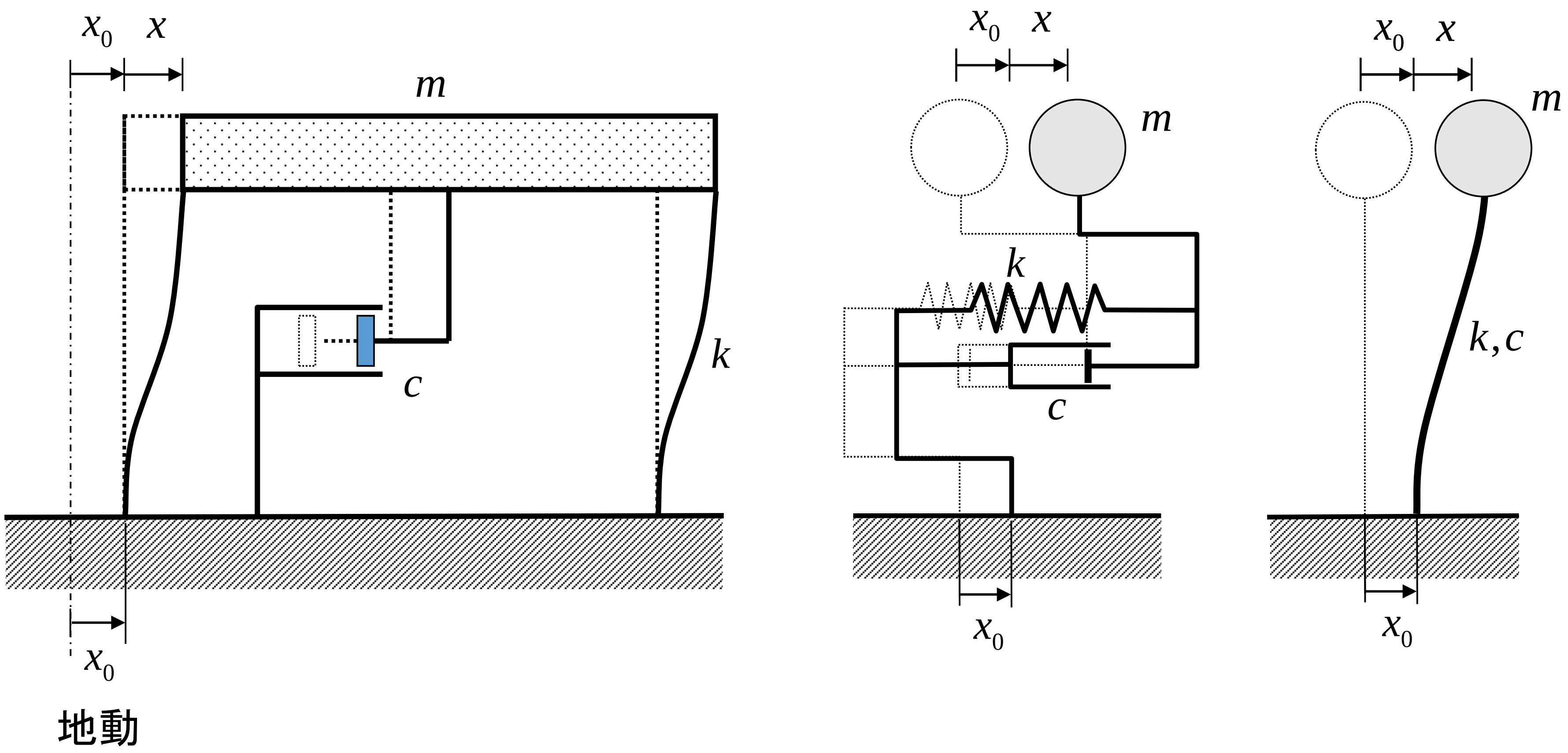
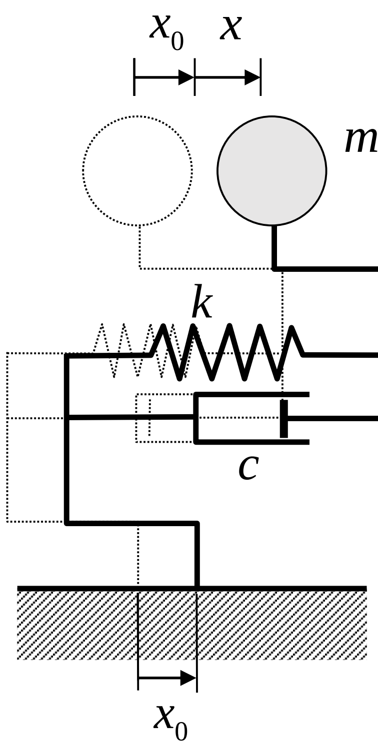
構造設計Ⅲ

