

IESO 法を用いた自由曲面シェル構造の形態創生

COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF FREE FORMED SHELLS USING IESO METHOD

上村紘一*

Koichi KAMIMURA*

In this paper, a simple method to find an optimal shell structure is proposed. In this method, a rectangular fixed design domain with given boundary conditions and body forces is modeled by voxel mesh, and strain energies of elements (voxels) are obtained by voxel finite element method. Next, elements with small strain energy are gradually removed by the Improved Evolutionary Structural Optimization (IESO) method. Finally, we can obtain a shell structure that shape, thickness and topology are optimized. In this paper, several numerical examples will be shown in order to verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords : Topology optimization, ESO method, Computational Morphogenesis, Continuum shell structure, Voxel finite element method

位相最適化, ESO 法, 形態創生, 連続体シェル構造, ボクセル有限要素法

1. はじめに

自由な曲面を実現できるコンクリートシェルは、これまで多くの魅力ある建築物を産み出してきた。また、近年、コンクリートの高強度化、軽量化、新素材による補強の多様化に伴い、様々な形態のコンクリートシェルが建設されつつある。一方、このようなコンクリートシェルは、数値解析において連続体として扱われ、有限要素法等、一般の建築物に比較してより高度な解析技術が必要となる。さらに、数学的関数を用いない自由曲面シェルでは、応力分布が複雑になり、力学的に最適な曲面を決定することは容易ではない。

このような背景から、シェル構造に関しては、形状最適化等の最適化技術の導入が進んでおり、建築家が描いた曲面を、形状最適化手法を用いて修正する方法が実際に用いられている¹⁾。しかしながら、位相(トポロジー)を最適化する技術については、研究は進んでいるものの^{2,3,4)}、未だ実用化には至っていない⁵⁾。また、コンクリートシェルのような連続体シェルは、形状だけでなく厚みの分布も設計対象となり、これにトポロジーが加わると非常に複雑な最適化問題となる。

大森ら⁶⁾は、このような複雑な問題に対して、三角形シェル要素で分割した自由曲面を NURBS 関数で表し、曲面と板厚を徐々に最適化し、板厚の薄くなったところに孔を空けるという手法を提案している。しかし、この方法ではトポロジーの変化に応じて有限要素をリメッシュする必要があるため、数値実装が煩雑となる。一方、トポロジー最適化の手法として、固定設計領域を均一な直方体要素(ボクセル)で分割し、その固定設計領域内で自由に形態を創生させるボ

クセル有限要素法を用いたトポロジー最適化手法がある。本手法はすでに汎用ソフトにもなっており、連続体シェル構造の最適なトポロジー・板厚・形状を同時に求める方法としては扱いやすい。しかしながら、このような方法では、シェルの形状の変化に伴い、荷重を与える位置が変化するため、形状を決めずにシェルの形態を創生することは難しいと考えられる。

そこで本論文では、あらかじめ形状を決定するとなく連続体シェル構造の形態を創生することが可能なトポロジー最適化手法を提案する。本手法は、ボクセル分割された固定設計領域(通常は直方体)全体に物体力(体積力)を与える方法であり、鉛直方向の物体力を与えた場合はカテナリーアーチと同様な断面形状の輪郭をもつシェル形態が得られる。また、鉛直方向と同時に水平方向にも物体力を与えれば、地震力にも対応したシェルの形態を創生することも可能になる。

本論文では、本手法の有効性を検証するため、文献 7), 8) で提案したボクセル有限要素法を用いた改良型 ESO 法 (IESO 法) を用いる。本手法は、BESO 法⁹⁾、拡張 ESO 法²⁾、CA-ESO 法¹⁰⁾ の利点を組み合わせ、初期の ESO 法¹¹⁾ を改良した方法で、3次元の剛性最大化問題において数値計画法に劣らない解が得られる。本論文では、本手法に物体力を与えることで連続体シェル構造の形態創生が可能となることを示し、その有効性を検証する。また、本手法の実際的设计への適用性を検証するため、境界形状や設計領域を変化させることで設計条件に適応した連続体シェル構造の形態創生が可能となることを示し、その有効性を検証する。

* 近畿大学大学院 システム工学研究科大学院生

Graduate Student, Graduate School of Systems Engineering, Kindai Univ.

