１１　立体骨組の解析

11.1　変位場の一次元化

立体骨組要素の任意点の x, y, z 方向変位 u, v, w は，断面剛の仮定と Bernoulli-Euler の仮定より，次式のように断面の図心軸上の軸方向変位 u^c，たわみ v^c, w^c，ねじり角 θ_x によって表される。

$$
\begin{aligned}
&u(x,y,z) = u^c(x) - y\frac{dv^c(x)}{dx} - z\frac{dw^c}{dx} + \omega(y,z)\phi \\
&v(x,y,z) = v^c(x) - z\theta_x(x) \\
&w(x,y,z) = w^c(x) + y\theta_x(x)
\end{aligned}
\tag{11.1}
$$

ここに，ω はゆがみ関数，ϕ は $\phi = d\theta_x / dx$ であるが，ここではサンブナンねじりを仮定し，ϕ は一定とする。

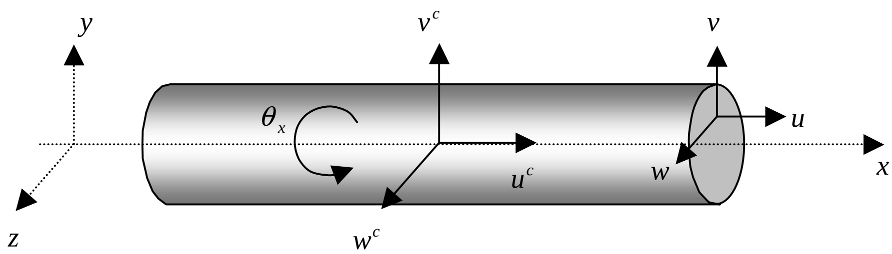

図 11.1　はり要素とはりの変位場

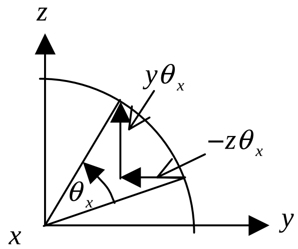

図 11.2　ねじり角と変位 v, w の関係

(11.1)式より，ひずみ成分が次式のように計算される。

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du^c(x)}{dx} - y\frac{d^2 v^c(x)}{dx^2} - z\frac{d^2 w^c(x)}{dx^2} \\
&\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z\right)\phi \\
&\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y\right)\phi \\
&\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0
\end{aligned}
\tag{11.2}
$$

また，応力－ひずみ関係式より，応力成分は次式のように表される。

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= E\varepsilon_x \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \\
\sigma_y &= \sigma_z = \tau_{yz} = 0
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

したがって，要素のひずみエネルギーは次式で表される。

$$
V^e = \frac{1}{2}\iiint E\left(\frac{du^c}{dx} - y\frac{d^2v^c}{dx^2} - z\frac{d^2w^c}{dx^2}\right)^2 dxdydz + \frac{1}{2}\iiint G\phi^2\left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} - z\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} + y\right)^2\right\}dxdydz \tag{11.4}
$$

断面内(y,z)の積分を行うと次のようになる。

$$
V^e = \frac{1}{2}\int_0^l\left\{EA\left(\frac{du^c}{dx}\right)^2 + EI_z\left(\frac{d^2v^c}{dx^2}\right)^2 + EI_y\left(\frac{d^2w^c}{dx^2}\right)^2 + GK\phi^2\right\}dx \tag{11.5}
$$

ここに，lは，はり要素の長さであり，また，

$$
\begin{aligned}
&A = \iint dydz \\
&I_z = \iint y^2 dydz, I_y = \iint z^2 dydz \\
&K = \iint\left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} - z\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} + y\right)^2\right\}dydz
\end{aligned}
\tag{11.6}
$$

また，(11.5)式の導出では，断面の原点は図心，座標軸は断面の主軸方向とするため，

$$
\iint ydydz = 0,\ \iint zdydz = 0,\ \iint yzdydz = 0 \tag{11.7}
$$

であることを利用している。

11.2　離散化

(11.1)式の断面の図心軸上の軸方向変位u^c，たわみv^c, w^c，ねじり角θ_xを，それぞれ次式のようにはり要素の節点変位で表す。

$$
\begin{aligned}
u^c(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_i^c + \frac{x}{l}u_j^c \\
v^c(x) &= \left\{1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}v_i^c + l\left\{\left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}\theta_{zi} + \left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}v_j^c + l\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}\theta_{zj} \\
w^c(x) &= \left\{1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}w_i^c - l\left\{\left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}\theta_{yi} + \left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}w_j^c - l\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}\theta_{yj} \\
\theta_x(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)\theta_{xi} + \frac{x}{l}\theta_{xj}
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

