

## 1 2 半剛接骨組の解析

### 12.1 有限要素モデル

骨組の接合部がピン接合と剛接合の中間的な接合特性を有する骨組の解析を行うために，図 12.1 に示すような要素モデルを考える。

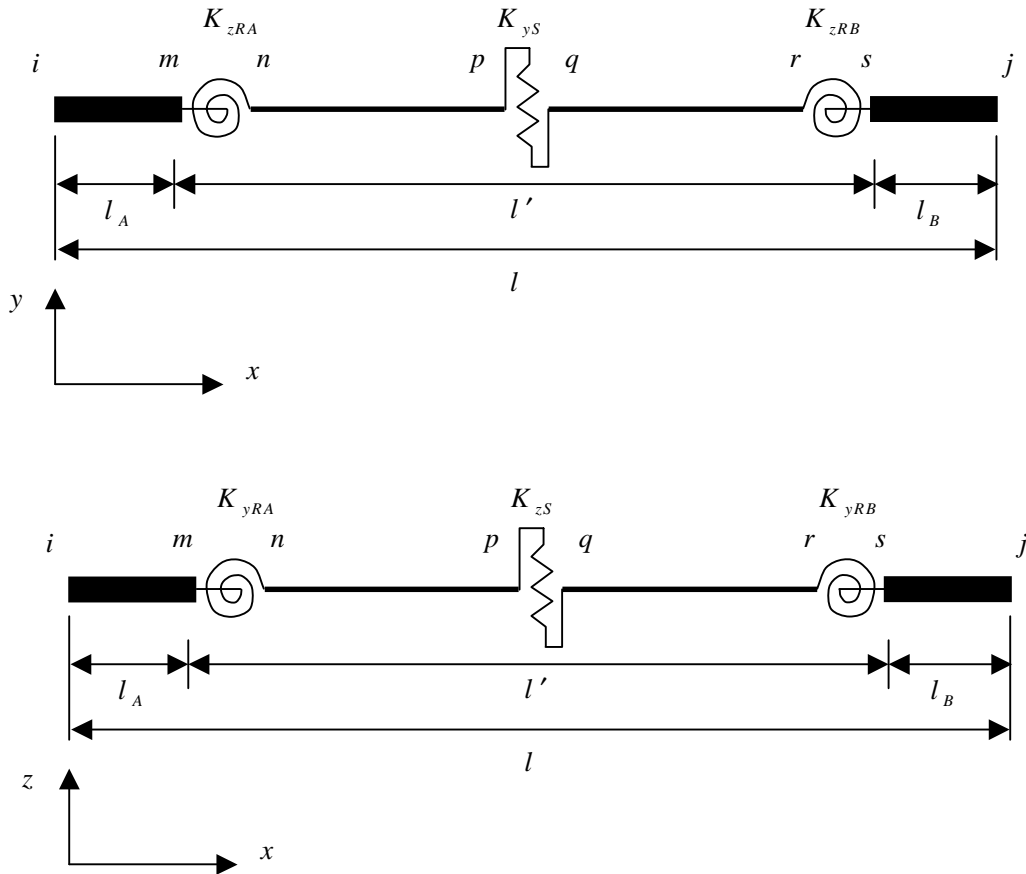


図 12.1 半剛接骨組解析に用いる要素モデル

節点  $i, m, n, p, q, r, s, j$  間の要素を  $im, mn, np, pq, qr, rs, sj$  とする。以下，これらの要素の曲げ変形に対する要素剛性マトリックスを導出する。ここで， $im, sj$  要素部分は剛域であり，剛要素とする。

### 12.2 $z$ 軸まわりの曲げ要素剛性マトリックス

まず， $z$  軸まわりの曲げ問題を考える。この場合，各節点での変位ベクトルを次のように表す。

$$\{d_k\}^T = \{v_k \quad \theta_{zk}\}, k = i, m, n, p, q, r, s, j \quad (12.1)$$

$im$  要素と  $sj$  要素は，剛要素であるから，節点変位間に次式の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_{zm} \\ v_s \\ \theta_{zs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (12.2)$$