2. IESO法の概要

本論文に用いるトポロジー最適化手法では、物体領域を包含する直方体の固定設計領域（各辺の長さ： L_x, L_y, L_z ）を設定し、これを均等な直方体要素（ボクセル）で分割する（各辺の有限要素分割数： n_x, n_y, n_z ）。そして、物体領域と空洞領域の判別は設計変数であるボクセルの密度の有無（0/1）によって与える。この時、ボクセルの各辺の長さ l_x, l_y, l_z は、 $l_x = L_x/n_x$ 、 $l_y = L_y/n_y$ 、 $l_z = L_z/n_z$ となる。

ボクセルを用いた応力解析の方法（ボクセル有限要素法）は、文献12)に示すものにしたがう。また、IESO法^{7,8)}によるトポロジー最適化では、ボクセル有限要素法の利点を生かすため、最適化の過程でリメッシュは行わず、物体領域となる存在要素の密度を1、空洞領域となる除去要素の密度を0とすることで各ステップの材料分布を決定する。

IESO法^{7,8)}では、要素除去に関しては、拡張ESO法²⁾のルールを用いる。ただし、要素除去の指標としてBESO法⁹⁾で用いられているひずみエネルギー感度（コンプライアンスの要素密度に関する感度⁹⁾）を用いる。したがって、要素除去のルールは次式となる。

$$\rho_i = 0 \quad \text{if} \quad \alpha_i < X_{cr} \quad ; i=1, \dots, N_L \quad (1)$$

ここに、 ρ_i 、 α_i は要素 i の密度（0 or 1）とひずみエネルギー感度、 N_L は残存要素数、 X_{cr} は閾値で、次式で定義される。

$$X_{cr} = \alpha_{av} - \eta \cdot \phi \quad (2)$$

ただし、 α_{av} と ϕ は残存要素のひずみエネルギー感度の平均値と標準偏差であり、次式から計算される。

$$\alpha_{av} = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} \alpha_i \quad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_L} (\alpha_i - \alpha_{av})^2}{N_L}} \quad (3)$$

ここに、 η は要素の除去量を制御する制御変数であり、 η が大きいと要素が除去されにくく、 η が小さいと除去されやすくなる。

IESO法では、BESO法と同様に各ステップの要素除去率を与える。この除去率を λ とすると、第 k ステップの除去要素数 $N_R^{(k)}$ は、次式で計算される。

$$N_R^{(k)} = \begin{cases} \lambda N_L^{(k-1)} & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} \geq \bar{N}_L \\ N_L^{(k-1)} - \bar{N}_L & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} < \bar{N}_L \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 $N_L^{(k-1)}$ は $(k-1)$ ステップの残存要素数、 \bar{N}_L は残存要素数の制約値（下限値）である。そして、(1)式で除去される要素数が、(4)式の $N_R^{(k)}$ に近くなる $\eta^{(k)}$ （第 k ステップ(2)式の η ）をプログラム内で自動計算する⁸⁾。

一方、(1)式の α_i は、次のように求められる^{7,9)}。まず、次式により要素のひずみエネルギー α_i^e が計算される。なお、これは、コンプライアンスの要素密度に関する感度の1/2に相当する^{7,9)}。

$$\alpha_i^e = (1/2) \mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \quad (5)$$

ただし、 \mathbf{K}_i 、 \mathbf{d}_i は要素 i の剛性マトリクスと節点変位ベクトルを表す。次に次式により節点 j の感度が計算される。

$$\alpha_j^n = \left(\sum_{i=1}^{M^e} \alpha_i^e \right) / M^e \quad (6)$$

ここに、 α_j^n は節点 j のひずみエネルギー感度、 M^e は節点 j と接続関係を有する要素の数を表す。なお、これは、チェッカーボード状

の密度分布を防ぐために行われる。そして、(1)式の α_i は次式から計算される。

$$\alpha_i = \left(\sum_{j=1}^{M^e} w(r_{ij}) \alpha_j^n \right) / \sum_{j=1}^{M^e} w(r_{ij}) \quad (7)$$

ただし、 M^e は要素 i の要素中心から影響半径 r_{\min} の球体内に含まれる節点数、 r_{ij} は要素 i の中心から節点 j までの距離、 $w(r_{ij})$ は要素中心からの距離に比例する重みで、次式で定義される。

$$w(r_{ij}) = r_{\min} - r_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, M^e) \quad (8)$$

以上の解析では、有限要素解析に必要なデータとして、固定設計領域の大きさ (L_x, L_y, L_z) 、分割数 (n_x, n_y, n_z) 、ヤング係数、ポアソン比、境界条件、荷重条件がある。また、最適化計算に必要なデータとして、(8)式の影響半径 r_{\min} （実際には、 $r_{\min} = b_r \cdot l_x$ として l_x の倍数 b_r （影響半径倍率）で与える）、(4)式の残存要素数の下限値 \bar{N}_L （実際には、目標体積比 $\bar{V}_r = \bar{N}_L / (n_x \cdot n_y \cdot n_z)$ で与える）、除去率 λ （残存要素数に対する1ステップの除去率）がある。固定設計領域内に空洞領域や非設計領域を設定する場合は、設計対象から除外する要素の番号・密度情報（0/1）を定数として入力する必要がある。

