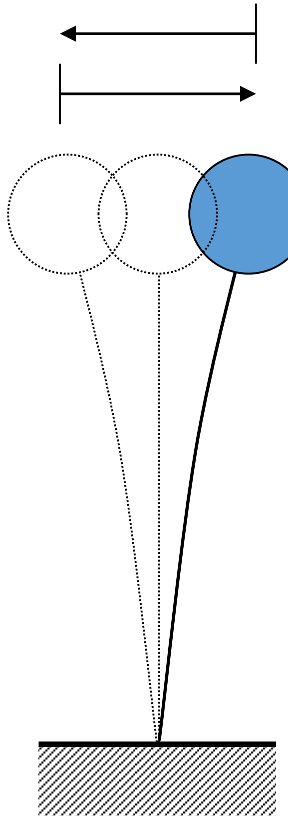
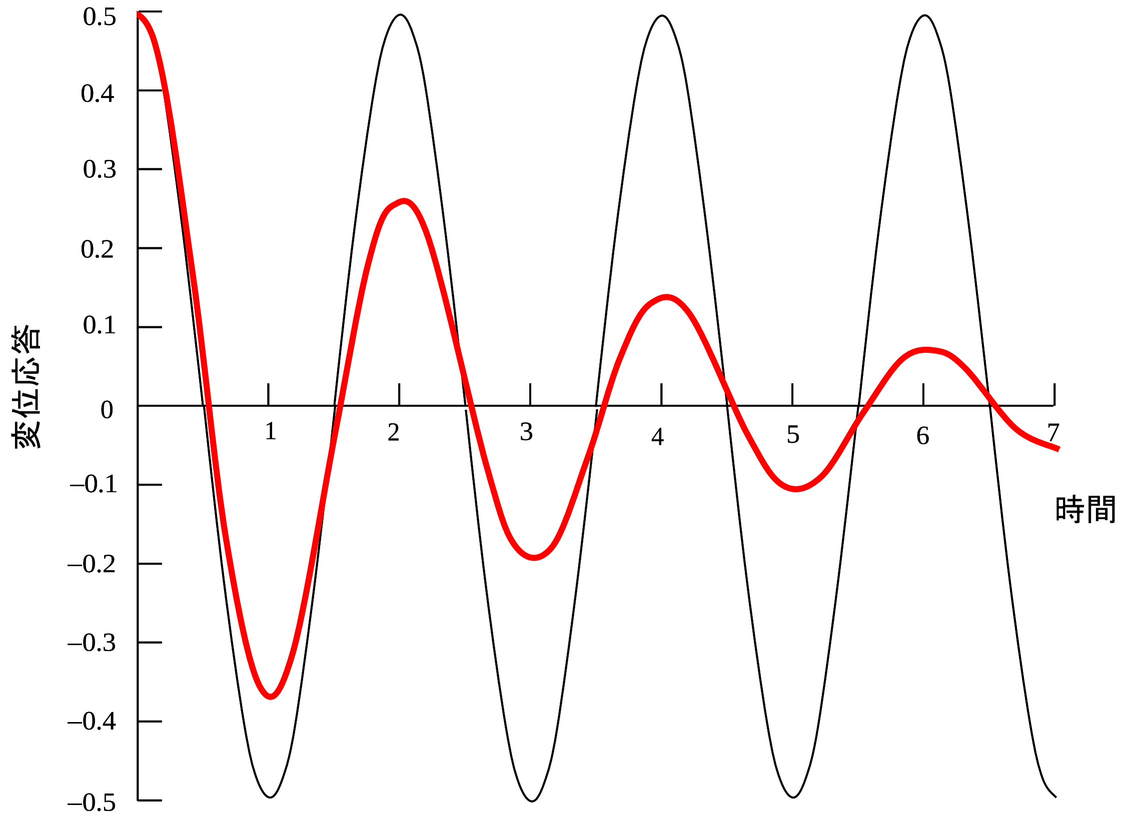
構造設計Ⅲ