$mn$  要素と  $rs$  要素は、曲げバネ要素であるから、それぞれ次式の剛性方程式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} K_{zRA} & -K_{zRA} \\ -K_{zRA} & K_{zRA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{zm} \\ \theta_{zn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{zm}^e \\ M_{zn}^e \end{Bmatrix} \quad (12.3)$$

$$\begin{bmatrix} K_{zRB} & -K_{zRB} \\ -K_{zRB} & K_{zRB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{zr} \\ \theta_{zs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{zr}^e \\ M_{zs}^e \end{Bmatrix}$$

$np$  要素と  $qr$  要素は、通常のはり要素であるから、それぞれ次式の剛性方程式が成り立つ。

$$\frac{8EI_z}{l'^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & \\ 3l' & l'^2 & & & & \\ -12 & -3l' & 12 & & & \\ 3l' & l'^2/2 & -3l' & l'^2 & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_{zn} \\ v_p \\ \theta_{zp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{ym}^e \\ M_{zn}^e \\ Q_{yp}^e \\ M_{zp}^e \end{Bmatrix} \quad (12.4)$$

$$\frac{8EI_z}{l'^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & \\ 3l' & l'^2 & & & & \\ -12 & -3l' & 12 & & & \\ 3l' & l'^2/2 & -3l' & l'^2 & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_q \\ \theta_{zp} \\ v_s \\ \theta_{zr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{yq}^e \\ M_{zp}^e \\ Q_{ys}^e \\ M_{zr}^e \end{Bmatrix}$$

ただし、ここでは、 $v_n = v_m$ ,  $\theta_p = \theta_q$ ,  $v_r = v_s$  の関係を用いている。

$pq$  要素は、せん断バネ要素であるから、次式の剛性方程式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} K_{yS} & -K_{yS} \\ -K_{yS} & K_{yS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_p \\ v_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{yp}^e \\ Q_{yq}^e \end{Bmatrix} \quad (12.5)$$

(12.3)式、(12.4)式、(12.5)式を重ね合わせると、次式の剛性方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{96EI_z}{l'^3} & 0 & \frac{24EI_z}{l'^2} & -\frac{96EI_z}{l'^3} & \frac{24EI_z}{l'^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{zRA} & -K_{zRA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{24EI_z}{l'^2} & -K_{zRA} & \frac{8EI_z}{l'} + K_{zRA} & -\frac{24EI_z}{l'^2} & \frac{4EI_z}{l'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{96EI_z}{l'^3} & 0 & -\frac{24EI_z}{l'^2} & \frac{96EI_z}{l'^3} + K_{yS} & -\frac{24EI_z}{l'^2} & -K_{yS} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{24EI_z}{l'^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l'} & -\frac{24EI_z}{l'^2} & \frac{16EI_z}{l'} & \frac{24EI_z}{l'^2} & \frac{4EI_z}{l'} & -\frac{24EI_z}{l'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{yS} & \frac{24EI_z}{l'^2} & \frac{96EI_z}{l'^3} + K_{yS} & \frac{24EI_z}{l'^2} & -\frac{96EI_z}{l'^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l'} & \frac{24EI_z}{l'^2} & \frac{8EI_z}{l'} + K_{zRB} & -\frac{24EI_z}{l'^2} & -K_{zRB} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{24EI_z}{l'^2} & -\frac{96EI_z}{l'^3} & -\frac{24EI_z}{l'^2} & \frac{96EI_z}{l'^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{zRB} & 0 & K_{zRB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_{zm} \\ \theta_{zn} \\ v_p \\ \theta_{zp} \\ v_q \\ \theta_{zr} \\ v_s \\ \theta_{zs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{ym}^e \\ M_{zm}^e \\ M_{zn}^e \\ Q_{yp}^e \\ M_{zp}^e \\ Q_{yq}^e \\ M_{zr}^e \\ Q_{ys}^e \\ M_{zs}^e \end{Bmatrix} \quad (12.6)$$

いま、要素内に荷重が作用していない(荷重は  $i, j$  節点のみに加わる)ものと仮定すると、(12.6)

