



静定力学講義(7)

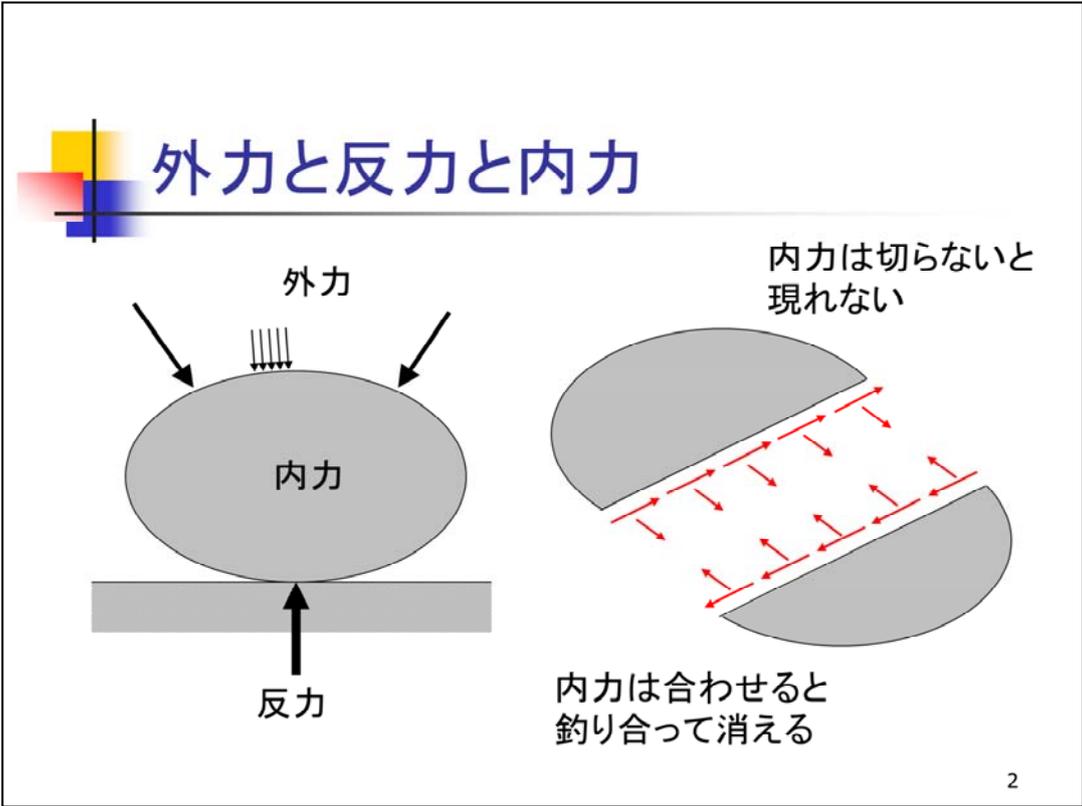
静定梁の応力(1)

1

これまで、力のつりあい式を用いて、反力を計算する方法を勉強しました。

反力の計算は、構造設計に必要となる応力(部材内部に働く力)の計算を行うために必要となるものです。

そして、今日から、その応力(内力)の計算法について勉強します。



これまでは、外力と反力について学びました。
静定問題では、反力は力の釣り合いから求めました。
しかし、設計に必要なのは、物体の内部に働く内力です。

しかしながら、力が釣り合っている構造では、どの点も釣り合い状態にあるため、内力は見えません。

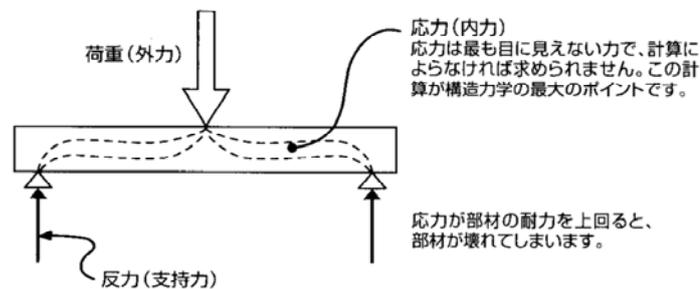
内力を求めるためには、構造を仮想的に2つに割る必要があります。
右のように仮想的に構造を2つに割ると、内部の力が現れます。当然ながら、この内力は2つの構造を合わせれば、釣り合って消えて無くなります。