3. 物体力の付加方法と計算アルゴリズム

3.1 物体力の付加方法

次に物体力の付加方法を示す。1つのボクセルの物体力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_X^{(i)} &= \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_X \\ B_Y^{(i)} &= \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_Y \\ B_Z^{(i)} &= \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_Z \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、 $B_X^{(i)}, B_Y^{(i)}, B_Z^{(i)}$ はボクセル i の物体力、 γ は単位体積質量、 $(l_x \cdot l_y \cdot l_z)$ はボクセルの体積、 g_X, g_Y, g_Z は X, Y, Z 方向の加速度を表す。ただし、 X, Y, Z は全体座標系を表す。

ここで扱うボクセルは、すべて同体積であり、8節点直方体要素であるため、(9)式は各要素の節点荷重として次のように表される。

$$\begin{aligned} f_{X_j}^{(i)} &= B_X^{(i)} / 8 = (1/8) \cdot \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_X \\ f_{Y_j}^{(i)} &= B_Y^{(i)} / 8 = (1/8) \cdot \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_Y \quad (j=1, \dots, 8) \\ f_{Z_j}^{(i)} &= B_Z^{(i)} / 8 = (1/8) \cdot \rho_i \cdot \gamma \cdot (l_x \cdot l_y \cdot l_z) \cdot g_Z \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 $f_{X_j}^{(i)}, f_{Y_j}^{(i)}, f_{Z_j}^{(i)}$ は、ボクセル i の節点 j の節点荷重を表す。したがって、(9)式の各ボクセルの物体力は、ボクセルの各節点に(10)式の節点荷重を加えることで与えられる。

3.2 計算アルゴリズム

物体力が加わる問題では、要素が除去されると密度が0となり、(9)式で求められるその要素の物体力（節点荷重）も0となるため、ボクセル解析で用いている連立方程式の解法（共役勾配法）の収束解の精度が悪化する。このため、除去要素の密度を完全に0にすると、孤立節点が生じて連立方程式の解が発散する場合がある。したがって、本論文の解析では、孤立節点が生じても解が求まるように除去要素の密度は0.001としている。

また、文献8)では、(4)式の除去率を $\lambda = 0.05 \sim 0.1$ に設定し、物体領域と空洞領域の境界を平滑化する仕上アルゴリズム⁸⁾を適用する方法を示している。しかしながら、物体力が加わる問題では、各ステップでトポロジーが大きく変化すると荷重も大きく変わるため、共役勾配法の解の精度が悪化する。これは、このような進化的手法では、共役勾配法の解の初期値として前ステップの解を用いるためでもある。したがって、除去率 λ が大きい場合、対称問題でも非対称な解が得られる場合がある。

以上のような問題の解決法としては、直接法により連立方程式を解くことも考えられるが、スパスルバを用いたとしても大規模問題においては大容量のメモリが必要となる。したがって、本論文では、除去率 λ を 0.01 程度の小さい値に設定することで対応する。

4. 数値解析例

4.1 球形シェルと円筒シェル

まず、本手法の有効性を確かめるために、Fig.1 に示す固定設計領域の底面に、Fig.2 に示す円 (S.C.1) と平行線 (S.C.2) の支持条件 (Support condition) を与えた問題の解析を行う。ただし、固定設計領域のボクセル分割数は $100 \times 100 \times 50$ とし、Fig.2 の黒塗りで示される要素底面の節点は完全拘束とする。Fig.3, Fig.4 は、Fig.2 の支持条件に対して、Fig.1 の固定設計領域に鉛直方向の物体力 (重力) を加えた場合の IESO 法による解析結果を示す (Case 1, Case 2)。ただし、目標体積比 \bar{V}_r は、Case 1 において 0.06, Case 2 において 0.1, 除去率 λ は 0.01, 影響半径倍率 b_r は 1 としている。なお、Case 1 では、頂部に孔の空く目標体積比としたため円筒より低い目標体積比となっている。図には、収束ステップ数、平均コンプライアンス比 C/C_0 (初期平均コンプライアンス C_0 と最終ステップの平均コンプライアンス C の比) も示している。なお、 C/C_0 が小さくなるのは、要素除去によって全体の物体力も小さくなるためである。Fig.3, Fig.4 に示すように、円の支持条件からは球形シェルが、平行線の支持条件からは円筒シェルが創生される。Fig.5 は、Case 1, Case 2 のシェル中央断面にカテナリー曲線を重ねた図を示す。図に示すように、得られたシェルの断面は、カテナリー曲線に近い形態となっている。カテナリー曲線を反転すると自然に安定したアーチとなり、地面にむかう推力は常にアーチの軸線に沿って働くので構造的に安定する形態となる。また、Fig.6 は、Fig.5 のカテナリー曲線に等分布鉛直荷重を加えた時の軸力分布を示しているが、この軸力分布と Fig.6 の断面厚分布がほぼ対応しており、軸力が大きい支持部分は板厚が厚くなっている。したがって、Fig.3, Fig.4 の形態は、シェルの形状・板厚の両方に力学的合理性を有していることがわかる。