式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix}
 \frac{96EI_z}{l^3} & 0 & \frac{24EI_z}{l^2} & -\frac{96EI_z}{l^3} & \frac{24EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{zRA} & -K_{zRA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{24EI_z}{l^2} & -K_{zRA} & \frac{8EI_z}{l'} + K_{zRA} & -\frac{24EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{96EI_z}{l^3} & 0 & -\frac{24EI_z}{l^2} & \frac{96EI_z}{l^3} + K_{yS} & -\frac{24EI_z}{l^2} & -K_{yS} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{24EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l'} & -\frac{24EI_z}{l^2} & \frac{16EI_z}{l'} & \frac{24EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l'} & -\frac{24EI_z}{l^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -K_{yS} & \frac{24EI_z}{l^2} & \frac{96EI_z}{l^3} + K_{yS} & \frac{24EI_z}{l^2} & -\frac{96EI_z}{l^3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l'} & \frac{24EI_z}{l^2} & \frac{8EI_z}{l'} + K_{zRB} & -\frac{24EI_z}{l^2} & -K_{zRB} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{24EI_z}{l^2} & -\frac{96EI_z}{l^3} & -\frac{24EI_z}{l^2} & \frac{96EI_z}{l^3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{zRB} & 0 & K_{zRB}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 v_m \\
 \theta_{zm} \\
 \theta_{zn} \\
 v_p \\
 \theta_{zp} \\
 v_q \\
 \theta_{zr} \\
 v_s \\
 \theta_{zs}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 Q_{ym}^e \\
 M_{zm}^e \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 Q_{ys}^e \\
 M_{zs}^e
 \end{Bmatrix}
 \quad (12.7)$$

節点力が0となる行を取り出すと、

$$\begin{bmatrix}
 \frac{8EI_z}{l'} + K_{zRA} & -\frac{24EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l'} & 0 & 0 \\
 -\frac{24EI_z}{l^2} & \frac{96EI_z}{l^3} + K_{yS} & -\frac{24EI_z}{l^2} & -K_{yS} & 0 \\
 \frac{4EI_z}{l'} & -\frac{24EI_z}{l^2} & \frac{16EI_z}{l'} & \frac{24EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l'} \\
 0 & -K_{yS} & \frac{24EI_z}{l^2} & \frac{96EI_z}{l^3} + K_{yS} & \frac{24EI_z}{l^2} \\
 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l'} & \frac{24EI_z}{l^2} & \frac{8EI_z}{l'} + K_{zRB}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \theta_{zn} \\
 v_p \\
 \theta_{zp} \\
 v_q \\
 \theta_{zr}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{24EI_z}{l^2} & -K_{zRA} & 0 & 0 \\
 -\frac{96EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{24EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{24EI_z}{l^2} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{96EI_z}{l^3} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{24EI_z}{l^2} & -K_{zRB}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 v_m \\
 \theta_{zm} \\
 v_s \\
 \theta_{zs}
 \end{Bmatrix}
 \quad (12.8)$$

一方、 $m, s$  節点に関する行を取り出すと、

$$\begin{bmatrix}
 \frac{96EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{zRA} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{96EI_z}{l^3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_{zRB}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 v_m \\
 \theta_{zm} \\
 v_s \\
 \theta_{zs}
 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 \frac{24EI_z}{l^2} & -\frac{96EI_z}{l^3} & \frac{24EI_z}{l^2} & 0 & 0 \\
 -K_{zRA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{24EI_z}{l^2} & -\frac{96EI_z}{l^3} & -\frac{24EI_z}{l^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{zRB}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \theta_{zn} \\
 v_p \\
 \theta_{zp} \\
 v_q \\
 \theta_{zr}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 Q_{ym}^e \\
 M_{zm}^e \\
 Q_{ys}^e \\
 M_{zs}^e
 \end{Bmatrix}
 \quad (12.9)$$

ここで、図 12.1 の曲げバネ剛性  $K_{zRA}, K_{zRB}$ ，およびせん断バネ剛性  $K_{yS}$  を次式のように表す。

$$K_{zRA} = \frac{\lambda_{zRA}}{1 - \lambda_{zRA}} \frac{6EI_z}{l'}, K_{zRB} = \frac{\lambda_{zRB}}{1 - \lambda_{zRB}} \frac{6EI_z}{l'}, K_{yS} = \frac{\lambda_{yS}}{1 - \lambda_{yS}} \frac{12EI_z}{l^3} \quad (12.10)$$