内力は、なかなか理解しづらい概念です。まずは、慣れることが大事です。
ここでは、内力は、構造を2つに分けた時に現れる力だと考えて下さい。



安全な建物を設計する手順

1. 部材の内部に働く力(内力)の大きさを求める
2. 部材自身の持っている耐力の限界を求める
3. 部材の耐力の方が内力よりも大きいことを確かめる



3

構造設計の手順は、まず、柱、梁などの部材の内部に働く力(内力)の大きさを求めます。

また、その部材がどれくらいの力に耐えられるかを、材料の性質、断面の大きさなどから求めます。

これを部材の耐力と呼びます。

そして、内力の大きさと耐力とを比較して、耐力の方が上まわれば、安全ということになります。

逆に、耐力よりも、内力が大きくなると、その部材は破壊します。

以上が、構造設計の流れです。

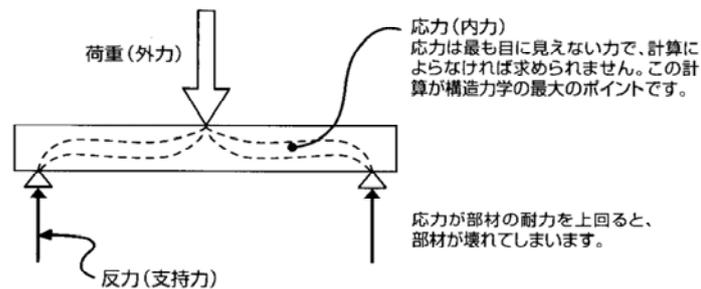
静定力学の目的は、静定構造物の内力を求めることにあります。

部材の耐力の計算法は、材料力学で学びます。



応力(断面力)

- 部材の内部に生じる力を応力(ストレス, Stress)と言う。



4

部材内部に働く力を内力と呼びますが、一方でこれを応力という呼び方をします。

応力の厳密な定義は、部材をある面(点)で切った時のその面(点)に働く1点の力という意味です。

骨組は、線で表されますから、線を面で切ると点になります。したがって、その点に働く力を応力と呼びます。

しかし、実際には部材は3次元の物体ですから、部材を切ると面が現れます。これを部材の断面と呼びます。

したがって、構造力学で言う応力は、断面全体に働く力なので、断面力という呼び方もします。

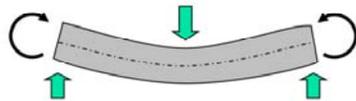
そして、断面内の1点に働く力を応力度という名前で呼びます。

しかし、機械や土木の分野では、2次元や3次元のものを一般的に扱うので、応力というと建築で言う応力度の意味になります。

詳しくは、材料力学で勉強します。

応力(断面力)には3種類ある

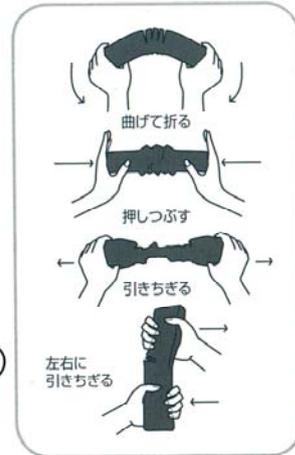
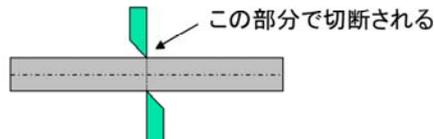
■ 曲げモーメント(部材を曲げるように働く力)



■ 軸力(圧縮・引張り)



■ 剪断力(軸と直角する力で、部材を切断する)



5

次に、一つの部材にどのような応力(断面力)が加わるかを考えてみましょう。これは、一つの部材がどのように壊れるかを想像してみればわかります。右の図のように羊羹のようなものを壊すことをイメージしてみてください。一番簡単な壊し方は、曲げるという壊し方です。次に、引きちぎる。押しつぶすという壊し方もあります。それから、こういう壊し方はあまりありませんが、左右に引きちぎるという壊し方もあります。

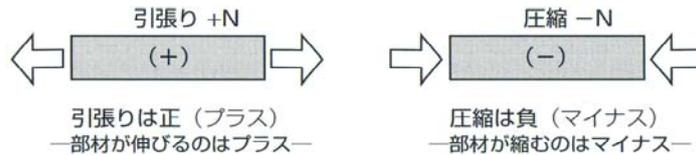
このような壊し方に対応して、部材に働く応力(断面力)には3種類あります。一つは、曲げモーメント(曲げる力)、一つは軸力(圧縮したり、引張ったりする力)、もう一つはせん断力(軸と直角方向に部材を切断するような力)です。軸力、曲げモーメント、せん断力、まずその言葉を憶えて下さい。曲げモーメントとせん断力というのは互いに関係がありますから、軸力、曲げモーメント、せん断力という順に憶えて下さい。

応力計算のための準備

① 応力の正負(プラス, マイナス)

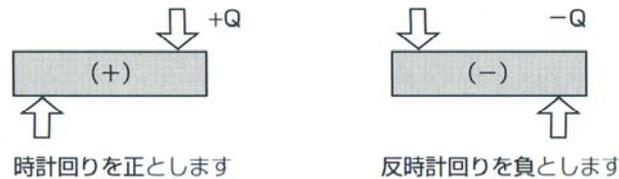
① 軸方向力(N)