第４回・第５回
建物の減衰自由振動の定式化と解法

減衰があるから建物の振動は収まる





減衰力によって地震に耐える

- 摩擦力による減衰
- 塑性化することによるエネルギー吸収

1 土壁で衝撃力を削ぐ

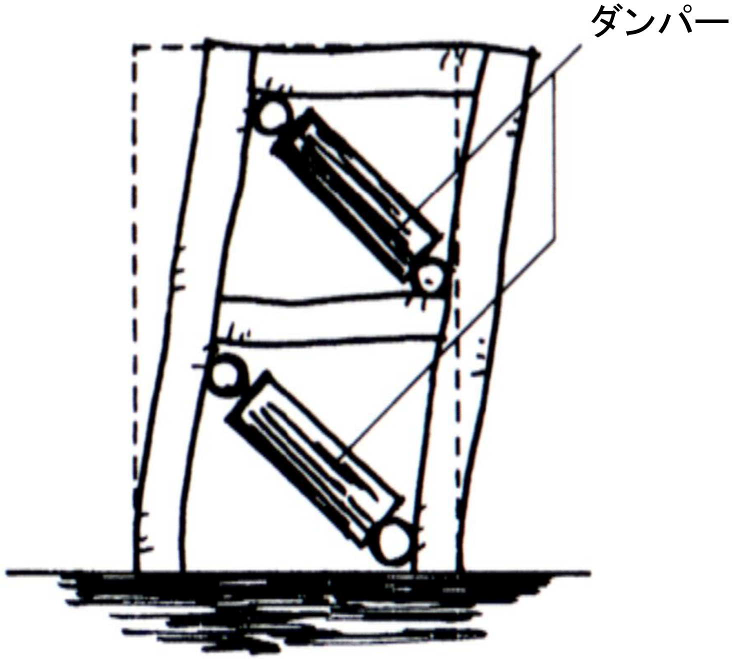
剛構造

塗り土が割れて落ちた造り酒屋の蔵。柱など木の構造に被害はなかった=輪島市門前町で

第一の防御線が土壁だ。建物の要所に設けられ、揺れを抑える。しかし、限界を超えたら固い塗り土だけが壊れる。地震のエネルギーのかなりの部分がこの塗り土を壊すのに使われる

2007年5月17日の朝日新聞記事

制震構造は建物にダンパーを設置



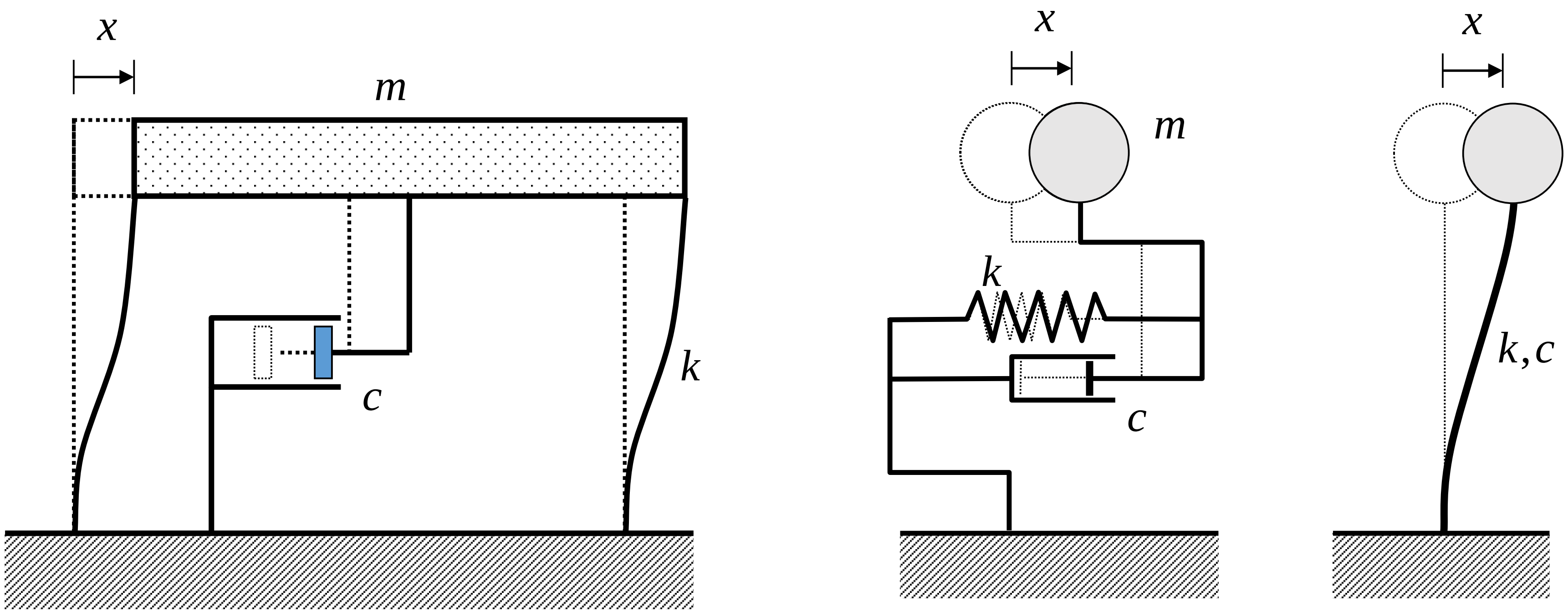
振動が早く収まる.