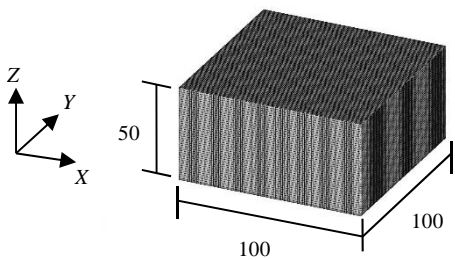


Fig.1 Fixed design domain of analysis (model 1)

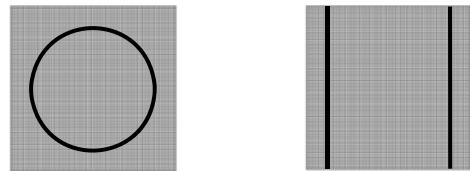


Fig.2 Support conditions in the bottom of fixed design domain

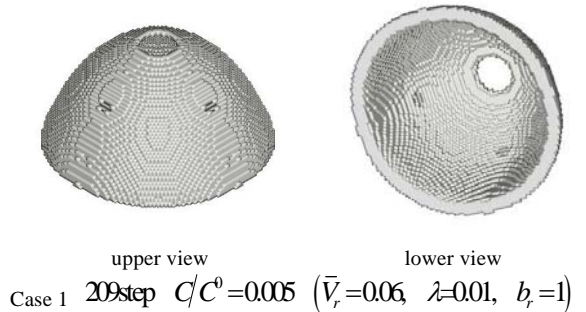


Fig.3 Optimal configuration in Case 1

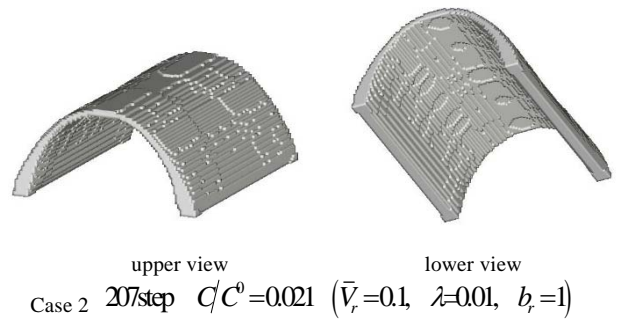


Fig.4 Optimal configuration in Case 2

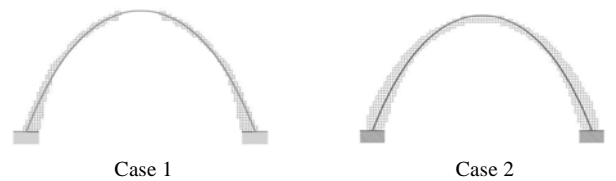


Fig.5 Cross sections of results and corresponding catenaries

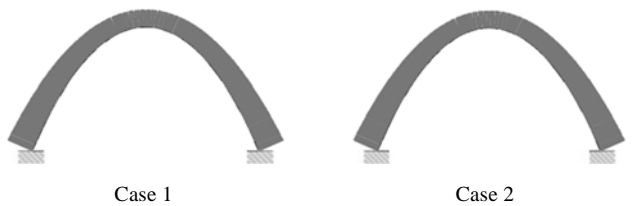


Fig.6 Axial forces acting on catenaries in Fig.5

次に、Fig.7, Fig.8 は、Fig.2 の支持条件 (S.C.1, S.C.2) で、Fig.1 の固定設計領域に Z 軸方向の重力と重力の 0.2 倍の X, Y 軸方向の水平物体力 (地震力) を双方向に加えた場合の解析結果を示す (Case 3, Case 4)。なお、実際の解析では、それぞれの方向に物体力を与えた解析を個別に行い、各解析の要素ひずみエネルギーの総和により感度を計算している。ただし、最適化のパラメータは Case 1, Case 2 と同じものを用いている。図に示すように、Case 3 の球形シェルは、