ただし，$\theta_z = dv^c / dx, \theta_y = -dw^c / dx$である。

(11.8)式を(11.5)式に代入して計算すると次式が得られる。

$$V^e = \frac{1}{2}\{U^e\}^T [k]\{U^e\} \tag{11.9}$$

ここに,

$$\{U^e\}^T = \{u_i^c \quad v_i^c \quad w_i^c \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad u_j^c \quad v_j^c \quad w_j^c \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj}\} \tag{11.10}$$

$$[k] = \begin{bmatrix}
k_{11} & & & & & & & & & & & \text{Sym.} \\
0 & k_{22} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & k_{33} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & k_{44} & & & & & & & & \\
0 & 0 & k_{53} & 0 & k_{55} & & & & & & & \\
0 & k_{62} & 0 & 0 & 0 & k_{66} & & & & & & \\
k_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{77} & & & & & \\
0 & k_{82} & 0 & 0 & 0 & k_{86} & 0 & k_{88} & & & & \\
0 & 0 & k_{93} & 0 & k_{95} & 0 & 0 & 0 & k_{99} & & & \\
0 & 0 & 0 & k_{104} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1010} & & \\
0 & 0 & k_{113} & 0 & k_{115} & 0 & 0 & 0 & k_{119} & 0 & k_{1111} & \\
0 & k_{122} & 0 & 0 & 0 & k_{126} & 0 & k_{128} & 0 & 0 & 0 & k_{1212}
\end{bmatrix} \tag{11.11}$$

$$\begin{aligned}
&k_{11} = \frac{EA}{l}, k_{22} = \frac{12EI_z}{l^3}, k_{33} = \frac{12EI_y}{l^3}, k_{44} = \frac{GK}{l} \\
&k_{53} = -\frac{6EI_y}{l^2}, k_{55} = \frac{4EI_y}{l}, k_{62} = \frac{6EI_z}{l^2}, k_{66} = \frac{4EI_z}{l} \\
&k_{71} = -k_{11}, k_{77} = k_{11}, k_{82} = -k_{22}, k_{86} = -k_{62}, k_{88} = k_{22} \\
&k_{93} = -k_{33}, k_{95} = -k_{53}, k_{99} = k_{33}, k_{104} = -k_{44}, k_{1010} = k_{44} \\
&k_{113} = k_{53}, k_{115} = k_{55}/2, k_{119} = -k_{53}, k_{1111} = k_{55} \\
&k_{122} = k_{62}, k_{126} = k_{66}/2, k_{128} = -k_{62}, k_{1212} = k_{66}
\end{aligned} \tag{11.12}$$

11.3　要素剛性マトリックスの座標変換

本節以降では，要素の座標系で定義されたものに上付バーを付し，全体座標系で定義されたものと区別する。

(11.11)式の節点変位ベクトルは要素の座標系で定義されたものであるからこれを$\{\bar{U}^e\}$と表すと，全体座標系で定義された節点変位$\{U^e\}$との関係は，(3.2)式で表される座標変換マトリックスを用いて，次式のように表される。

$$\{\bar{U}^e\} = [T_g]\{U^e\} \tag{11.13}$$

ここに,

$$\{\bar{U}^e\}^T = \{\bar{u}_i^c \quad \bar{v}_i^c \quad \bar{w}_i^c \quad \bar{\theta}_{xi} \quad \bar{\theta}_{yi} \quad \bar{\theta}_{zi} \quad \bar{u}_j^c \quad \bar{v}_j^c \quad \bar{w}_j^c \quad \bar{\theta}_{xj} \quad \bar{\theta}_{yj} \quad \bar{\theta}_{zj}\} \tag{11.14}$$

$$\{U^e\}^T = \{u_i^c \quad v_i^c \quad w_i^c \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad u_j^c \quad v_j^c \quad w_j^c \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj}\} \tag{11.15}$$

$$
\left[T_g\right]=\begin{bmatrix} [T] & & & \\ & [T] & & \\ & & [T] & \\ & & & [T] \end{bmatrix},\ [T]=\begin{bmatrix} l_{\bar{x}x} & l_{\bar{x}y} & l_{\bar{x}z} \\ l_{\bar{y}x} & l_{\bar{y}y} & l_{\bar{y}z} \\ l_{\bar{z}x} & l_{\bar{z}y} & l_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \tag{11.16}
$$

(11.13)式を(11.9)式に代入すると，全体座標系で定義された要素剛性マトリックスが次式により得られる。ただし，次式では$\left[\bar{k}\right]$が(11.11)式で定義されるものである。

$$
[k]=\left[T_g\right]\left[\bar{k}\right]\left[T_g\right] \tag{11.17}
$$

(11.17)式を具体的に計算すると以下のようになる。ただし，表記を簡単にするため，$[T]$の成分を次のように表しておく。

$$
[T]=\begin{bmatrix} l_{\bar{x}} & m_{\bar{x}} & n_{\bar{x}} \\ l_{\bar{y}} & m_{\bar{y}} & n_{\bar{y}} \\ l_{\bar{z}} & m_{\bar{z}} & n_{\bar{z}} \end{bmatrix} \tag{11.18}
$$