軸方向は引張力を正、圧縮力を負とします。



② 剪断力(Q)

剪断力は偶力によって生じます。その回転方向によって正・負を定めます。



6

次に、以上の応力(軸力、曲げモーメント、せん断力)を求める方法を勉強します。

まず、これらの応力を求めるために、いくつかのルールが必要になります。

まずは、応力の正負の定め方です。

まず、応力(内力)は、必ず2つのペアの力で考えます。

図に示すように、軸力は、部材が引張られる場合を正と定めます。圧縮される場合は負です。

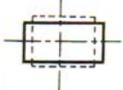
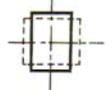
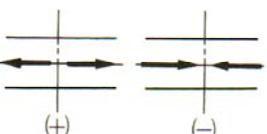
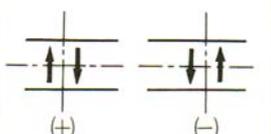
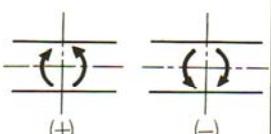
せん断力は、ペアの力が時計回りに加わる場合を正とします。反時計回りに加わる場合は負です。

しかし、曲げモーメントに関しては、正式な正負の符号の付け方はありません。

その代わりに、曲げモーメントを図に描く時に、その描き方と曲げモーメントの方向にルールがあります。

応力計算のための準備

②応力を表す記号

変形					
	伸び	縮み	ずれ	曲り	
応力 ()内は正負					
	引張力 圧縮力	せん断力		曲げモーメント	
記号	N		Q	M	

7

応力を表す記号として、引張・圧縮力は、部材の材軸方向のペアーのベクトルで表します。また、軸力を表す記号としてNを用います。

また、せん断力は、材軸に垂直方向のペアーのベクトルで表します。せん断力を表す記号はQです。

次に、曲げモーメントは、図に示すようなペアーのモーメントの記号で表します。また、記号はMです。

図に示すように、曲げモーメントの正負を定める場合もありますが、正式なものではありません。

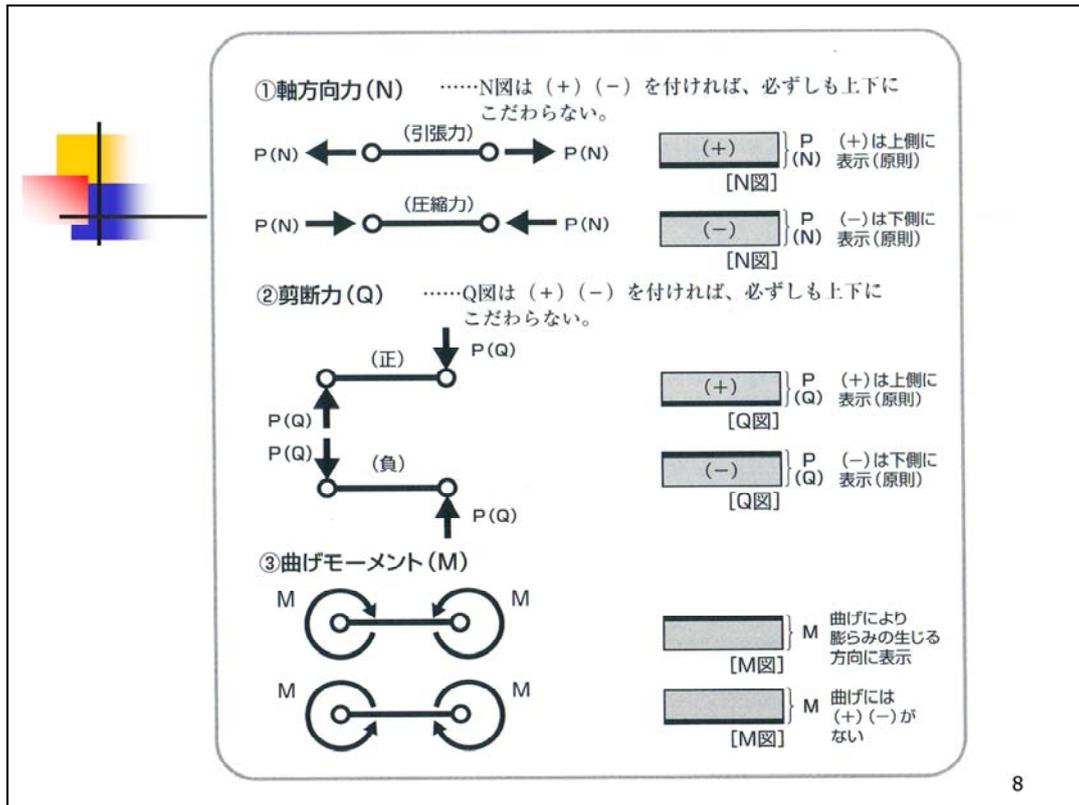
また、図に示すように、応力の向きと変形の関係が頭に入っていることが大事です。

引張力が加わる場合、部材は伸びます。反対に圧縮力が加わると縮みます。

せん断力が加わるとマッチ箱をつぶしたような変形を生じます。

一番重要なのは、曲げモーメントが加わった時の変形形状で、曲げを加えると片側の表面は縮み、片側の表面は伸びます。

縮む方を圧縮側、伸びる方を引張側と呼びます。曲げモーメント図を描く時は、必ず引張側に描くというルールがありますから、どちらが引張側になるかがわかることが重要です。