ここに、 $\lambda_{zRA}, \lambda_{zRB}, \lambda_{yS}$  は、曲げおよびせん断変形に対するバネ剛性パラメータを表す。

(12.7)式を解くと、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \theta_{zm} \\ v_p \\ \theta_{zp} \\ v_q \\ \theta_{zf} \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_z} \begin{bmatrix} t_{z11} & t_{z12} & t_{z13} & t_{z14} \\ t_{z21} & t_{z22} & t_{z23} & t_{z24} \\ t_{z31} & t_{z32} & t_{z33} & t_{z34} \\ t_{z41} & t_{z42} & t_{z43} & t_{z44} \\ t_{z51} & t_{z52} & t_{z53} & t_{z54} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_{zm} \\ v_s \\ \theta_{zs} \end{Bmatrix} \quad (12.11)$$

ここに,

$$\begin{aligned} t_{z11} &= \frac{2}{l'} \lambda_{ys} (-1 + \lambda_{zRA}) (1 + 2\lambda_{zRB}) \\ t_{z12} &= \lambda_{zRA} \{1 + \lambda_{zRB} (5 - 3\lambda_{ys}) + 3\lambda_{ys}\} \\ t_{z13} &= -t_{11} \\ t_{z14} &= \lambda_{zRB} (-1 + \lambda_{zRA}) (-1 + 3\lambda_{ys}) \\ t_{z21} &= -\frac{1}{4} \left[ \lambda_{zRA} \{-4 + 16\lambda_{zRB} (-1 + \lambda_{ys}) - 3\lambda_{ys}\} - 4\lambda_{ys} + \lambda_{zRB} (-4 + 3\lambda_{ys}) \right] \\ t_{z22} &= -\frac{l'}{4} \lambda_{zRA} \{-2 + 7\lambda_{zRB} (-1 + \lambda_{ys}) - \lambda_{ys}\} \\ t_{z23} &= \frac{1}{4} \lambda_{ys} (4 + \lambda_{zRA} + 7\lambda_{zRB}) \\ t_{z24} &= -\frac{l'}{4} \lambda_{zRB} \{-2 + \lambda_{zRA} (-1 + \lambda_{ys}) + 5\lambda_{ys}\} \\ t_{z31} &= -\frac{1}{2l'} \lambda_{ys} \{4 + 5\lambda_{zRB} + \lambda_{zRA} (5 + 4\lambda_{zRB})\} \\ t_{z32} &= -\frac{1}{2} \lambda_{zRA} (1 + 2\lambda_{zRB}) (-2 + 3\lambda_{ys}) \\ t_{z33} &= -t_{z31} \\ t_{z34} &= -\frac{1}{2} \lambda_{zRB} (1 + 2\lambda_{zRA}) (-2 + 3\lambda_{ys}) \\ t_{z41} &= \frac{1}{4} \lambda_{ys} (4 + 7\lambda_{zRA} + \lambda_{zRB}) \\ t_{z42} &= \frac{l'}{4} \lambda_{zRA} \{-2 + \lambda_{zRB} (-1 + \lambda_{ys}) + 5\lambda_{ys}\} \\ t_{z43} &= -\frac{1}{4} \left[ \lambda_{zRA} \{-4 + 16\lambda_{zRB} (-1 + \lambda_{ys}) + 3\lambda_{ys}\} - 4\lambda_{ys} - \lambda_{zRB} (4 + 3\lambda_{ys}) \right] \\ t_{z44} &= \frac{l'}{4} \lambda_{zRB} \{-2 + 7\lambda_{zRA} (-1 + \lambda_{ys}) - \lambda_{ys}\} \\ t_{z51} &= \frac{2}{l'} \lambda_{ys} (1 + 2\lambda_{zRA}) (-1 + \lambda_{zRB}) \\ t_{z52} &= \lambda_{zRA} (-1 + \lambda_{zRB}) (-1 + 3\lambda_{ys}) \\ t_{z53} &= -t_{z51} \\ t_{z54} &= \lambda_{zRB} \{1 + \lambda_{zRA} (5 - 3\lambda_{ys}) + 3\lambda_{ys}\} \\ R_z &= \lambda_{zRB} + 2\lambda_{ys} + \lambda_{zRB} \lambda_{ys} + \lambda_{zRA} \{1 - 4\lambda_{zRB} (\lambda_{ys} - 1) + \lambda_{ys}\} \end{aligned} \quad (12.12)$$