このとき，

$$
[k]=\begin{bmatrix}
k_{11} & & & & & & & & & & & \text{Sym.} \\
k_{21} & k_{22} & & & & & & & & & & \\
k_{31} & k_{32} & k_{33} & & & & & & & & & \\
k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & & & & & & & & \\
k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & & & & & & & \\
k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & & & & & & \\
k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & & & & & \\
k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & & & & \\
k_{91} & k_{92} & k_{93} & k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{98} & k_{99} & & & \\
k_{101} & k_{102} & k_{103} & k_{104} & k_{105} & k_{106} & k_{107} & k_{108} & k_{109} & k_{1010} & & \\
k_{111} & k_{112} & k_{113} & k_{114} & k_{115} & k_{116} & k_{117} & k_{118} & k_{119} & k_{1110} & k_{1111} & \\
k_{121} & k_{122} & k_{123} & k_{124} & k_{125} & k_{126} & k_{127} & k_{128} & k_{129} & k_{1210} & k_{1211} & k_{1212}
\end{bmatrix} \tag{11.19}
$$

ここに，

$$k_{11}=\bar{k}_{11}l_{\bar{x}}{}^2+\bar{k}_{22}l_{\bar{y}}{}^2+\bar{k}_{33}l_{\bar{z}}{}^2$$

$$k_{21}=\bar{k}_{11}l_{\bar{x}}m_{\bar{x}}+\bar{k}_{22}l_{\bar{y}}m_{\bar{y}}+\bar{k}_{33}l_{\bar{z}}m_{\bar{z}},\ k_{22}=\bar{k}_{11}m_{\bar{x}}{}^2+\bar{k}_{22}m_{\bar{y}}{}^2+\bar{k}_{33}m_{\bar{z}}{}^2$$

$$k_{31}=\bar{k}_{11}l_{\bar{x}}n_{\bar{x}}+\bar{k}_{22}l_{\bar{y}}n_{\bar{y}}+\bar{k}_{33}l_{\bar{z}}n_{\bar{z}},\ k_{32}=\bar{k}_{11}m_{\bar{x}}n_{\bar{x}}+\bar{k}_{22}m_{\bar{y}}n_{\bar{y}}+\bar{k}_{33}m_{\bar{z}}n_{\bar{z}},\ k_{33}=\bar{k}_{11}n_{\bar{x}}{}^2+\bar{k}_{22}n_{\bar{y}}{}^2+\bar{k}_{33}n_{\bar{z}}{}^2$$

$$k_{41}=\left(\bar{k}_{53}+\bar{k}_{62}\right)l_{\bar{y}}l_{\bar{z}},\ k_{42}=\bar{k}_{53}l_{\bar{y}}m_{\bar{z}}+\bar{k}_{62}l_{\bar{z}}m_{\bar{y}},\ k_{43}=\bar{k}_{53}l_{\bar{y}}n_{\bar{z}}+\bar{k}_{62}l_{\bar{z}}n_{\bar{y}},\ k_{44}=\bar{k}_{44}l_{\bar{x}}{}^2+\bar{k}_{55}l_{\bar{y}}{}^2+\bar{k}_{66}l_{\bar{z}}{}^2$$

$$k_{51}=\bar{k}_{53}l_{\bar{z}}m_{\bar{y}}+\bar{k}_{62}l_{\bar{y}}m_{\bar{z}},\ k_{52}=\left(\bar{k}_{53}+\bar{k}_{62}\right)m_{\bar{y}}m_{\bar{z}},\ k_{53}=\bar{k}_{53}m_{\bar{y}}n_{\bar{z}}+\bar{k}_{62}m_{\bar{z}}n_{\bar{y}}$$

$$k_{54}=\bar{k}_{44}l_{\bar{x}}m_{\bar{x}}+\bar{k}_{55}l_{\bar{y}}m_{\bar{y}}+\bar{k}_{66}l_{\bar{z}}m_{\bar{z}},\ k_{55}=\bar{k}_{44}m_{\bar{x}}{}^2+\bar{k}_{55}m_{\bar{y}}{}^2+\bar{k}_{66}m_{\bar{z}}{}^2$$

$$k_{61}=\bar{k}_{53}l_{\bar{z}}n_{\bar{y}}+\bar{k}_{62}l_{\bar{y}}n_{\bar{z}},\ k_{62}=\bar{k}_{53}m_{\bar{z}}n_{\bar{y}}+\bar{k}_{62}m_{\bar{y}}n_{\bar{z}},\ k_{63}=\left(\bar{k}_{53}+\bar{k}_{62}\right)n_{\bar{y}}n_{\bar{z}}$$

