3　座標変換

各要素の剛性を組み合わせる（重ね合わせる）ためには，各要素固有の座標系にもとづく変位ベクトルを，物体全体の一つの座標系の変位ベクトルに変換する必要がある。ここでは，変位ベクトルの座標変換と，平面トラスおよび平面骨組の要素剛性マトリックスの座標変換の方法について示す。

3.1　変位ベクトルの座標変換

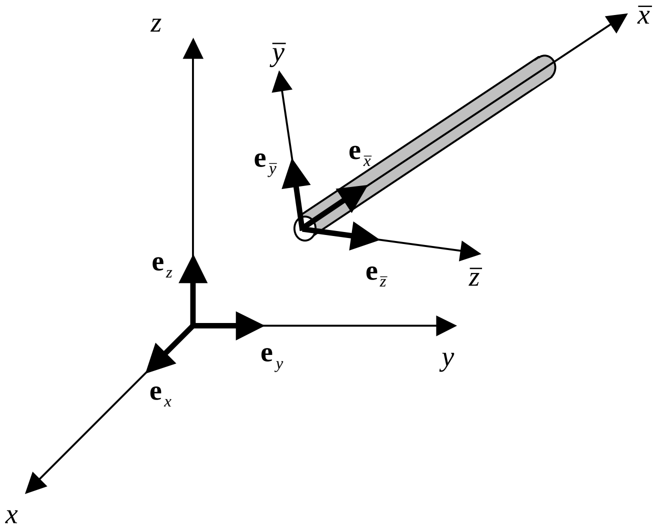

図 3.1　全体座標系と局所座標系

全体座標系 (x, y, z) の単位ベクトル $\{\mathrm{e}\} = \left\{\mathrm{e}_x, \mathrm{e}_y, \mathrm{e}_z\right\}^T$ と，局所座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ の単位ベクトル $\{\bar{\mathrm{e}}\} = \left\{\mathrm{e}_{\bar{x}}, \mathrm{e}_{\bar{y}}, \mathrm{e}_{\bar{z}}\right\}^T$ の関係は次式で表される。

$$\{\bar{\mathrm{e}}\} = [T]\{\mathrm{e}\} \tag{3.1}$$

ここに，

$$[T] = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}x} & l_{\bar{x}y} & l_{\bar{x}z} \\ l_{\bar{y}x} & l_{\bar{y}y} & l_{\bar{y}z} \\ l_{\bar{z}x} & l_{\bar{z}y} & l_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$[T]$ は，座標変換マトリックスと呼ばれ，$(l_{\bar{x}x}, l_{\bar{x}y}, l_{\bar{x}z})$ は局所 $\bar{x}$ 座標の全体 (x, y, z) 座標への方向余弦である。$(l_{\bar{y}x}, l_{\bar{y}y}, l_{\bar{y}z}), (l_{\bar{z}x}, l_{\bar{z}y}, l_{\bar{z}z})$ も同様であり，(3.2)式は次式のようにも書ける。

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{e}_{\bar{x}}, \mathrm{e}_x) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{x}}, \mathrm{e}_y) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{x}}, \mathrm{e}_z) \\ \cos(\mathrm{e}_{\bar{y}}, \mathrm{e}_x) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{y}}, \mathrm{e}_y) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{y}}, \mathrm{e}_z) \\ \cos(\mathrm{e}_{\bar{z}}, \mathrm{e}_x) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{z}}, \mathrm{e}_y) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{z}}, \mathrm{e}_z) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

ここに，$(\mathrm{e}_{\bar{i}}, \mathrm{e}_j)$ は，ベクトル $\mathrm{e}_{\bar{i}}$ とベクトル e_j の間の角度を表す。

したがって，局所座標系で定義された要素の節点変位$\{\bar{u}\} = \{\bar{u}_x \quad \bar{u}_y \quad \bar{u}_z\}^T$は，次式により，全体座標系の変位$\{u\} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^T$に変換される。

$$\{\bar{u}\} = [T]\{u\} \tag{3.4}$$

3.2　平面トラス要素の場合

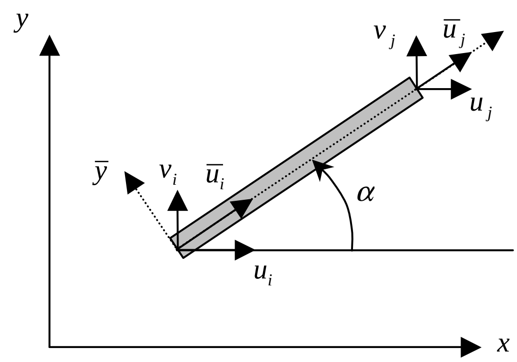

図 3.2　トラス要素の全体座標系と局所座標系の変位の関係

局所座標系の節点変位$\bar{u}_i$と全体座標系の節点変位$\{u_i \quad v_i\}^T$の関係は，(3.2)式より次式となる。

$$\bar{u}_i = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}x} & l_{\bar{x}y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{e}_{\bar{x}}, \mathrm{e}_x) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{x}}, \mathrm{e}_y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

(3.5)式に，$(\bar{\mathrm{e}}_x, \mathrm{e}_x) = \alpha,\ (\bar{\mathrm{e}}_x, \mathrm{e}_y) = \pi/2 - \alpha$の関係を代入すると，

$$\bar{u}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

同様に，

$$\bar{u}_j = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

(3.6)式と(3.7)式を合わせると，

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

上式を次式のように表示する。

$$\{\bar{d}\} = [T]\{d\} \tag{3.9}$$

このとき，(2.15)式の要素座標系で定義されたトラスのひずみエネルギーは次式のように変換される。なお，以下では，要素の座標系で定義された要素剛性マトリックスには上付バーを付けるものとする。

$$U^e = \frac{1}{2}\left\{\bar{u}_i \quad \bar{u}_j\right\}\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\bar{d}\right\}^T\left[\bar{k}_u^e\right]\left\{\bar{d}\right\} = \frac{1}{2}\left\{d\right\}^T\left[T\right]^T\left[\bar{k}_u^e\right]\left[T\right]\left\{d\right\} \tag{3.10}$$