第８回　１質点系の地震応答解析の方法

モデル化



運動方程式



$$-m\left(\ddot{x}+\underline{\ddot{x}_0}\right)-c\dot{x}-kx=0$$

地動加速度

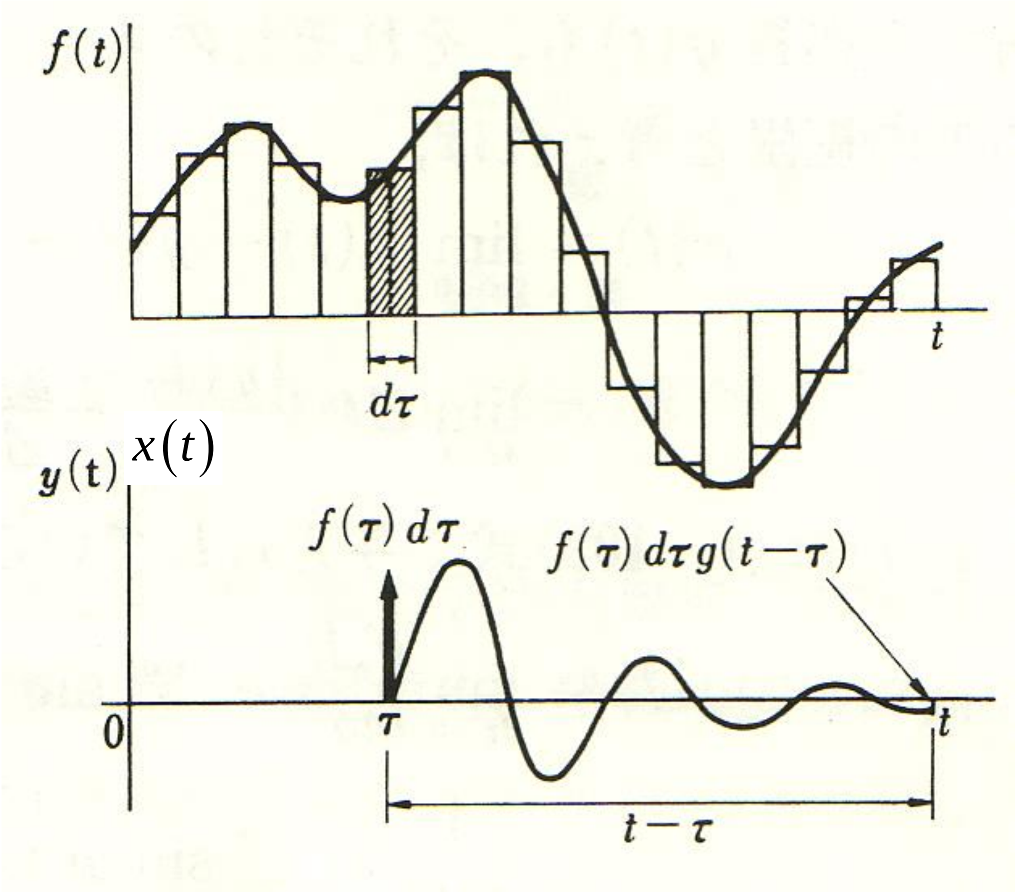
運動方程式

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{x}_0}$$

⇩

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=-m\frac{d^2x_0}{dt^2}$$

外力をインパルス外力の連続と考える



インパルス外力

$$f(\tau)d\tau$$

単位インパルス外力による応答変位

$$g(t-\tau)$$

インパルス外力による応答変位

$$f(\tau)d\tau g(t-\tau)$$

応答変位$x(t)$は次式となる

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

単位インパルス外力に対する応答変位

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = \underline{\delta(t)}$$

デルタ関数

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)dt = x(\tau) \end{aligned}}$$

この方程式の解は初速度1
(d_0=0, v_0=1)の自由振動解となる

$$g(t) = \mathrm{e}^{-h\omega t}\left(d_0 \cos\sqrt{1-h^2}\,\omega t + \frac{v_0 + h\omega d_0}{\sqrt{1-h^2}\,\omega}\sin\sqrt{1-h^2}\,\omega t\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-h^2}\,\omega}\mathrm{e}^{-h\omega t}\sin\sqrt{1-h^2}\,\omega t = \boxed{\frac{1}{\omega'}\mathrm{e}^{-h\omega t}\sin\omega' t}$$

