6　断面力の計算法

各節点の変位が求まると，これから各要素の断面力を求めることができる。はり要素の場合，断面力は，せん断力Q，軸力P，曲げモーメントMであり，次式で定義される。ただし，はり理論ではせん断応力が定義されないため，せん断力はせん断応力から求めることはできない。したがって，曲げモーメントから間接的に求める。

$$P = \int_S \sigma_x dS \tag{6.1}$$

$$M = \int_S y\sigma_x dS \tag{6.2}$$

$$Q = \frac{dM}{dx} \tag{6.3}$$

ここに，Sは断面領域を表す。

ところで，断面内の応力σ_xは，要素座標系で定義された節点変位ベクトルから次式によって求められる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E\varepsilon_x = E\left(\frac{d\overline{u}}{dx} - y\frac{d^2\overline{v}}{dx^2}\right)\\ &= E\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{u}_i\\ \overline{u}_j\end{Bmatrix} - Ey\begin{bmatrix}\left(-\dfrac{6}{l^2}+\dfrac{12}{l^3}x\right) & \left(-\dfrac{4}{l}+\dfrac{6}{l^2}x\right) & \left(\dfrac{6}{l^2}-\dfrac{12}{l^3}x\right) & \left(-\dfrac{2}{l}+\dfrac{6}{l^2}x\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{v}_i\\ \overline{v}'_i\\ \overline{v}_j\\ \overline{v}'_j\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{6.4}$$

上式を(6.1)，(6.2)，(6.3)式に代入して断面積分を行うと次式となる。

$$P = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{u}_i\\ \overline{u}_j\end{Bmatrix} \tag{6.5}$$

$$M = -EI\begin{bmatrix}\left(-\dfrac{6}{l^2}+\dfrac{12}{l^3}x\right) & \left(-\dfrac{4}{l}+\dfrac{6}{l^2}x\right) & \left(\dfrac{6}{l^2}-\dfrac{12}{l^3}x\right) & \left(-\dfrac{2}{l}+\dfrac{6}{l^2}x\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{v}_i\\ \overline{v}'_i\\ \overline{v}_j\\ \overline{v}'_j\end{Bmatrix} \tag{6.6}$$

$$Q = -EI\begin{bmatrix}\dfrac{12}{l^3} & \dfrac{6}{l^2} & -\dfrac{12}{l^3} & \dfrac{6}{l^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{v}_i\\ \overline{v}'_i\\ \overline{v}_j\\ \overline{v}'_j\end{Bmatrix} \tag{6.7}$$

ただし，断面の原点は図心に設定されているため，$\int_S ydS = 0$であり，A，Iは，断面積とz軸まわりの断面二次モーメントで次式で定義される。

$$A = \int_S dS, \quad I = \int_S y^2 dS \tag{6.8}$$

上式からわかるように，軸力とせん断力は要素内で一定となり，要素両端の曲げモーメントは，(6.6)式から次式となる。

$$M_i = M(x=0) = -EI\begin{bmatrix}-\frac{6}{l^2} & -\frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{v}_i\\ \bar{v}'_i\\ \bar{v}_j\\ \bar{v}'_j\end{Bmatrix}$$

$$M_j = M(x=l) = -EI\begin{bmatrix}\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{v}_i\\ \bar{v}'_i\\ \bar{v}_j\\ \bar{v}'_j\end{Bmatrix} \tag{6.9}$$

(6.5)，(6.7)，(6.9)式をまとめると次式となる。

$$\begin{Bmatrix}P\\ Q\\ M_i\\ M_j\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_i\\ \bar{v}_i\\ \bar{v}'_i\\ \bar{u}_j\\ \bar{v}_j\\ \bar{v}'_j\end{Bmatrix} \tag{6.10}$$

一方，要素座標系の節点変位と全体座標系の節点変位の関係は次式で示された。

$$\begin{Bmatrix}\bar{u}_i\\ \bar{v}_i\\ \bar{v}'_i\\ \bar{u}_j\\ \bar{v}_j\\ \bar{v}'_j\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ \theta_i\\ u_j\\ v_j\\ \theta_j\end{Bmatrix} \tag{6.11}$$