$$k_{64}=\bar{k}_{44}l_{\bar{x}}n_{\bar{x}}+\bar{k}_{55}l_{\bar{y}}n_{\bar{y}}+\bar{k}_{66}l_{\bar{z}}n_{\bar{z}},\ k_{65}=\bar{k}_{44}m_{\bar{x}}n_{\bar{x}}+\bar{k}_{55}m_{\bar{y}}n_{\bar{y}}+\bar{k}_{66}m_{\bar{z}}n_{\bar{z}},\ k_{66}=\bar{k}_{44}n_{\bar{x}}{}^2+\bar{k}_{55}n_{\bar{y}}{}^2+\bar{k}_{66}n_{\bar{z}}{}^2$$

$$k_{71}=-k_{11}, k_{72}=-k_{21}, k_{73}=-k_{31}, k_{74}=-k_{41}, k_{75}=-k_{51}, k_{76}=-k_{61}, k_{77}=k_{11}$$
$$k_{81}=-k_{21}, k_{82}=-k_{22}, k_{83}=-k_{32}, k_{84}=-k_{42}, k_{85}=-k_{52}, k_{86}=-k_{62}, k_{87}=-k_{72}, k_{88}=k_{22}$$
$$k_{91}=-k_{31}, k_{92}=-k_{32}, k_{93}=-k_{33}, k_{94}=-k_{43}, k_{95}=-k_{53}, k_{96}=-k_{63}, k_{97}=-k_{73}, k_{98}=-k_{83}, k_{99}=k_{33}$$

$$k_{101}=k_{41}, k_{102}=k_{42}, k_{103}=k_{43}$$
$$k_{104}=\frac{1}{2}\left(-2\overline{k}_{44}l_{\overline{x}}^{\ 2}+\overline{k}_{55}l_{\overline{y}}^{\ 2}+\overline{k}_{66}l_{\overline{z}}^{\ 2}\right), k_{105}=\frac{1}{2}\left(-2\overline{k}_{44}l_{\overline{x}}m_{\overline{x}}+\overline{k}_{55}l_{\overline{y}}m_{\overline{y}}+\overline{k}_{66}l_{\overline{z}}m_{\overline{z}}\right) k_{106}=\frac{1}{2}\left(-2\overline{k}_{44}l_{\overline{x}}n_{\overline{x}}+\overline{k}_{55}l_{\overline{y}}n_{\overline{y}}+\overline{k}_{66}l_{\overline{z}}n_{\overline{z}}\right)$$
$$k_{107}=k_{74}, k_{108}=k_{84}, k_{109}=k_{94}, k_{1010}=k_{44}$$

$$k_{111}=k_{51}, k_{112}=k_{52}, k_{113}=k_{53}$$
$$k_{114}=k_{105}, k_{115}=\frac{1}{2}\left(-2\overline{k}_{44}m_{\overline{x}}^{\ 2}+\overline{k}_{55}m_{\overline{y}}^{\ 2}+\overline{k}_{66}m_{\overline{z}}^{\ 2}\right) k_{116}=\frac{1}{2}\left(-2\overline{k}_{44}m_{\overline{x}}n_{\overline{x}}+\overline{k}_{55}m_{\overline{y}}n_{\overline{y}}+\overline{k}_{66}m_{\overline{z}}n_{\overline{z}}\right)$$
$$k_{117}=k_{75}, k_{118}=k_{85}, k_{119}=k_{95}, k_{1110}=k_{54}, k_{1111}=k_{55}$$

$$k_{121}=k_{61}, k_{122}=k_{62}, k_{123}=k_{63}$$
$$k_{124}=k_{106}, k_{125}=k_{116} k_{126}=\frac{1}{2}\left(-2\overline{k}_{44}n_{\overline{x}}^{\ 2}+\overline{k}_{55}n_{\overline{y}}^{\ 2}+\overline{k}_{66}n_{\overline{z}}^{\ 2}\right)$$
$$k_{127}=k_{76}, k_{128}=k_{86}, k_{129}=k_{96}, k_{1210}=k_{64}, k_{1211}=k_{65}, k_{1212}=k_{66}$$

(11.20)

11.4　座標変換マトリックスの計算

(11.18)式の座標変換マトリックスの成分は，次のように計算される。ただし，ここでは，全体座標系を(x,y,z)，要素の座標系を$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$で表す。また，全体座標系における要素両端の節点座標を$(x_i,y_i,z_i),(x_j,y_j,z_j)$で表す。

(1) $\overline{x}$軸方向の方向余弦

要素の材軸方向である$\overline{x}$軸方向の方向余弦は次式で表される。

$$l_{\overline{x}}=(x_j-x_i)/l, m_{\overline{x}}=(y_j-y_i)/l, n_{\overline{x}}=(z_j-z_i)/l \tag{11.21}$$