Case 1 と類似の形態になっているのに対し、Case 4 の円筒シェルは、Case 2 と比較して桁行方向に波打った形態となっている。これは、円筒シェルに地震力が加わるとより複雑な応力分布になるためと考えられる。

Fig.9, Fig.10 は、Case 1 と Case 3 および Case 2 と Case 4 の立面図の比較を示す。図に示すように、地震力が加わるとシェルのライズが低くなるのがわかる。Fig.11 は、Case 3 と Case 4 のシェル断面にカタナリー曲線を重ねた図を示す。図に示すように、地震力を加えた場合も、断面形状はカタナリー曲線と近い形状となることがわかる。また、Fig.11 に示すように Case 3, 4 では、Case 1, 2 に比較して、支持部分が厚い板厚分布となっていることがわかる。これらは地震力が加わると支持部分に加わる力も大きくなり、支持部分の板厚が厚くなったと考えられる。

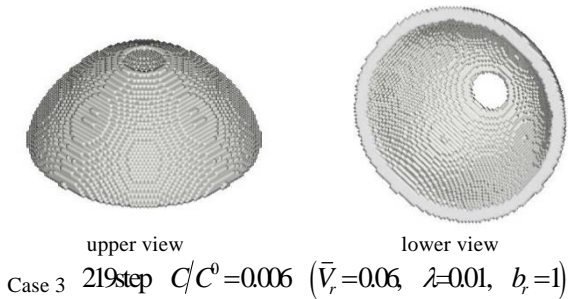


Fig.7 Optimal configuration in Case 3

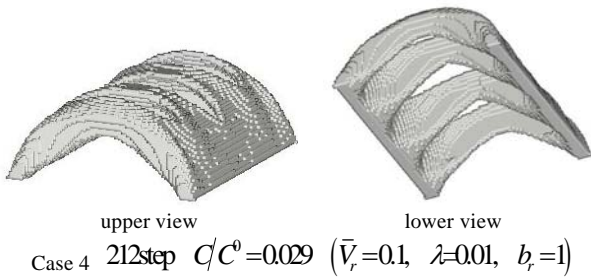


Fig.8 Optimal configuration in Case 4

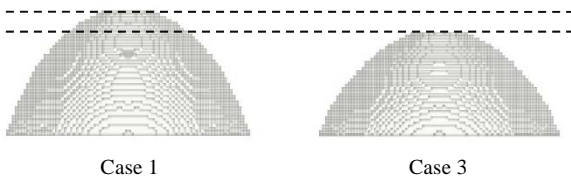


Fig.9 Comparison of elevations in Case 1 and in Case 3



Fig.10 Comparison of elevations in Case 2 and in Case 4



Fig.11 Cross sections of results and corresponding catenaries

4.2 開口を考慮した楕円形シェル

Fig.12 は、Fig.14 に示すように固定設計領域にあらかじめトップライトを想定して、非設計空洞領域を設定することにより、孔を設けた解析モデルを示す。また、固定設計領域底面の支持条件は、Fig.13 に示すような楕円形とする。ただし、固定設計領域のボクセル分割数は $100 \times 100 \times 35$ とする。Fig.15, Fig.16 は、Fig.12 の解析モデルに対して、鉛直方向の物体力（重力）を与えた場合（Case 5）と鉛直方向の重力と重力の 0.2 倍の水平物体力を与えた場合（Case 6）の IESO 法による解析結果を示す。ただし、目標体積比 \bar{V}_r は 0.05、除去率 λ は 0.01、影響半径倍率 b_r は 1 としている。

Fig.15, Fig.16 に示すように、本解析例では、初期に設定した孔の他にもう一つの孔が空いた楕円形のシェル構造が創生されることがわかる。ちなみに、Fig.15 の開口を設定しない場合の解析を行うと、中心（頂部）に 1 つだけの孔の空いた形態が得られる。したがって、この場合は、あらかじめ Fig.14 に示す開口を設定したことで、応力に偏りが生じ、別の箇所にもう 1 つの孔が空いたと考えられる。また、地震力を加えた場合は、同じように孔が 2 つのトポロジーとなるが、重力のみの場合と比較して、孔が小さくなる。また、Fig.17, Fig.18 は、Case 5, 6 のシェル中央の X, Y 2 方向の断面を示したものであるが、地震力の有無によって板厚分布はあまり変化しないが、地震力を加えた場合はシェルのライズがやや低くなるのがわかる。

