7　要素質量マトリックス

動的な解析を行うためには，剛性マトリックスの他に質量マトリックス（各要素の質量を評価するマトリックス）が必要となる。本章では，要素剛性質量マトリックスの導出法について示す。

7.1　バネ・質点系におけるポテンシャルエネルギー

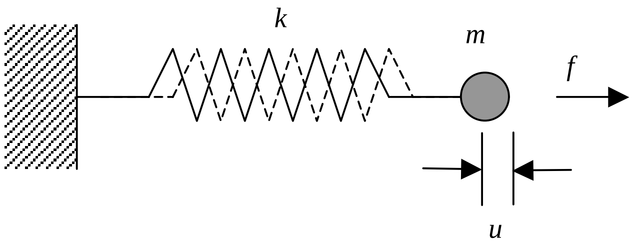

図 7.1　バネ・質点系の運動と釣合

釣合式 (equilibrium equation)

$$m\ddot{u} + ku = f \tag{7.1}$$

ここに,

m ：質量(mass)
$\ddot{u}$ ：加速度(acceleration)，ドットは時間微分を表す。
k ：バネ定数(spring constant)，または剛性(stiffness)
u ：変位(displacement)
f ：外力(force)

運動エネルギーは次式となる。

$$T = \frac{1}{2}\dot{u}m\dot{u} \tag{7.2}$$

7.2　有限要素法における質量マトリックスの導出法

① 節点変位を用いた多項式補間関数により，要素内の変位分布を仮定する。

要素内の点 (x, y) における変位 u, v は，節点変位(nodal displacement) $\{d\}$ を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= [S_u]\{d\} \\ v(x, y) &= [S_v]\{d\} \end{aligned} \tag{7.3}$$

ここに,

$[S_u],[S_v]$ ：変位 u,v に関する形状関数

$$\{d\}^T = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k \quad u_l \quad v_l\}^T$$

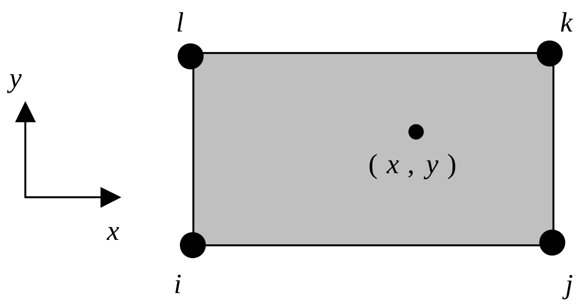

図 7.2　有限要素

② 節点変位で表された変位分布u,vから，運動エネルギーを求める。

$$\begin{aligned}
T^e &= \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \dot{u}\frac{\gamma}{g}\dot{u}d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \dot{v}\frac{\gamma}{g}\dot{v}d\Omega \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \{\dot{d}\}^T \frac{\gamma}{g}[S_u]^T[S_u]\{\dot{d}\}d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \{\dot{d}\}^T \frac{\gamma}{g}[S_v]^T[S_v]\{\dot{d}\}d\Omega \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \{\dot{d}\}^T \left[m_u^e\right]\{\dot{d}\}d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \{\dot{d}\}^T \left[m_v^e\right]\{\dot{d}\}d\Omega
\end{aligned} \tag{7.4}$$

ここに，γは要素内の単位体積重量，gは重力加速度である。そして，$\left[m_u^e\right],\left[m_v^e\right]$は，変位$u,v$に対する要素質量マトリックスである。したがって，この場合の要素質量マトリックス$\left[m^e\right]$は，次式となる。

$$\left[m^e\right] = \left[m_u^e\right] + \left[m_v^e\right] = \int_{\Omega^e} \frac{\gamma}{g}[S_u]^T[S_u]d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\gamma}{g}[S_v]^T[S_v]d\Omega \tag{7.5}$$