ただし，$l=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2}$ 。

(2) $\overline{y},\overline{z}$軸方向の方向余弦

$\overline{y},\overline{z}$軸方向は，コードアングル（断面の回転角）を定義することによって与える。以下その方法について示す。

(a) 部材$\overline{x}$軸が全体z軸と平行でない場合

部材の$\overline{x}$軸に垂直な平面Pを考え，その平面P上で，xy平面に平行なy'軸を考え，つぎに，部材$\overline{x}$軸およびy'軸と右手の関係をなすz'軸を考える。ここに，y'軸の正方向は，z'軸の正方向が全体z座標値が増大する方向を向くように定める。そして，平面P上で，y'軸から部材$\overline{y}$軸へ測った角をコードアングルθとする。ただし，この角度は，部材$\overline{x}$軸まわりに右ねじ方向を正のコードアングルとする。

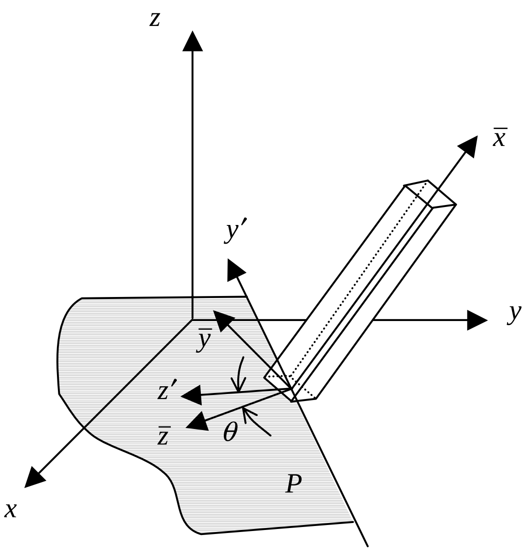

図 11.3　部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行でない場合のコードアングル θ

(b) 部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行な場合

全体 y 軸から部材 $\bar{z}$ 軸へ測った角をコードアングル θ とする。ただし，部材 $\bar{x}$ 軸まわりに右ねじの方向を正のコードアングルとする。

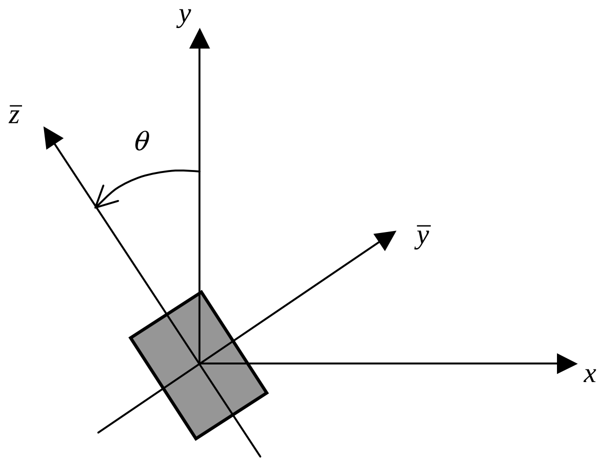

図 11.4　部材 $\bar{x}$ 軸が全体 z 軸と平行な場合のコードアングル θ

以上の(a),(b)の場合についての方向余弦の計算法を示す。

まず，(a)の場合は，y' 軸は部材 $\bar{x}$ 軸に直交し，また xy 平面に平行であるから全体 z 軸に対しても直交する。したがって，部材 $\bar{x}$ 軸方向の単位ベクトルを $\mathrm{e}_{\bar{x}}$，全体 z 軸方向の単位ベクトルを e_z とすると，y' 軸方向の単位ベクトル $\mathrm{e}_{y'}$ は，$\mathrm{e}_{\bar{x}} \times \mathrm{e}_z$ に比例する。すなわち，

$$\mathrm{e}_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \mathrm{e}_{\bar{x}} = \begin{Bmatrix} l_{\bar{x}} \\ m_{\bar{x}} \\ n_{\bar{x}} \end{Bmatrix}, \mathrm{e}_{y'} = \begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \tag{11.22}$$

とすると，

$$l_{y'} = \frac{\mp m_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{x}}^2}}, m_{y'} = \frac{\pm l_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{x}}^2}}, n_{y'} = 0 \quad \text{（複号同順）} \tag{11.23}$$

複合のいずれをとるかはz'軸によって決まる。

z'軸方向の単位ベクトル$\mathrm{e}_{z'}$は，$\mathrm{e}_{\bar{x}}$および$\mathrm{e}_{y'}$と右手系の関係をなすことから，

$$\mathrm{e}_{z'} = \begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix} = \mathrm{e}_{\bar{x}} \times \mathrm{e}_{y'} \tag{11.24}$$

