Steven, G. P. and Xie, Y. M. : 3D and Multiple Load Case Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization (BESO), *Structural Optimization*, Vol.18, pp.183-192, 1999
- 12) Huang, X., Xie, Y. M. : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.43, pp.1039-1049, 2007
- 13) Steven, G. P., Querin, O. M., Xie, Y. M. : Evolutionary structural optimisation (ESO) for combined topology and size optimisation of discrete structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vo.188, pp.743-754, 2000
- 14) Zhou, M., Rozvany, G.I.N. : On the validity of ESO type methods in topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.21, pp.80-83, 2001
- 15) 藤井大地 : 建築デザインと最適構造, 丸善, 2008