以上のように、あらかじめ空洞領域を非設計領域として設定することで、開口を考慮したシェル構造の形態創生も可能であることがわかる。

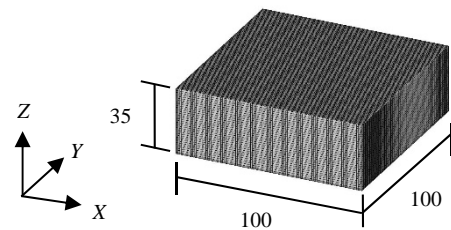


Fig.12 Fixed design domain (model 2)

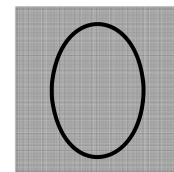


Fig.13 Support conditions in the bottom of fixed design domain

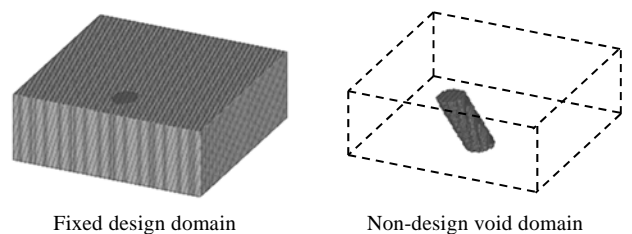
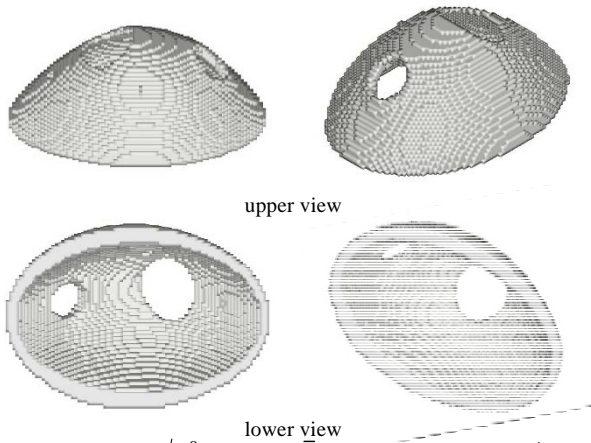
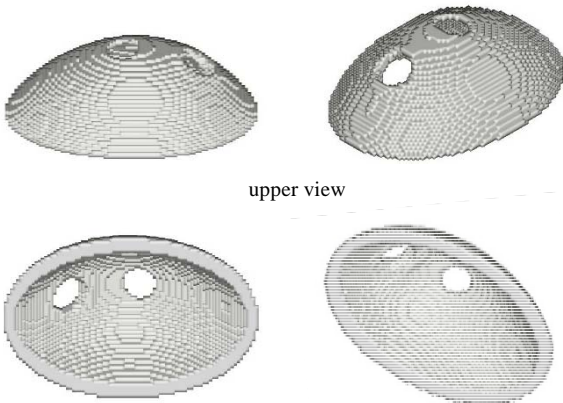


Fig.14 Design problem in Case 5 and Case 6



Case 5 25step, $C/C^0=0.006$ ($\bar{V}_r=0.05$, $\lambda=0.01$, $b_r=1$)
Fig.15 Optimal configuration in Case 5



Case 6, 26step, $C/C^0=0.006$ ($\bar{V}_r=0.05$, $\lambda=0.01$, $b_r=1$)
Fig.16 Optimal configuration in Case 6



Fig.17 Cross sections of optimal configuration in Case 5



Fig.18 Cross sections of optimal configuration in Case 6

4.3 実際の敷地を用いた自由曲面シェル構造の形態創生

次に、IESO法による構造形態創生法を実際の敷地に用いた例を示す。筆者は、地域として愛知県を選択し、Fig.19に示す愛知県名古屋市中村区の名古屋駅前とした。ここでは、Fig.20に示すような直方体の固定設計領域（要素分割数：100×100×25）を設定した。また、Fig.21に示すように固定設計領域にあらかじめトプライトを想定して、非設計空洞領域を設定することにより、孔（トプライト）を設けた解析モデルを示す。固定設計領域底面の支持条件は、Fig.20の右に示す黒塗りで示される要素底面の節点は完全拘束とする。それらは、Fig.21に示すような敷地形状に対応した支持条件を設定した。また、Fig.20右に示すように、エントランスを設けるために支持条件の一部を開けた形とした。

Fig.22, Fig.23は、Fig.8の解析モデルに対して、鉛直方向の物体力（重力）を与えた場合（Case 7）と鉛直方向の重力と重力の0.2倍の水平物体力を与えた場合（Case 8）のIESO法による解析結果を示す。ただし、目標体積比 \bar{V}_r は0.07、除去率 λ は0.01、影響半径倍率 b_r は1としている。また、収束ステップ数、平均コンプライアンス比 C/C_0 （初期平均コンプライアンス C_0 と最終ステップの平均コンプライアンス C の比）も示している。なお、 C/C_0 が小さくなるのは、要素除去によって全体の物体力も小さくなるためである。