次に、求めた応力は、応力図と呼ばれる図で表します。

応力図は、骨組図上に描きます。

たとえば、骨組部材の軸力を表示する場合、+ならば骨組の上側に、-ならば骨組の下側に描きます。

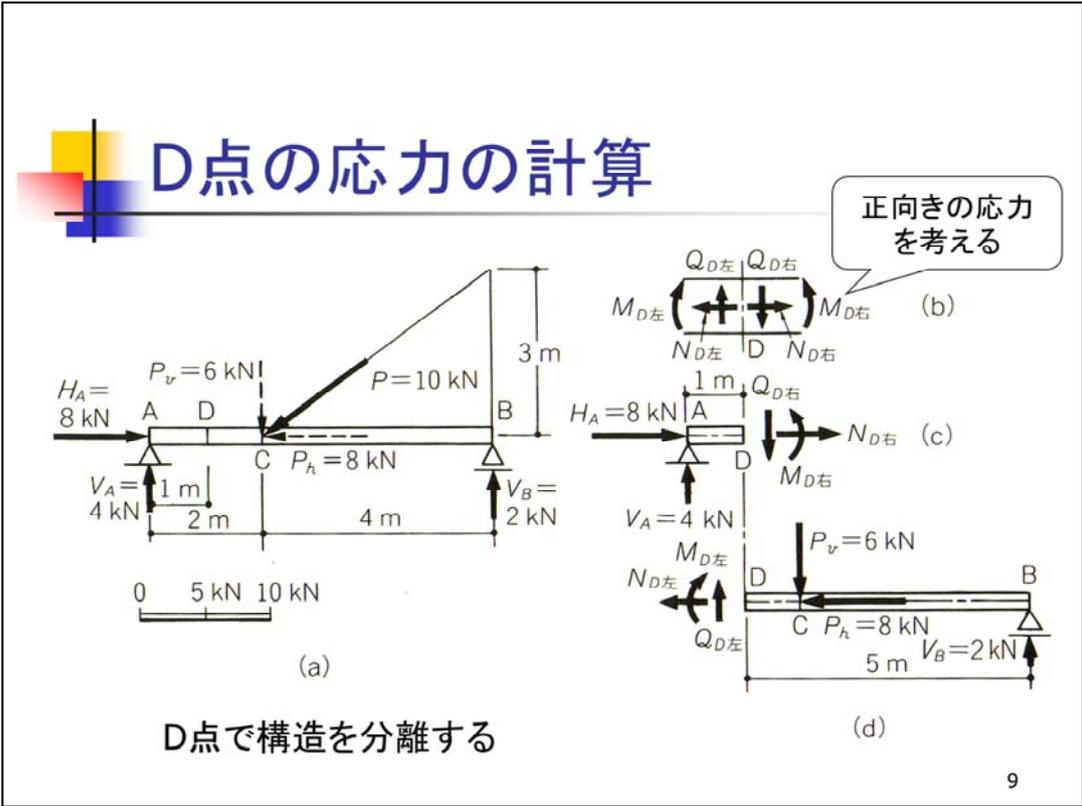
そして、必ず図の中に、+、-の符号を書き込みます。ただし、+が下側で、-が上側でも構いません。

せん断力も同様で、+が上側なら、-を下側に描き、図の中に、+、-の符号を書き込みます。

この場合も、上側、下側は逆でも構いません。

しかし、曲げモーメントの場合は、+と-がない代わりに、上側、下側は自由には決められません。

先ほど言ったように、曲げモーメントによる変形を考えた場合に、必ず表面が引張られる側に描きます。



それでは、次に、応力の求め方を具体的な例題で説明します。

例えば、図に示すような単純支持ばりのD点の応力を求めてみましょう。

まず、このような単純支持ばりで応力を求める場合は、支持点の反力を求めておく必要があります。

前回までに学んだ方法によって、A点の水平、垂直反力とB点の垂直反力を求め、これを図に記入します。

(この時、マイナスで求めた反力は矢印の向きを逆にしておきます。)