であるから，これを計算すると次式となる。

$$l_{z'} = m_{\bar{x}} n_{y'} - n_{\bar{x}} m_{y'}, m_{z'} = n_{\bar{x}} l_{y'} - l_{\bar{x}} n_{y'}, n_{z'} = l_{\bar{x}} m_{y'} - m_{\bar{x}} l_{y'} \tag{11.25}$$

ここで，z'軸の正の方向は，全体z座標値が増大する方向を正にとるので，

$$\cos\left(\mathrm{e}_{z'}, \mathrm{e}_{z}\right) = n_{z'} > 0 \tag{11.26}$$

となる必要がある。$n_{z'}$を(11.25),(11.23)式を用いて計算すると，

$$n_{z'} = \pm\sqrt{l_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{x}}^2} \tag{11.27}$$

となるので，$n_{z'} > 0$となるためには，複号の前の方を採用しなければならない。

以上より，y', z'の方向余弦は次のようになる。

$$\begin{aligned} l_{y'} &= \frac{-m_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{x}}^2}}, m_{y'} = \frac{l_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{x}}^2}}, n_{y'} = 0 \\ l_{z'} &= \frac{-n_{\bar{x}} l_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{x}}^2}}, m_{z'} = \frac{-m_{\bar{x}} n_{\bar{x}}}{\sqrt{l_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{x}}^2}}, n_{z'} = \sqrt{l_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{x}}^2} \end{aligned} \tag{11.28}$$

となる。

部材$\bar{y}$軸方向の単位ベクトル$\mathrm{e}_{\bar{y}}$，部材$\bar{z}$軸方向の単位ベクトル$\mathrm{e}_{\bar{z}}$と$\mathrm{e}_{y'}, \mathrm{e}_{z'}$との関係は，コードアングル$\theta$を用いて，

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_{\bar{y}} &= \mathrm{e}_{y'} \cos\theta + \mathrm{e}_{z'} \sin\theta \\ \mathrm{e}_{\bar{z}} &= -\mathrm{e}_{y'} \sin\theta + \mathrm{e}_{z'} \cos\theta \end{aligned} \tag{11.29}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_{\bar{y}} &= \begin{Bmatrix} l_{\bar{y}} \\ m_{\bar{y}} \\ n_{\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \cos\theta + \begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix} \sin\theta \\ \mathrm{e}_{\bar{z}} &= \begin{Bmatrix} l_{\bar{z}} \\ m_{\bar{z}} \\ n_{\bar{z}} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \sin\theta + \begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix} \cos\theta \end{aligned} \tag{11.30}$$

一方，(b)の場合は，z'軸を全体y軸と一致させることになるから，部材y'軸は，

$$\mathrm{e}_{y'} = \begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y} \end{Bmatrix} = \mathrm{e}_{z'} \times \mathrm{e}_{\bar{x}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l_{\bar{x}} \\ m_{\bar{x}} \\ n_{\bar{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11.31}$$

上式を(11.30)式に代入すると，

$$
\mathrm{e}_{\bar{y}} = \begin{Bmatrix} l_{\bar{y}} \\ m_{\bar{y}} \\ n_{\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos\theta + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin\theta
$$

$$
\mathrm{e}_{\bar{z}} = \begin{Bmatrix} l_{\bar{z}} \\ m_{\bar{z}} \\ n_{\bar{z}} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} n_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin\theta + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos\theta \tag{11.32}
$$

参考のため，要素が全体座標軸上にあり，コードアングル 0 の場合の全体座標と要素座標の関係を図 11.5 に示しておく。

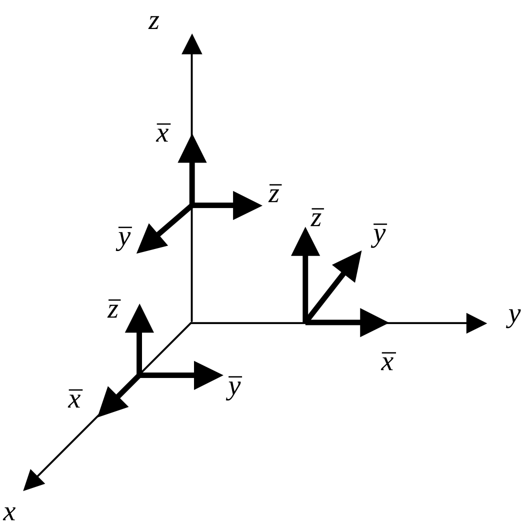

図 11.5　コードアングル 0 の場合の要素座標系と全体座標系の関係

11.4　断面力の計算法

立体骨組要素の場合，断面力は， y, z 方向のせん断力 Q_y, Q_z ， x 軸方向の軸力 P ， y, z 軸まわりの曲げモーメント M_y, M_z ， x 軸まわりのねじりモーメント M_x であり，それぞれ次式で定義される。