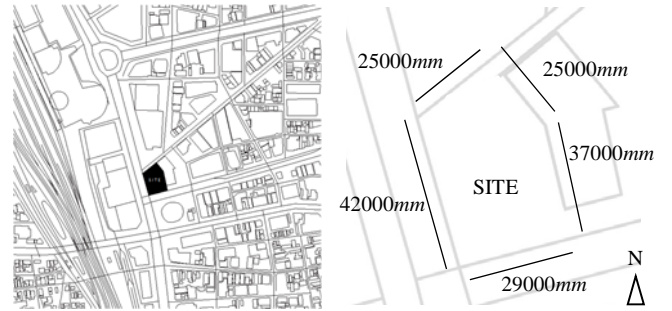


Fig.19 Site

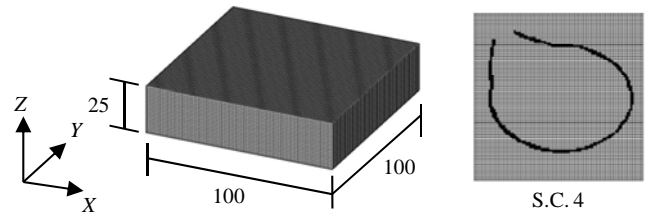
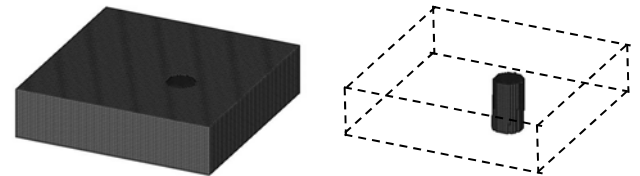
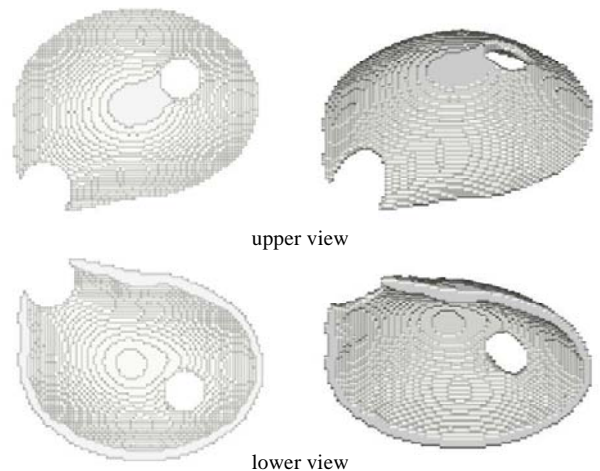


Fig.20 Fixed design domain and support condition (model 3)

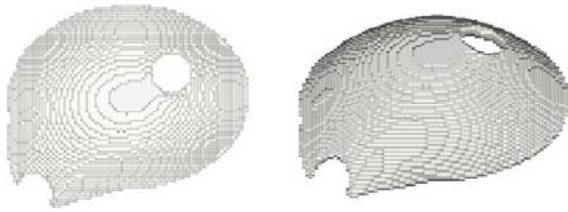


Fixed design domain Non-design void domain

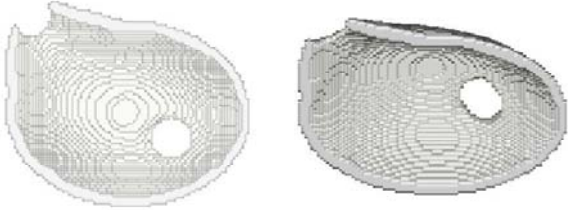
Fig.21 Design problem in Case 7 and Case 8



Case 7 231step $C/C^0=0.017$ ($\bar{V}_r=0.07$, $\lambda=0.01$, $b_r=1$)
Fig.22 Optimal configuration in Case 7



upper view



lower view

Case 8 233step $C/C^0 = 0.017$ ($\bar{v}_r = 0.07$, $\lambda = 0.01$, $b_r = 1$)
Fig.23 Optimal configuration in Case 8