$mn$  要素と  $rs$  要素は，曲げバネ要素であるから，それぞれ次式の剛性方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{yRA} & -K_{yRA} \\ -K_{yRA} & K_{yRA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{ym} \\ \theta_{yn} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} M_{ym}^e \\ M_{yn}^e \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{yRB} & -K_{yRB} \\ -K_{yRB} & K_{yRB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{yr} \\ \theta_{ys} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} M_{yr}^e \\ M_{ys}^e \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12.18)$$

$np$  要素と  $qr$  要素は，通常のはり要素であるから，それぞれ次式の剛性方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{8EI_y}{l'^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & & \\ -3l' & & & & & & & & \\ -12 & 3l' & 12 & & & & & & \\ -3l' & l'^2/2 & 3l' & l'^2 & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Sym.} \\ \left. \begin{Bmatrix} w_m \\ \theta_{ym} \\ w_p \\ \theta_{yp} \end{Bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} Q_{zm}^e \\ M_{ym}^e \\ Q_{zp}^e \\ M_{yp}^e \end{matrix} \right\} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \frac{8EI_y}{l'^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & & \\ -3l' & & & & & & & & \\ -12 & 3l' & 12 & & & & & & \\ -3l' & l'^2/2 & 3l' & l'^2 & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Sym.} \\ \left. \begin{Bmatrix} w_q \\ \theta_{yp} \\ w_s \\ \theta_{yr} \end{Bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} Q_{zq}^e \\ M_{yp}^e \\ Q_{zs}^e \\ M_{yr}^e \end{matrix} \right\} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{aligned} \quad (12.19)$$

ただし，ここでは， $v_n = v_m$ ,  $\theta_p = \theta_q$ ,  $v_r = v_s$  の関係を用いている。

$pq$  要素は，せん断バネ要素であるから，次式の剛性方程式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} K_{zs} & -K_{zs} \\ -K_{zs} & K_{zs} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_p \\ w_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{zp}^e \\ Q_{zq}^e \end{Bmatrix} \quad (12.20)$$

(12.18)式，(12.19)式，(12.20)式を重ね合わせると，次式の剛性方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{96EI_y}{l'^3} & 0 & -\frac{24EI_y}{l'^2} & -\frac{96EI_y}{l'^3} & -\frac{24EI_y}{l'^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{yRA} & -K_{yRA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{24EI_y}{l'^2} & -K_{yRA} & \frac{8EI_y}{l'} + K_{yRA} & \frac{24EI_y}{l'^2} & \frac{4EI_y}{l'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{96EI_y}{l'^3} & 0 & \frac{24EI_y}{l'^2} & \frac{96EI_y}{l'^3} + K_{zs} & \frac{24EI_y}{l'^2} & -K_{zs} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{24EI_y}{l'^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l'} & \frac{24EI_y}{l'^2} & \frac{16EI_y}{l'} & -\frac{24EI_y}{l'^2} & \frac{4EI_y}{l'} & \frac{24EI_y}{l'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{zs} & -\frac{24EI_y}{l'^2} & \frac{96EI_y}{l'^3} + K_{zs} & -\frac{24EI_y}{l'^2} & -\frac{96EI_y}{l'^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l'} & -\frac{24EI_y}{l'^2} & \frac{8EI_y}{l'} + K_{yRB} & \frac{24EI_y}{l'^2} & -K_{yRB} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24EI_y}{l'^2} & -\frac{96EI_y}{l'^3} & \frac{24EI_y}{l'^2} & \frac{96EI_y}{l'^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{yRB} & 0 & K_{yRB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_m \\ \theta_{ym} \\ \theta_{yn} \\ w_p \\ \theta_{yp} \\ w_q \\ \theta_{yr} \\ w_s \\ \theta_{ys} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{zm}^e \\ M_{ym}^e \\ M_{yn}^e \\ Q_{zp}^e \\ M_{yp}^e \\ Q_{zq}^e \\ M_{yr}^e \\ Q_{zs}^e \\ M_{ys}^e \end{Bmatrix} \quad (12.21)$$