$$
P = \iint \sigma_x dydz \tag{11.33}
$$

$$
M_y = \iint z\sigma_x dydz \tag{11.34}
$$

$$
M_z = -\iint y\sigma_x dydz \tag{11.35}
$$

$$
M_x = \iint \left\{ \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} + y \right) \tau_{xy} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} - z \right) \tau_{zx} \right\} dydz \tag{11.36}
$$

$$
Q_y = \frac{dM_z}{dx} \tag{11.37}
$$

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} \tag{11.38}$$

ところで，断面内の応力$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{zx}$は，要素座標系で定義された節点変位ベクトルから次式によって求められる。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left(\frac{du^c(x)}{dx} - y\frac{d^2v^c(x)}{dx^2} - z\frac{d^2w^c(x)}{dx^2}\right)$$

$$= E\begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i^c \\ u_j^c \end{Bmatrix} - Ey\begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) & \left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x\right) & \left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i^c \\ \theta_{zi} \\ v_j^c \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$$

$$- Ez\begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) & -\left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x\right) & -\left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_i^c \\ \theta_{yi} \\ w_j^c \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \tag{11.39}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = G\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z\right)\phi = G\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z\right)\begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = G\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y\right)\phi = G\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y\right)\begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix}$$

(11.39)式を(11.33)～(11.38)式に代入すると，

$$P = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i^c \\ u_j^c \end{Bmatrix} \tag{11.40}$$

$$M_y = EI_y\begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) & -\left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x\right) & -\left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_i^c \\ \theta_{yi} \\ w_j^c \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \tag{11.41}$$

$$M_z = -EI_z\begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) & \left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x\right) & \left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i^c \\ \theta_{zi} \\ v_j^c \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \tag{11.42}$$

$$M_x = \frac{GK}{l}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix} \tag{11.43}$$

$$Q_y = -EI_z\begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i^c \\ \theta_{zi} \\ v_j^c \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \tag{11.44}$$

$$Q_z = EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i^c \\ \theta_{yi} \\ w_j^c \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \tag{11.45}$$

ただし，断面の原点は図心に設定されているため，$\iint ydydz = 0, \iint zdydz = 0$であり，$A$，$I_y, I_z$は，断面積と$y, z$軸まわりの断面二次モーメント，$K$はサンブナンのねじり定数でそれぞれ次式で定義される。

$$\begin{aligned} &A = \iint dydz \\ &I_z = \iint y^2 dydz, I_y = \iint z^2 dydz \\ &K = \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dydz \end{aligned} \tag{11.46}$$

要素両端の曲げモーメントは，(11.41), (11.42)式から次式となる。

$$\begin{aligned} &M_{yi} = EI_y \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i^c \\ \theta_{yi} \\ w_j^c \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \\ &M_{yj} = EI_y \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i^c \\ \theta_{yi} \\ w_j^c \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{11.47}$$

$$\begin{aligned} &M_{zi} = -EI_z \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2} & -\frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i^c \\ \theta_{zi} \\ v_j^c \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \\ &M_{zj} = -EI_z \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i^c \\ \theta_{zi} \\ v_j^c \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{11.48}$$

以上の断面力をまとめて表すと次式となる。

$$
\begin{Bmatrix} P \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_{yi} \\ M_{yj} \\ M_{zi} \\ M_{zj} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GK}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GK}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\
0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{4EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\
0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2EI_z}{l} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI_z}{l}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_i^c \\ v_i^c \\ w_i^c \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_j^c \\ v_j^c \\ w_j^c \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}
\tag{11.49}
$$

ただし，上式の節点変位は，要素の座標系で定義されたものであるから，(11.13)式によって，全体座標系の節点変位に変換する必要がある。(11.13)式を(11.49)式に代入すると，断面力は，全体座標系の節点変位から次式によって計算される。

$$
\{S_f\} = [G]\{U^e\} \tag{11.50}
$$

ここに，$\{U^e\}$ は全体座標系で定義された節点変位ベクトル，また，$\{S_f\},[G]$ は次式となる。

$$
\{S_f\}^T = \{P \quad Q_y \quad Q_z \quad M_x \quad M_{yi} \quad M_{yj} \quad M_{zi} \quad M_{zj}\} \tag{11.51}
$$

$$
[G] = \begin{bmatrix}
G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & 0 & G_{17} & G_{18} & G_{19} & 0 & 0 & 0 \\
G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} & G_{27} & G_{28} & G_{29} & G_{210} & G_{211} & G_{212} \\
G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} & G_{37} & G_{38} & G_{39} & G_{310} & G_{311} & G_{312} \\
0 & 0 & 0 & G_{44} & G_{45} & G_{46} & 0 & 0 & 0 & G_{410} & G_{411} & G_{412} \\
G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} & G_{57} & G_{58} & G_{59} & G_{510} & G_{511} & G_{512} \\
G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} & G_{67} & G_{68} & G_{69} & G_{610} & G_{611} & G_{612} \\
G_{71} & G_{72} & G_{73} & G_{74} & G_{75} & G_{76} & G_{77} & G_{78} & G_{79} & G_{710} & G_{711} & G_{712} \\
G_{81} & G_{82} & G_{83} & G_{84} & G_{85} & G_{86} & G_{87} & G_{88} & G_{89} & G_{810} & G_{811} & G_{812}
\end{bmatrix} \tag{11.52}
$$