次に、応力(内力)を求めるためには、求めたい断面で、骨組構造を2つに分ける必要があります。

もともと応力はつりあっている力ですから、応力は、骨組構造を2つに分けることによって、初めて現れます。

そして、右図に示すように、分けられた骨組構造のそれぞれの断面に正の応力を描きます。

最初、どちらが正の向きかわからない場合は、まず、図(b)のように、断面を中心に正の応力を描きます。

そして、構造が分けられて、部材が無くなった側の応力を描きます。

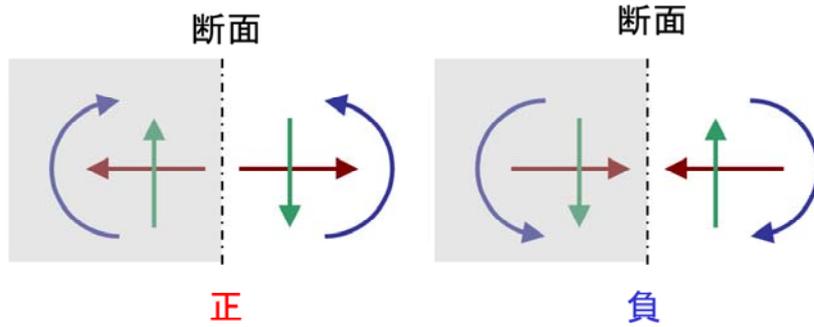
軸力の正の向きは、断面から離れる方向が正になります。せん断力は、時計回りが正の応力ですが、よくこれを見てどちらの断面がどちら向きになるか確かめて下さい。