骨組への損傷が軽減される.

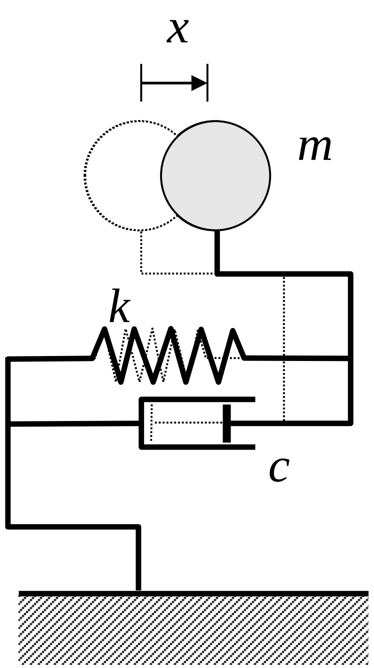
バイクのダンパー

自動車のダンパー

モデル化



自由振動方程式



$$-m\ddot{x}-\underline{c\dot{x}}-kx=0$$

減衰力は速度に比例する

自由振動方程式

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0}$$

⇩

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

自由振動方程式の解き方

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0}$$

この形の方程式の解はexp関数

$$x=A\mathrm{e}^{\lambda t} \qquad A,\lambda \text{ は定数}$$

振動方程式に代入すると

$$m\lambda^2\cdot A\mathrm{e}^{\lambda t}+c\lambda\cdot A\mathrm{e}^{\lambda t}+k\cdot A\mathrm{e}^{\lambda t}=0$$

$$\Downarrow$$

$$m\lambda^2+c\lambda+k=0$$

$$\boxed{m\lambda^2 + c\lambda + k = 0}$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{4m^2}}$$

$$= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

2次方程式の解の導出

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

減衰自由振動の解

$$x = A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

A, B は任意定数

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{c}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{c}{2m} - i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

虚数単位

$i = \sqrt{-1}$

$$x = \mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\mathrm{e}^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} + B\mathrm{e}^{-i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}\right)$$

$$x=\mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\mathrm{e}^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}+B\mathrm{e}^{-i\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}\right)$$

$\mathrm{e}^{\pm i\alpha}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$　より

$$x=\mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(\underbrace{(A+B)}_{A}\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]+\underbrace{i(A-B)}_{B}\sin\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]\right)$$

$$x=\mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]+B\sin\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]\right)$$

減衰自由振動を表す式

A,Bは任意定数

$$x = \mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\mathrm{e}^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}+B\mathrm{e}^{-i\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}\right)$$

$\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2 \leq 0$ のとき　　$\frac{k}{m} \leq \left(\frac{c}{2m}\right)^2$ ：バネよりも減衰が大きい

$$x = \mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}+B\mathrm{e}^{\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}\right)$$

振動は生じない

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$$

c_c：臨界減衰

$$c_c = 2\sqrt{mk}$$

減衰定数

$$h = \frac{\text{減衰}}{\text{臨界減衰}} = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$ ⇦ 無次元量

⇩

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mh = \frac{c}{2\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\omega}$$

⇩

$$c = 2mh\omega$$

減衰自由振動解

$$x=\mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]+B\sin\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]\right)$$

$$\Downarrow \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad c=2mh\omega$$

$$\boxed{x=\mathrm{e}^{-h\omega t}\left(A\cos\left[\left(\sqrt{1-h^2}\right)\omega t\right]+B\sin\left[\left(\sqrt{1-h^2}\right)\omega t\right]\right)}$$

初期条件

未定係数A,Bは初期条件を与えることによって決まる

$$x(0) = d_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$x = \mathrm{e}^{-h\omega t}\left(d_0 \cos\sqrt{1-h^2}\,\omega t + \frac{v_0 + h\omega d_0}{\sqrt{1-h^2}\,\omega} \sin\sqrt{1-h^2}\,\omega t \right)$$

固有周期

$$x = \mathrm{e}^{-h\omega t}\left(d_0 \cos \boxed{\sqrt{1-h^2}\omega t} + \frac{v_0 + h\omega d_0}{\sqrt{1-h^2}\omega}\sin\sqrt{1-h^2}\omega t\right)$$

$\sqrt{1-h^2}\omega T' = 2\pi$ より

$$T' = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} T$$

h が小さい場合は,

$$T' \simeq T$$

減衰振動のグラフ