$$
G_{11} = -\frac{EA}{l} l_{\bar{x}},\ G_{12} = -\frac{EA}{l} m_{\bar{x}},\ G_{13} = -\frac{EA}{l} n_{\bar{x}},\ G_{17} = -G_{11},\ G_{18} = -G_{12},\ G_{19} = -G_{13}
$$

$$
G_{21} = -\frac{12EI_z}{l^3} l_{\bar{y}},\ G_{22} = -\frac{12EI_z}{l^3} m_{\bar{y}},\ G_{23} = -\frac{12EI_z}{l^3} n_{\bar{y}}
$$

$$
G_{24} = -\frac{6EI_z}{l^2} l_{\bar{z}},\ G_{25} = -\frac{6EI_z}{l^2} m_{\bar{z}},\ G_{26} = -\frac{6EI_z}{l^2} n_{\bar{z}}
$$

$$
G_{27} = -G_{21},\ G_{28} = -G_{22},\ G_{29} = -G_{23},\ G_{210} = G_{24},\ G_{211} = G_{25},\ G_{212} = G_{26}
$$

$$G_{31}=\frac{12EI_y}{l^3}l_{\bar z},\, G_{32}=\frac{12EI_y}{l^3}m_{\bar z},\, G_{33}=\frac{12EI_y}{l^3}n_{\bar z}$$
$$G_{34}=-\frac{6EI_y}{l^2}l_{\bar y},\, G_{35}=-\frac{6EI_y}{l^2}m_{\bar y},\, G_{36}=-\frac{6EI_y}{l^2}n_{\bar y}$$
$$G_{37}=-G_{31},\, G_{38}=-G_{32},\, G_{39}=-G_{33},\, G_{310}=G_{34},\, G_{311}=G_{35},\, G_{312}=G_{36}$$

$$G_{44}=-\frac{GK}{l}l_{\bar x},\, G_{45}=-\frac{GK}{l}m_{\bar x},\, G_{46}=-\frac{GK}{l}n_{\bar x},\, G_{410}=-G_{44},\, G_{411}=-G_{45},\, G_{412}=-G_{46}$$

$$G_{51}=-\frac{6EI_y}{l^2}l_{\bar z},\, G_{52}=-\frac{6EI_y}{l^2}m_{\bar z},\, G_{53}=-\frac{6EI_y}{l^2}n_{\bar z}$$
$$G_{54}=\frac{4EI_y}{l}l_{\bar y},\, G_{55}=\frac{4EI_y}{l}m_{\bar y},\, G_{56}=\frac{4EI_y}{l}n_{\bar y}$$
$$G_{57}=-G_{51},\, G_{58}=-G_{52},\, G_{59}=-G_{53},\, G_{510}=G_{54}/2,\, G_{511}=G_{55}/2,\, G_{512}=G_{56}/2$$

$$G_{61}=-G_{51},\, G_{62}=-G_{52},\, G_{63}=-G_{53},\, G_{64}=-G_{510},\, G_{65}=-G_{511},\, G_{66}=-G_{512}$$
$$G_{67}=G_{51},\, G_{68}=G_{52},\, G_{69}=G_{53},\, G_{610}=-G_{54},\, G_{611}=-G_{55},\, G_{612}=-G_{56}$$

$$G_{71}=\frac{6EI_z}{l^2}l_{\bar y},\, G_{72}=\frac{6EI_z}{l^2}m_{\bar y},\, G_{73}=\frac{6EI_z}{l^2}n_{\bar y}$$
$$G_{74}=\frac{4EI_z}{l}l_{\bar z},\, G_{75}=\frac{4EI_z}{l}m_{\bar z},\, G_{76}=\frac{4EI_z}{l}n_{\bar z}$$
$$G_{77}=-G_{71},\, G_{78}=-G_{72},\, G_{79}=-G_{73},\, G_{710}=G_{74}/2,\, G_{711}=G_{75}/2,\, G_{712}=G_{76}/2$$

$$G_{81}=-G_{71},\, G_{82}=-G_{72},\, G_{83}=-G_{73},\, G_{84}=-G_{710},\, G_{85}=-G_{711},\, G_{86}=-G_{712}$$
$$G_{87}=G_{71},\, G_{88}=G_{72},\, G_{89}=G_{73},\, G_{810}=-G_{74},\, G_{811}=-G_{75},\, G_{812}=-G_{76}$$