上式を具体的に計算すると次式となる。

$$U^e = \frac{1}{2}\left\{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j\right\}\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix}\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j\right\}\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\sin\theta\cos\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{d\right\}^T\left[k_u^e\right]\left\{d\right\}$$

3.3 平面骨組要素の場合

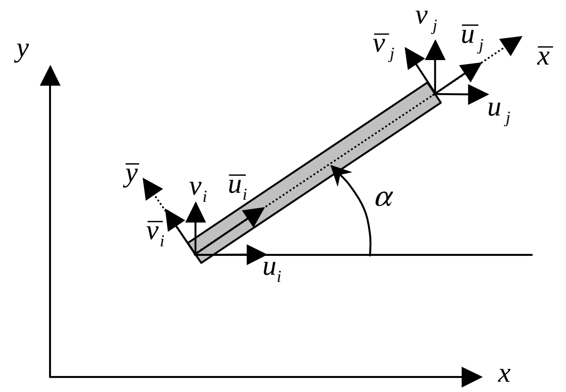

図 3.3　骨組要素の全体座標系と局所座標系の変位の関係

はり要素の場合，全体座標系と局所座標系の関係は次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}x} & l_{\bar{x}y} & 0 & 0 \\ l_{\bar{y}x} & l_{\bar{y}y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{\bar{x}x} & l_{\bar{x}y} \\ 0 & 0 & l_{\bar{y}x} & l_{\bar{y}y} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{e}_{\bar{x}},\mathrm{e}_x) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{x}},\mathrm{e}_y) & 0 & 0 \\ \cos(\mathrm{e}_{\bar{y}},\mathrm{e}_x) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{y}},\mathrm{e}_y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\mathrm{e}_{\bar{x}},\mathrm{e}_x) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{x}},\mathrm{e}_y) \\ 0 & 0 & \cos(\mathrm{e}_{\bar{y}},\mathrm{e}_x) & \cos(\mathrm{e}_{\bar{y}},\mathrm{e}_y) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

上式に，$(\mathrm{e}_{\bar{x}},\mathrm{e}_x)=\alpha$, $(\mathrm{e}_{\bar{x}},\mathrm{e}_y)=\pi/2-\alpha$, $(\mathrm{e}_{\bar{y}},\mathrm{e}_x)=\alpha+\pi/2$, $(\mathrm{e}_{\bar{y}},\mathrm{e}_y)=\alpha$ の関係を代入すると次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

さらに，$\bar{v}_i,\bar{v}_j$ の回転角 $\bar{v}'_i,\bar{v}'_j$ の座標変換も考慮すると次式となる。

$$
\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{v}'_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{v}'_j \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}
\tag{3.14}
$$

上式を次のように表す。

$$
\{\bar{d}\} = [T]\{d\} \tag{3.15}
$$

はり要素の曲げと軸方向変形のひずみエネルギーを足し合わせると次式となる。

$$
\begin{aligned}
U^e &= \frac{1}{2}\{\bar{u}_i \quad \bar{u}_j\}\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\{\bar{v}_i \quad \bar{v}'_i \quad \bar{v}_j \quad \bar{v}'_j\}\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & & & \mathrm{Sym.} \\ 6l & 4l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}'_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{v}'_j \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\{\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{v}'_i \quad \bar{u}_i \quad \bar{v}_j \quad \bar{v}'_j\}
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & & & & \mathrm{Sym.} & \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{v}'_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{v}'_j \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\{\bar{d}\}\left[\bar{k}_b\right]\{\bar{d}\}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

(3.16)式に，(3.15)式を代入すると次式となる。

$$
U^e = \frac{1}{2}\{d\}^T[T]^T\left[\bar{k}_b^e\right][T]\{d\} = \frac{1}{2}\{d\}^T\left[k_b^e\right]\{d\} \tag{3.17}
$$

ここに,

$$
\left[k_b^e\right] =
\begin{bmatrix}
k_{11} & & & & \mathrm{Sym.} & \\
k_{21} & k_{22} & & & & \\
k_{31} & k_{32} & k_{33} & & & \\
k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & & \\
k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & \\
k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}
\end{bmatrix}
\tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&k_{11} = \frac{EA}{l}\cos^2\alpha + \frac{12EI}{l^3}\sin^2\alpha \\
&k_{21} = \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)\cos\alpha\sin\alpha,\, k_{22} = \frac{EA}{l}\sin^2\alpha + \frac{12EI}{l^3}\cos^2\alpha \\
&k_{31} = -\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha,\, k_{32} = \frac{6EI}{l^2}\cos\alpha,\, k_{33} = \frac{4EI}{l} \\
&k_{41} = -k_{11},\, k_{42} = -k_{21},\, k_{43} = -k_{31},\, k_{44} = k_{11} \\
&k_{51} = -k_{21},\, k_{52} = -k_{22},\, k_{53} = -k_{32},\, k_{54} = k_{21},\, k_{55} = k_{22} \\
&k_{61} = k_{31},\, k_{62} = k_{32},\, k_{63} = k_{33}/2,\, k_{64} = -k_{31},\, k_{65} = -k_{32},\, k_{66} = k_{33}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$