曲げモーメントは、+と-はありませんので、矢印をどちらに向けてもOKですが、とりあえず上向きに描くようにしましょう。

そして、分離したどちらの構造を用いてもよいのですが、力の釣り合い条件を用いて未知の応力を計算します。

力の釣り合い式は、x,yの2方向の釣り合い式とモーメントの釣り合い式の計3つあるので、未知の3つの内力がこれらの式を解くことによって求まります。

応力の正負



10

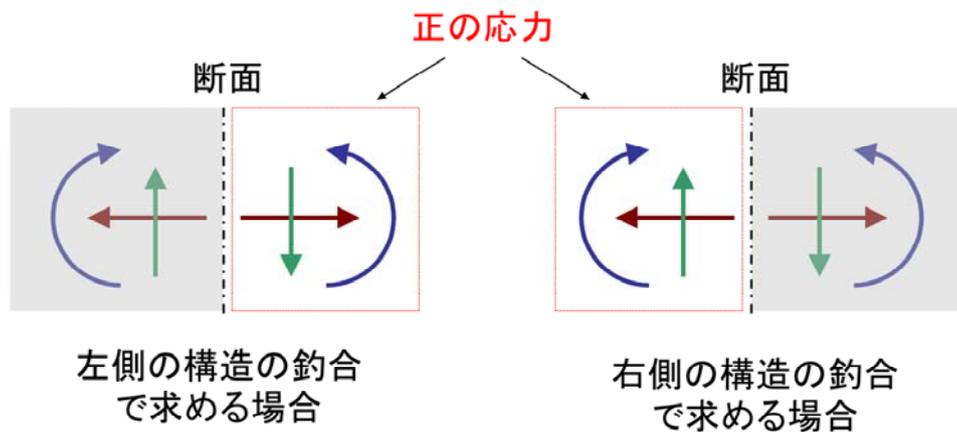
応力の正負について、もう一度確認しておきます。

この図は、左側に構造がある場合の例ですが、この図で、応力の正方向を再確認して下さい。

軸力は、引張方向が正、せん断力は時計回りの矢印方向が正です。

曲げモーメントは、仮に上に曲げる場合を正としておきます。

応力を計算するときは、常に正の応力を定義する

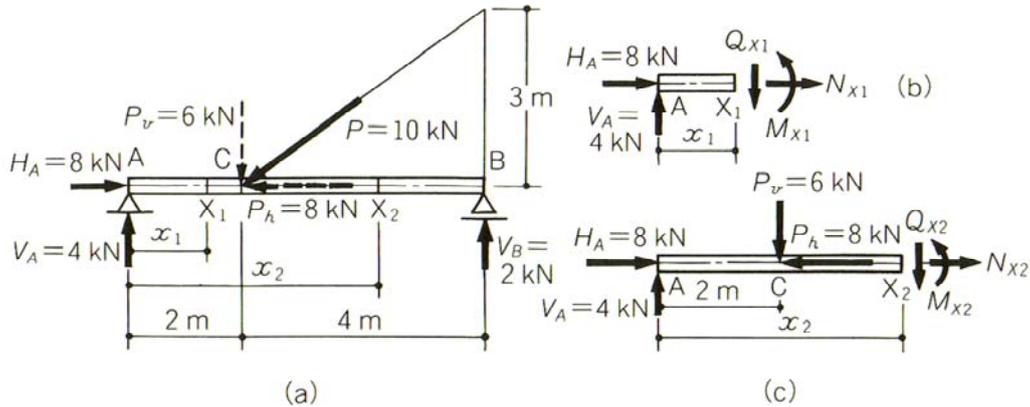


11

応力を計算する時は、必ず正の応力を定義するようにします。

断面で構造を2つに分離して、左側の構造で釣り合いを求める場合は左図のような定義となり、右側の構造で釣り合いを求める場合は右図のような定義となります。

X₁点, X₂点の応力を計算する



12

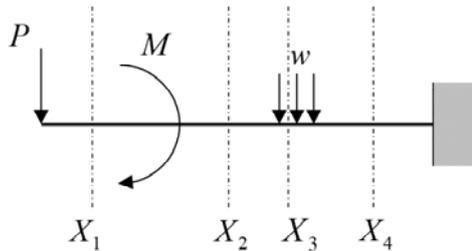
応力は、荷重の前後で変化するため、応力を描くには、荷重より右の断面と荷重より左の断面の2カ所の応力を計算する必要があります。

断面X₁で構造を2つに分けた場合の応力と、断面X₂で構造を2つに分けた場合の応力を、それぞれ力の釣り合い式を用いて求めます。

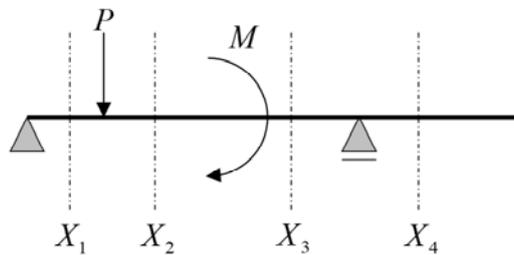
なお、応力の計算は、2つに分けたどちらの構造を使っても良いため、X₂の応力は、(c)のような左側の構造を使うより、右側の構造を使った方が計算が楽になります。

また、切った断面の位置(x座標)は、x₁とかxとかの変数で表しておきます。そうすると、曲げモーメントなどはxの関数として表されます。

どこで断面を切るか？



荷重が加わると応力が変化するので、その前後で切る



支点があると、そこに反力が存在し、応力が変化するので、その前後で切る

13

最初は、どこで断面を切ったら良いのか迷います。

まず、部材に荷重が加わると、その前後で応力は変化するため、荷重が加わっていればその前後で断面を切って、応力を求める必要があります。

また、分布荷重が加わる場合は、分布荷重が加わっている部分で応力が変化するため、分布荷重が作用している範囲内で、断面を切る必要があります。

また、途中に支点がある場合は、支点の反力によって応力が変化するため、支点の前後の断面で応力を求める必要があります。

軸力の計算と軸力図

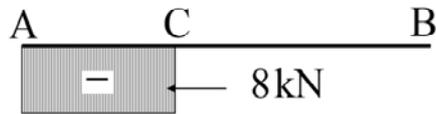
$\sum X = 0$ から

$$A \sim C \text{間} \quad H_A + N_{x1} = 0$$

$$\therefore N_{x1} = -H_A = -8 \text{ kN}$$

$$C \sim B \text{間} \quad H_A - P_h + N_{x2} = 0$$

$$\therefore N_{x2} = -H_A + P_h = -8 + 8 = 0$$



軸力図

14

まず、軸力の値は、x軸方向の力の釣り合い式から得られ、ここに示すような式で計算されます。

また軸力図は、下に示すように描きます。この場合は、部材の下側に描いていますが、上側に描いてもOKです。

軸力図には、必ず+か-の符号を書きます。また、代表的な大きさが何kNであるかも記入します。

この場合は、AC間で一定値(8kN)となり、CB間で0となることを示しています。

せん断力の計算とせん断力図

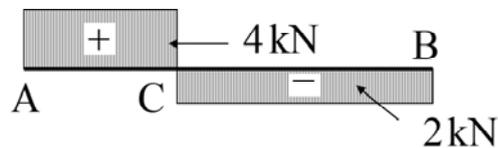
$\sum Y = 0$ から

$$A \sim C \text{間} \quad V_A - Q_{x1} = 0 \quad \therefore Q_{x1} = V_A = 4 \text{ kN}$$

$$C \sim B \text{間} \quad V_A - P_v - Q_{x2} = 0$$

$$\therefore Q_{x2} = V_A - P_v = 4 - 6 = -2 \text{ kN}$$

$$(V_B + Q_{x2} = 0 \Rightarrow Q_{x2} = -V_B = -2 \text{ kN} \text{でもよい})$$



せん断力図

15

次に、せん断力の値は、y軸方向の釣り合い式から得られ、ここに示すような式で計算されます。

また、せん断力図は、下図に示すように描きます。この場合も、必ず符号を入れることを忘れないで下さい。

また、せん断力の大きさも、図に書き込むようにします。

この場合も、AC間、CB間で、せん断力が一定の値になることを示しています。



曲げモーメントの計算と曲げモーメント図

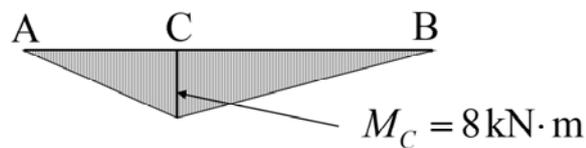
$\sum M_x = 0$ から

$$\text{A} \sim \text{C間} \quad V_A \times x_1 - M_{x1} = 0$$

$$\therefore M_{x1} = V_A x_1 = 4x_1$$

$$\text{C} \sim \text{B間} \quad V_A \times x_2 - P_v \times (x_2 - 2) - M_{x2} = 0$$