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{x}_0$$

$$f(\tau) = -\ddot{x}_0(\tau)$$

$$g(t-\tau) = \frac{1}{\omega'} \mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)} \sin\omega'(t-\tau)$$

であるから，解は，

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$= -\frac{1}{\omega'} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau)\, \mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)} \sin\omega'(t-\tau)\, d\tau$$

速度と加速度は？

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{\omega'}\int_0^t \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\sin\omega'(t-\tau)d\tau}$$

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\cos\omega'(t-\tau)d\tau - h\omega x(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -2h\omega\dot{x}(t) - \omega^2 x(t) - \ddot{x}_0(t)$$

変位応答が求まれば，速度，加速度応答は簡単に求まる

どうやって計算する？

$$x(t) = -\frac{1}{\omega'}\int_0^t \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\sin\omega'(t-\tau)d\tau$$

三角関数の加法定理を利用すると

$$x(t) = A(t)\sin\omega' t - B(t)\cos\omega' t$$

ここで

$$A(t) = -\frac{1}{\omega'}\int_0^t \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\cos\omega'\tau d\tau$$

$$B(t) = -\frac{1}{\omega'}\int_0^t \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\sin\omega'\tau d\tau$$

$A(t)$を増分形で表す

$$A(t) = -\frac{1}{\omega'}\int_0^t \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\cos\omega'\tau d\tau$$

$$= -\frac{1}{\omega'}\int_0^{t-\Delta t} \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\Delta t-\tau+\Delta t)}\cos\omega'\tau d\tau$$

$$-\frac{1}{\omega'}\int_{t-\Delta t}^{t} \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\cos\omega'\tau d\tau$$

$$= A(t-\Delta t)\mathrm{e}^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'}\int_{t-\Delta t}^{t} \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\cos\omega'\tau d\tau$$

$B(t)$も同様に増分形で表すと

$$A(t) = A(t-\Delta t)\mathrm{e}^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'}\int_{t-\Delta t}^{t} \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\cos\omega'\tau d\tau$$

$$B(t) = B(t-\Delta t)\mathrm{e}^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'}\int_{t-\Delta t}^{t} \ddot{x}_0(\tau)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)}\sin\omega'\tau d\tau$$

このように変形すれば，前ステップの値に，増分値を逐次加えてゆけばよい
ただし，第２項の積分は解析的には行えないので，数値的に積分する。

数値積分法

A(t)の第2項の計算

$$-\frac{1}{\omega'}\int_{t-\Delta t}^{t}\ddot{x}_0\left(\tau\right)\mathrm{e}^{-h\omega\left(t-\tau\right)}\cos\omega'\tau d\tau$$

$$\simeq-\frac{1}{\omega'}\sum_{i=1}^{2}w_i\ddot{x}_0\left(\tau_i\right)\mathrm{e}^{-h\omega\left(t-\tau_i\right)}\cos\omega'\tau_i$$

ここで $\tau_i = t-\left(\Delta t/2\right)+\left(\Delta t/2\right)\xi_i$

$$w_i = \left(\partial\tau_i/\partial\xi_i\right)\eta_i = \left(\Delta t/2\right)\eta_i$$

ξ_i, η_i はGaussの数値積分の選点と重み係数

$$\xi_1 = -0.57735026918963,\quad \xi_2 = 0.57735026918963,\quad \eta_1 = \eta_2 = 1$$

以上から

$$x(t) = A(t)\sin\omega' t - B(t)\cos\omega' t$$

$$\boxed{\begin{aligned} A(t) &= A(t-\Delta t)\mathrm{e}^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'}\sum_{i=1}^{2} w_i \ddot{x}_0(\tau_i)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau_i)}\cos\omega'\tau_i \\ B(t) &= B(t-\Delta t)\mathrm{e}^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'}\sum_{i=1}^{2} w_i \ddot{x}_0(\tau_i)\mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau_i)}\sin\omega'\tau_i \end{aligned}}$$

$$\tau_i = t - (\Delta t/2) + (\Delta t/2)\xi_i, \quad w_i = (\Delta t/2)\eta_i$$

$$\xi_1 = -0.57735026918963, \quad \xi_2 = 0.57735026918963, \quad \eta_1 = \eta_2 = 1$$

初期条件　$A(0) = 0, \quad B(0) = 0$

速度と加速度は？

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t \ddot{x}_0(\tau) \mathrm{e}^{-h\omega(t-\tau)} \cos\omega'(t-\tau)\, d\tau - h\omega x(t)$$

$$= \omega' \left\{ A(t)\cos\omega' t + B(t)\sin\omega' t \right\} - h\omega x(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -2h\omega\dot{x}(t) - \omega^2 x(t) - \ddot{x}_0(t)$$