いま，要素内に荷重が作用していない(荷重は  $i, j$  節点のみに加わる)ものと仮定すると，(12.21)式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix}
\frac{96EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{24EI_y}{l^2} & -\frac{96EI_y}{l^3} & -\frac{24EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{yRA} & -K_{yRA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{24EI_y}{l^2} & -K_{yRA} & \frac{8EI_y}{l'} + K_{yRA} & \frac{24EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{96EI_y}{l^3} & 0 & \frac{24EI_y}{l^2} & \frac{96EI_y}{l^3} + K_{zS} & \frac{24EI_y}{l^2} & -K_{zS} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{24EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l'} & \frac{24EI_y}{l^2} & \frac{16EI_y}{l'} & -\frac{24EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l'} & \frac{24EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -K_{zS} & -\frac{24EI_y}{l^2} & \frac{96EI_y}{l^3} + K_{zS} & -\frac{24EI_y}{l^2} & -\frac{96EI_y}{l^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l'} & -\frac{24EI_y}{l^2} & \frac{8EI_y}{l'} + K_{yRB} & \frac{24EI_y}{l^2} & -K_{yRB} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24EI_y}{l^2} & -\frac{96EI_y}{l^3} & \frac{24EI_y}{l^2} & \frac{96EI_y}{l^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{yRB} & 0 & K_{yRB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
w_m \\
\theta_{ym} \\
\theta_{yn} \\
w_p \\
\theta_{yp} \\
w_q \\
\theta_{yr} \\
w_s \\
\theta_{ys}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
Q_{zm}^e \\
M_{ym}^e \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
Q_{zs}^e \\
M_{ys}^e
\end{Bmatrix}
\quad (12.22)$$

節点力が0となる行を取り出すと，

$$\begin{bmatrix}
\frac{8EI_y}{l'} + K_{yRA} & \frac{24EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l'} & 0 & 0 \\
\frac{24EI_y}{l^2} & \frac{96EI_y}{l^3} + K_{zS} & \frac{24EI_y}{l^2} & -K_{yS} & 0 \\
\frac{4EI_y}{l'} & \frac{24EI_y}{l^2} & \frac{16EI_y}{l'} & -\frac{24EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l'} \\
0 & -K_{zS} & -\frac{24EI_y}{l^2} & \frac{96EI_y}{l^3} + K_{yS} & -\frac{24EI_y}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{4EI_y}{l'} & -\frac{24EI_y}{l^2} & \frac{8EI_y}{l'} + K_{yRB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\theta_{yn} \\
w_p \\
\theta_{yp} \\
w_q \\
\theta_{yr}
\end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\frac{24EI_y}{l^2} & -K_{yRA} & 0 & 0 \\
-\frac{96EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{24EI_y}{l^2} & 0 & \frac{24EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{96EI_y}{l^3} & 0 \\
0 & 0 & \frac{24EI_y}{l^2} & -K_{yRB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
w_m \\
\theta_{ym} \\
w_s \\
\theta_{ys}
\end{Bmatrix}
\quad (12.23)$$

一方， $m, s$  節点に関する行を取り出すと，

$$\begin{bmatrix}
\frac{96EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{yRA} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{96EI_y}{l^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_{yRB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
w_m \\
\theta_{ym} \\
w_s \\
\theta_{ys}
\end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
-\frac{24EI_y}{l^2} & -\frac{96EI_y}{l^3} & -\frac{24EI_y}{l^2} & 0 & 0 \\
-K_{yRA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{24EI_y}{l^2} & -\frac{96EI_y}{l^3} & \frac{24EI_y}{l^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -K_{yRB}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\theta_{yn} \\
w_p \\
\theta_{yp} \\
w_q \\
\theta_{yr}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
Q_{zm}^e \\
M_{ym}^e \\
Q_{zs}^e \\
M_{ys}^e
\end{Bmatrix}
\quad (12.24)$$