$$\therefore M_{x2} = 4x_2 - 6(x_2 - 2) = -2x_2 + 12$$



曲げモーメント図

16

最後に曲げモーメントは、切った断面の点を回転中心としてモーメントの釣り合い式を立てることによって求まります。

この場合は、A点を原点として断面X1までの距離を x_1 、断面X2までの距離を x_2 としています。

そして、それぞれ得られる曲げモーメントの式は、 x_1 、 x_2 の1次関数となります。

下図は、曲げモーメント図を描いたものです。この場合は、はりの下側が引張側となるので、曲げモーメントは必ず下側に描きます。

また、代表的な点の曲げモーメント値を記入するようにします。この場合の単位は、 kNm であることに注意して下さい。

どちらが引張側になるかわからない人は、もう一度6ページの曲げモーメントと変形図の関係をじっくり眺めて下さい。

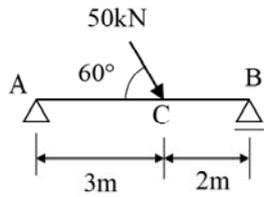


応力が正しいかどうかチェック

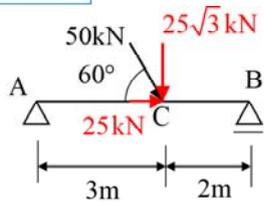
- 曲げモーメントの座標 x に関する1階微分がせん断力になる。
 - 曲げモーメントが x に関して線形ならば、せん断力は一定
 - 曲げモーメントが x に関して2次関数ならば、せん断力は線形
- 教科書35ページの表3. 1およびそのページの文章をチェックしておくこと



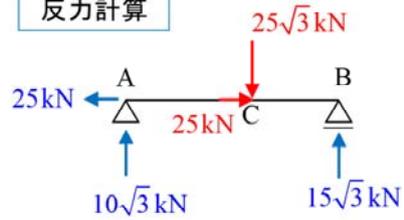
演習問題1の解き方(その1)



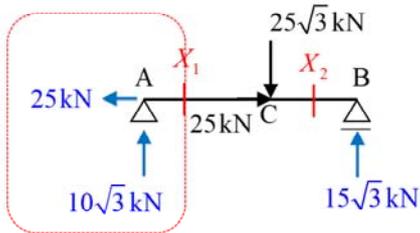
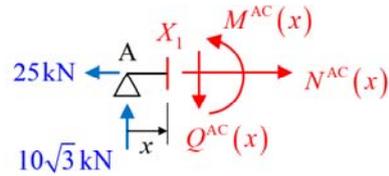
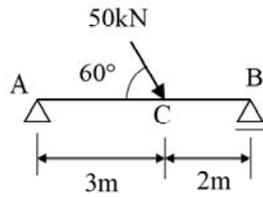
分力の計算



反力計算



演習問題1の解き方(その2)



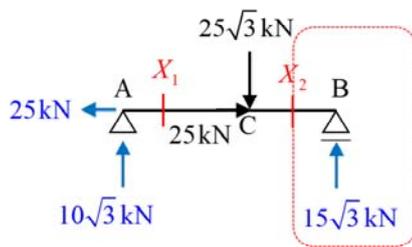
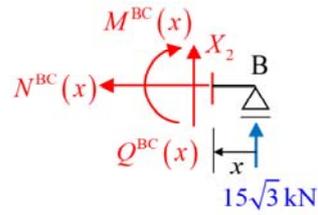
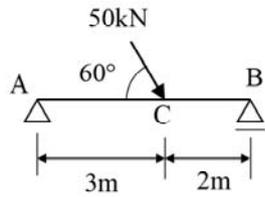
$$\sum X = 0: N^{AC}(x) = 25 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0: Q^{AC}(x) = 10\sqrt{3} \text{ kN}$$

$$\sum M_{x_1} = 0: -M^{AC}(x) + 10\sqrt{3}x = 0$$

$$\Rightarrow M^{AC}(x) = 10\sqrt{3}x \quad \begin{cases} M^{AC}(0) = 0 \text{ kNm} \\ M^{AC}(3) = 30\sqrt{3} \text{ kNm} \end{cases}$$