(6.11)式を(6.10)式に代入して計算すると，次式となる。

$$\begin{Bmatrix}P\\ Q\\ M_i\\ M_j\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{EA}{l}\cos\alpha & -\frac{EA}{l}\sin\alpha & 0 & \frac{EA}{l}\cos\alpha & \frac{EA}{l}\sin\alpha & 0\\ \frac{12EI}{l^3}\sin\alpha & -\frac{12EI}{l^3}\cos\alpha & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3}\sin\alpha & \frac{12EI}{l^3}\cos\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\\ -\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & \frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & \frac{2EI}{l}\\ \frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & -\frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & \frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & -\frac{4EI}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ \theta_i\\ u_j\\ v_j\\ \theta_j\end{Bmatrix} \tag{6.12}$$

したがって，断面力の計算は，全節点に対する節点変位ベクトルから，その要素に関係する節点変位を抽出し，(6.11)式を用いることによって計算される。

以上の計算をプログラムで行うには，まず，全体の変位ベクトルから，要素両端の変位ベクトルを抜き出す以下のサブルーチンが必要となる。

```
      Subroutine Eldisp(D,de,indv,n,nnd,ndg,mnel)
      Dimension D(1),de(1),indv(mnel,1)
c       n     :要素番号
c       nnd   :一要素の節点数
c       ndg   :一節点の自由度数
c       mnel  : indv のディメンション行数
c       D     :全体節点変位ベクトル
c       de    :要素両端の節点変位ベクトル
      do 10 i = 1,nnd
      ni = indv(n,i)
      do 20 j = 1,ndg
      de( ndg*(i-1)+j ) = D( ndg*(ni-1)+j )
   20 continue
   10 continue
      return
      end
```

以上のサブルーチンから計算された各要素の節点変位ベクトル **de** から, 断面力の計算は以下のサブルーチンで計算される。

```
      subroutine SectF(x,y,Eyg,Are,SIy,indv,mte,de,SF(1),n,mnel,mnnd,mndg)
      dimension de(1),SF(1),SFM(4,mnnd*mndg),x(1),y(1)
     1         ,Eyg(1),Are(1),SIy(1),indv(mnel,1),mte(1)
      m   = mte(n)                        :材料・断面種別番号
      E   = Eyg(m)                        :種別番号 m のヤング係数
      EA  = E*Are(m)                      :種別番号 m のヤング係数×断面積
      EI  = E*SIy(m)                      :種別番号 m のヤング係数×断面２次モーメント
      Ni  = indv(n,1)                     :要素 n の i 端の節点番号
      Nj  = indv(n,2)                     :要素 n の j 端の節点番号
      Xij = x(Nj)-x(Ni)                   : j 端の x 方向座標 - i 端の x 方向座標
      Yij = y(Nj)-y(Ni)                   : j 端の y 方向座標 - i 端の y 方向座標
      EL  = sqrt( Xij**2+Yij**2 )         :要素 n の要素長さ
      cs  = Xij/EL                        :要素 n の cos α
      sn  = Yij/EL                        :要素 n の sin α
c
c 断面力－節点変位関係マトリックスの作成
c
      SFM(1,1) = -EA/EL*cs
      SFM(1,2) = -EA/EL*sn
      SFM(1,3) =  0.d0
      SFM(1,4) =  SFM(1,1)
      SFM(1,5) =  SFM(1,2)
      SFM(1,6) =  0.d0
      SFM(2,1) =  12.d0*EI/EL**3*sn
      SFM(2,2) = -12.d0*EI/EL**3*cs
      SFM(2,3) = -6.d0*EI/EL**2
      SFM(2,4) = -SFM(2,1)
      SFM(2,5) = -SFM(2,2)
      SFM(2,6) =  SFM(2,3)
      SFM(3,1) = -6.d0*EI/EL**2*sn
      SFM(3,2) =  6.d0*EI/EL**2*cs
      SFM(3,3) =  4.d0*EI/EL
      SFM(3,4) = -SFM(3,1)
      SFM(3,5) = -SFM(3,2)
      SFM(3,6) =  SFM(3,3)/2.d0
      SFM(4,1) = -SFM(3,1)
      SFM(4,2) = -SFM(3,2)
      SFM(4,3) = -SFM(3,6)
      SFM(4,4) = -SFM(4,1)
      SFM(4,5) = -SFM(4,2)
      SFM(4,6) = -SFM(3,3)
c
c 変位ベクトルとの掛け算
      Do 10 i = 1,4
      s = 0.d0
```

```
      Do 20 j = 1,6
   20 s = s + SFM(i,j)*de(j)
      SF(i) = s
   10 continue
c
      return
      end
```