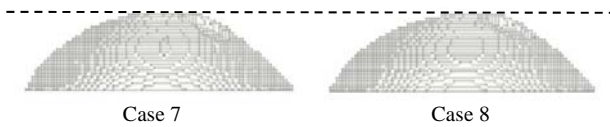


Fig.24 West elevation of optimal configuration in Case 7 and Case 8

以上の結果より、エントランス、孔（トップライト）、導線を考慮し、敷地条件に対応したシェル構造物の創生も可能であることがわかる。

鉛直方向の重力と重力の 0.2 倍の水平物体力を与えた場合（Case 8）の解析結果は、鉛直方向の物体力（重力）を与えた場合（Case 7）の場合と比べ、エントランス部分のライズが低くなった。ただし、コンプライアンス比やステップ数は同様の値が得られた。また、Fig.24 に示すように、この場合は、地震力によってライズは変化しないことがわかる。これらは、文献 12) に示すように、固定設計領域によりライズの上限が制約されているためと考えられる。

まとめ

本論文では、ボクセル有限要素法を用いた IESO 法により連続体シェル構造の形態を創生する手法を提案し、いくつかの解析例により、その有効性を検証した。また、本手法の実際の設計への適用性を検証した。その結果、以下のような知見が得られた。

- (1) 固定設計領域に支持条件と自重および地震力を物体力として与えることで、様々な連続体シェル構造の形態を創生することができる。
- (2) 自重のみを与えた球形および円筒シェル問題では、断面形状の輪郭がほぼカタナリー曲線と一致した。
- (3) 自重と地震力（水平物体力）を同時に与えると、重心が下がり、地震力に対応したシェル形態が得られる。
- (4) 境界形状を変化させることで設計条件に適応したシェル形態を創生することができる。

- (5) 事前に固定設計領域に孔（トップライト）を非設計空洞領域として設定することで、孔（トップライト）を考慮したシェル形態を創生できる。
- (6) エントランス計画部分に非設計空洞領域や、境界条件の一部を開けることで、エントランスを考慮したシェル形態を創生できる。

以上により、本手法は、シェルの形状、トポロジー、板厚を同時に最適化できる手法として、コンクリートシェル等のシェル構造の形態を検討する上で、有効なツールの一つとなりえる。また、コンクリートシェル等のシェル構造の、実際の設計デザインに用いることができる有効なツールの一つとなりえる。

謝辞

本論文の解析例のモデル作成および結果の表示には、(株)くいんと VOXELCON を利用している。(株)くいんと石井恵三氏、月野誠氏、英山寛之氏に、研究室で開発したプログラムとのデータリンクについて技術協力を受けたことを感謝する。

参考文献

- 1) 佐々木睦朗：FLUX STRUCTURE, TOTO 出版, 2005
- 2) 大森 博司, 崔 昌禹：拡張 ESO 法による構造形態の創生：多目的適応型構造とシェル構造への適用, 日本建築学科構造系論文集, Vol. 67, No.552, pp.109-116, 2002.2
- 3) Ruben Ansoła, Javier Canales, Jose A. Tarrago, John Rasmussen : An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures, Computers and Structures, Vol.80, 449-458, 2002
- 4) Pilseong Kang, Sung-Kie Youn : Isogeometric topology optimization of shell structures using trimmed NURBS surfaces, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.120, 18-40, 2016
- 5) L. L. Beghini, A. Beghini, N. Katz, W. F. Baker, G. H. Paulino : Connecting architecture and engineering through structural topology optimization, Engineering Structures, Vol.59, 716-726, 2014
- 6) H. Ohmori, T. Kimura, A. Maene : Computational Morphogenesis of Free Form Shells, Proceedings of the IASS Symposium 2009 Valencia, CD-ROM, Abstracts pp.158-159, 2009
- 7) 新内洋平, 松本慎也, 藤井大地：改良型 ESO 法を用いた 3 次元構造物の位相最適化, 日本建築学科構造系論文集, Vol. 81, No.723, pp.851-858, 2016.5
- 8) 新内洋平, 松本慎也, 藤井大地：IESO 法を用いた建築構造の形態創生, 鉛直荷重と地震荷重に抵抗する建物の自然形態, 日本建築学科構造系論文集, Vol. 82, No.731, pp.97-103, 2017.1
- 9) X. Huang, Y. M. Xie : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.43, 1039-1049, 2007
- 10) 藤井大地, 岡部 諒, 真鍋匡利：CA-ESO 法とボクセル有限要素法を用いた 3 次元構造物の位相最適化, 日本建築学科構造系論文集, Vol.79, No.703, pp.1279-1286, 2014.9
- 11) Y. M. Xie, G. P. Steven : Evolutionary Structural Optimization, Springer, 1997
- 12) 上村紘一, 真鍋匡利, 松本慎也, 藤井大地：IESO 法を用いた連続体シェル構造の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, Vol.83, No.745, pp.459-465, 2018.3