ここで，図 12.1 の曲げバネ剛性  $K_{yRA}, K_{yRB}$ ，およびせん断バネ剛性  $K_{zS}$  を次式のように表す。

$$K_{yRA} = \frac{\lambda_{yRA}}{1 - \lambda_{yRA}} \frac{6EI_y}{l'}, K_{yRB} = \frac{\lambda_{yRB}}{1 - \lambda_{yRB}} \frac{6EI_y}{l'}, K_{zS} = \frac{\lambda_{zS}}{1 - \lambda_{zS}} \frac{12EI_y}{l^3} \quad (12.25)$$

ここに， $\lambda_{yRA}, \lambda_{yRB}, \lambda_{zS}$  は，曲げおよびせん断変形に対するバネ剛性パラメータを表す。

(12.22)式を解くと，次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \theta_{ym} \\ w_p \\ \theta_{yp} \\ w_q \\ \theta_{yr} \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_y} \begin{bmatrix} t_{y11} & t_{y12} & t_{y13} & t_{y14} \\ t_{y21} & t_{y22} & t_{y23} & t_{y24} \\ t_{y31} & t_{y32} & t_{y33} & t_{y34} \\ t_{y41} & t_{y42} & t_{y43} & t_{y44} \\ t_{y51} & t_{y52} & t_{y53} & t_{y54} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_m \\ \theta_{ym} \\ w_s \\ \theta_{ys} \end{Bmatrix} \quad (12.26)$$

ここに，

$$\begin{aligned} t_{y11} &= -\frac{2}{l'} \lambda_{zs} (-1 + \lambda_{yRA}) (1 + 2\lambda_{yRB}) \\ t_{y12} &= \lambda_{yRA} \{1 + \lambda_{yRB} (5 - 3\lambda_{zs}) + 3\lambda_{zs}\} \\ t_{y13} &= -t_{11} \\ t_{y14} &= \lambda_{yRB} (-1 + \lambda_{yRA}) (-1 + 3\lambda_{zs}) \\ t_{y21} &= -\frac{1}{4} [\lambda_{yRA} \{-4 + 16\lambda_{yRB} (-1 + \lambda_{zs}) - 3\lambda_{zs}\} - 4\lambda_{zs} + \lambda_{yRB} (-4 + 3\lambda_{zs})] \\ t_{y22} &= \frac{l'}{4} \lambda_{yRA} \{-2 + 7\lambda_{yRB} (-1 + \lambda_{zs}) - \lambda_{zs}\} \\ t_{y23} &= \frac{1}{4} \lambda_{zs} (4 + \lambda_{yRA} + 7\lambda_{yRB}) \\ t_{y24} &= \frac{l'}{4} \lambda_{yRB} \{-2 + \lambda_{yRA} (-1 + \lambda_{zs}) + 5\lambda_{zs}\} \\ t_{y31} &= \frac{1}{2l'} \lambda_{zs} \{4 + 5\lambda_{yRB} + \lambda_{yRA} (5 + 4\lambda_{yRB})\} \\ t_{y32} &= -\frac{1}{2} \lambda_{yRA} (1 + 2\lambda_{yRB}) (-2 + 3\lambda_{zs}) \\ t_{y33} &= -t_{y31} \\ t_{y34} &= -\frac{1}{2} \lambda_{yRB} (1 + 2\lambda_{yRA}) (-2 + 3\lambda_{zs}) \\ t_{y41} &= \frac{1}{4} \lambda_{zs} (4 + 7\lambda_{yRA} + \lambda_{yRB}) \\ t_{y42} &= -\frac{l'}{4} \lambda_{yRA} \{-2 + \lambda_{yRB} (-1 + \lambda_{zs}) + 5\lambda_{zs}\} \\ t_{y43} &= -\frac{1}{4} [\lambda_{yRA} \{-4 + 16\lambda_{yRB} (-1 + \lambda_{zs}) + 3\lambda_{zs}\} - 4\lambda_{zs} - \lambda_{yRB} (4 + 3\lambda_{zs})] \\ t_{y44} &= -\frac{l'}{4} \lambda_{yRB} \{-2 + 7\lambda_{yRA} (-1 + \lambda_{zs}) - \lambda_{zs}\} \\ t_{y51} &= -\frac{2}{l'} \lambda_{zs} (1 + 2\lambda_{yRA}) (-1 + \lambda_{yRB}) \\ t_{y52} &= \lambda_{yRA} (-1 + \lambda_{yRB}) (-1 + 3\lambda_{zs}) \\ t_{y53} &= -t_{y51} \\ t_{y54} &= \lambda_{yRB} \{1 + \lambda_{yRA} (5 - 3\lambda_{zs}) + 3\lambda_{zs}\} \end{aligned} \quad (12.27)$$



$$R_y = \lambda_{yRB} + 2\lambda_{zS} + \lambda_{yRB}\lambda_{zS} + \lambda_{yRA} \{1 - 4\lambda_{yRB}(\lambda_{zS} - 1) + \lambda_{zS}\}$$