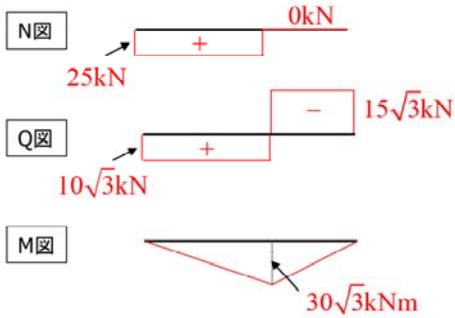
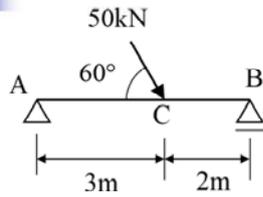
演習問題1の解き方(その3)



$$\begin{aligned} \sum X = 0: & N^{BC}(x) = 0 \text{ kN} \\ \sum Y = 0: & Q^{BC}(x) = -15\sqrt{3} \text{ kN} \\ \sum M_{x_2} = 0: & M^{BC}(x) - 15\sqrt{3}x = 0 \\ \Rightarrow & M^{BC}(x) = 15\sqrt{3}x \quad \begin{cases} M^{BC}(0) = 0 \text{ kNm} \\ M^{BC}(2) = 30\sqrt{3} \text{ kNm} \end{cases} \end{aligned}$$



演習問題1の解き方(その4)



$$N^{AC}(x) = 25\text{kN}$$

$$Q^{AC}(x) = 10\sqrt{3}\text{ kN}$$

$$M^{AC}(x) = 10\sqrt{3}x \quad \begin{cases} M^{AC}(0) = 0\text{kNm} \\ M^{AC}(3) = 30\sqrt{3}\text{kNm} \end{cases}$$

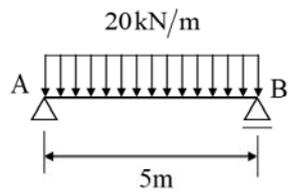
$$N^{BC}(x) = 0\text{kN}$$

$$Q^{BC}(x) = -15\sqrt{3}\text{ kN}$$

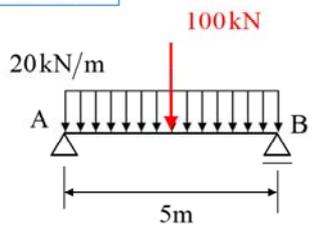
$$M^{BC}(x) = 15\sqrt{3}x \quad \begin{cases} M^{BC}(0) = 0\text{kNm} \\ M^{BC}(2) = 30\sqrt{3}\text{kNm} \end{cases}$$



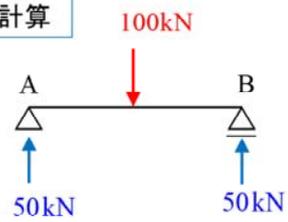
演習問題2の解き方(その1)



合力の計算

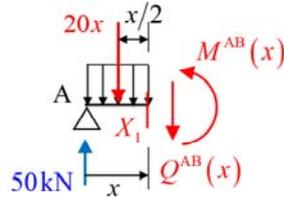
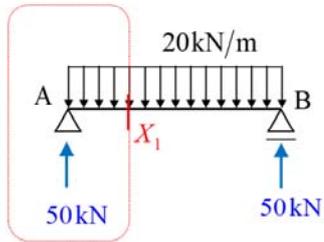
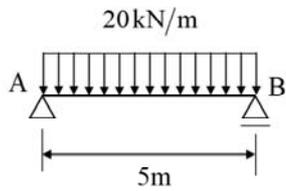


反力計算





演習問題2の解き方(その2)



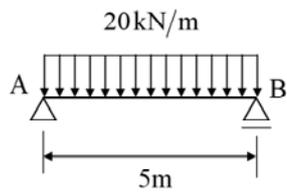
$$\sum Y = 0: Q^{AB}(x) = -20x + 50 \quad \begin{cases} Q^{AB}(0) = 50\text{kN} \\ Q^{AB}(5) = -50\text{kN} \end{cases}$$

$$\sum M_{x_1} = 0: -M^{AB}(x) + 50x - 20x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M^{AB}(x) = -10x^2 + 50x \quad \begin{cases} M^{AB}(0) = 0\text{kNm} \\ M^{AB}(2.5) = 62.5\text{kNm} \\ M^{AB}(5) = 0\text{kNm} \end{cases}$$



演習問題2の解き方(その3)

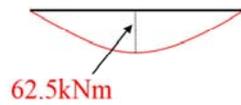


Q図



$$Q^{AB}(x) = -20x + 50 \quad \begin{cases} Q^{AB}(0) = 50\text{kN} \\ Q^{AB}(5) = -50\text{kN} \end{cases}$$

M図



$$M^{AB}(x) = -10x^2 + 50x \quad \begin{cases} M^{AB}(0) = 0\text{kNm} \\ M^{AB}(2.5) = 62.5\text{kNm} \\ M^{AB}(5) = 0\text{kNm} \end{cases}$$