(12.11)式を(12.9)式に代入すると，次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} k_{y11} & & & \\ k_{y21} & k_{y22} & & \\ k_{y31} & k_{y32} & k_{y33} & \\ k_{y41} & k_{y42} & k_{y43} & k_{y44} \end{bmatrix} \text{Sym.} \begin{bmatrix} w_m \\ \theta_{ym} \\ w_s \\ \theta_{ys} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{zm}^e \\ M_{ym}^e \\ Q_{zs}^e \\ M_{ys}^e \end{bmatrix} \quad (12.28)$$

ここに，

$$\begin{aligned} k_{y11} &= \frac{12EI_y}{l'^3} \lambda_{zS} (\lambda_{yRA} + \lambda_{yRB} + 4\lambda_{yRA}\lambda_{yRB}) / R \\ k_{y21} &= -\frac{12EI_y}{l'^2} \lambda_{yRA}\lambda_{zS} (1 + 2\lambda_{yRB}) / R \\ k_{y22} &= \frac{6EI_y}{l'} \lambda_{yRA} (\lambda_{yRB} + 2\lambda_{zS} + \lambda_{yRB}\lambda_{zS}) / R \\ k_{y31} &= -k_{y11}, k_{y32} = -k_{y21}, k_{y33} = k_{y11} \\ k_{y41} &= -\frac{12EI_y}{l'^2} \lambda_{yRB}\lambda_{zS} (1 + 2\lambda_{yRA}) / R \\ k_{y42} &= \frac{6EI_y}{l'} \lambda_{yRA}\lambda_{yRB} (-1 + 3\lambda_{zS}) / R \\ k_{y43} &= -k_{y41} \\ k_{y44} &= \frac{6EI_y}{l'} \lambda_{yRB} (\lambda_{yRA} + 2\lambda_{zS} + \lambda_{yRA}\lambda_{zS}) / R \\ R_y &= \lambda_{yRB} + 2\lambda_{zS} + \lambda_{yRB}\lambda_{zS} + \lambda_{yRA} \{1 - 4\lambda_{yRB}(\lambda_{zS} - 1) + \lambda_{zS}\} \end{aligned} \quad (12.29)$$

さらに，(12.2)式の座標変換を行うと次式となる。ただし，節点力を変換するために，変換マトリックスの転置を前からも掛ける。

$$\begin{bmatrix} k_{y11} & & & & & \\ k_{y21} + k_{y11}l_A & k_{y22} + 2k_{y21}l_A + k_{y11}l_A^2 & & & & \\ -k_{y11} & -k_{y21} - k_{y11}l_A & & k_{y11} & & \\ k_{y41} + k_{y11}l_B & k_{y42} + k_{y21}(l_A + l_B)l_B + k_{y11}l_A l_B & -k_{y41} - k_{y11}l_B & k_{y44} + 2k_{y41}l_B + k_{y11}l_B^2 & & \end{bmatrix} \text{Sym.} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{zi}^e \\ M_{yi}^e \\ Q_{zj}^e \\ M_{yj}^e \end{bmatrix} \quad (12.30)$$

(12.17)式と(12.26)式より，この*i, j* 節点の節点変位から *m, n, p, q, r, s* の節点変位が求められる。

#### 12.4 半剛接骨組要素剛性マトリックス

(12.15)式と(12.30)式および軸方向変形とねじり変形を考慮すると，半剛接立体骨組要素のひずみエネルギーは次式となる。

$$V^e = \frac{1}{2} \{U^e\}^T [\bar{k}] \{U^e\} \quad (12.31)$$

ここに，