7.3　トラス要素における質量マトリックスの導出法

① 節点変位を用いた多項式補間関数により，要素内の変位分布を仮定する。

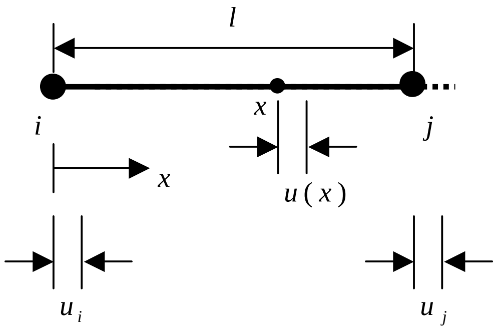

図 7.3　トラスの有限要素

要素内の点 x における変位 u は，節点変位(nodal displacement) $\{d\}^T = \{u_i, u_j\}^T$ を用いて次式で表される。

$$u(x) = (1-\frac{x}{l})u_i + \frac{x}{l}u_j = \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [s]\{d\} \tag{7.6}$$

② 節点変位で表された変位分布 u から，運動エネルギーを求める。

$$\begin{aligned} T^e &= \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \dot{u}\frac{\gamma}{g}\dot{u}d\Omega \\ &= \frac{1}{2}\{\dot{d}\}^T \int_0^l \left(\iint [s]^T \frac{\gamma}{g}[s]dydz \right) dx \{\dot{d}\} \\ &= \frac{1}{2}\{\dot{u}_i \quad \dot{u}_j\} \frac{\gamma A l}{6g} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{7.7}$$

ここに， A は次式で定義される断面積である。

$$A = \iint dydz \tag{7.8}$$

したがって，トラスの要素質量マトリックスは次式となる。

$$\left[m_u^e \right] = \frac{\gamma A l}{6g} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

7.4　はり要素における質量マトリックスの導出法

① 節点変位を用いた多項式補間関数により，要素内の変位分布を仮定する。

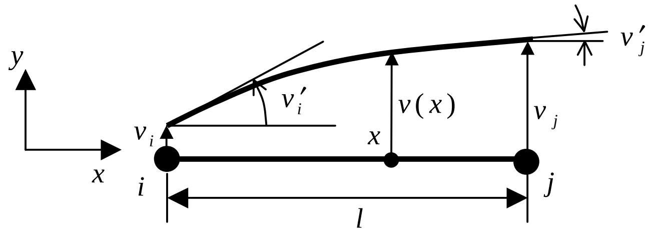

図 7.4　はりの有限要素

要素内の点 x における y 方向変位 v は，節点変位(nodal displacement) $\{d\}^T=\{v_i, v'_i, v_j, v'_j\}^T$ を用いて次式で表される。ただし，$v'_i=\partial v_i/\partial x$。

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \left\{1-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}v_i + l\left\{\left(\frac{x}{l}\right)-2\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}v'_i + \left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2-2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}v_j + l\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}v'_j \\
&= \left[\left\{1-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} \quad l\left\{\left(\frac{x}{l}\right)-2\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} \quad \left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2-2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} \quad l\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}\right]\begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} \\
&= [S]\{d\}
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

② 節点変位で表された変位分布 v から，運動エネルギーを求める。

$$
\begin{aligned}
T^e &= \frac{1}{2}\int_{\Omega^e}\dot{v}\frac{\gamma}{g}\dot{v}\,d\Omega \\
&= \frac{1}{2}\{\dot{d}\}^T\int_0^l\left(\iint[S]^T\frac{\gamma}{g}[S]\,dydz\right)dx\{\dot{d}\} \\
&= \frac{1}{2}\{\dot{v}_i \quad \dot{v}'_i \quad \dot{v}_j \quad \dot{v}'_j\}\frac{\gamma A l}{g}\begin{bmatrix} \frac{13}{35} & & & \text{Sym.} \\ \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & & \\ \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & \frac{13}{35} & \\ -\frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & -\frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{v}'_i \\ \dot{v}_j \\ \dot{v}'_j \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

したがって，はりの要素質量マトリックスは次式となる。

$$
\left[m_v{}^e\right]=\frac{\gamma Al}{g}\begin{bmatrix}
\frac{13}{35} & & & \text{Sym.}\\
\frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & & \\
\frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & \frac{13}{35} & \\
-\frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & -\frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105}
\end{bmatrix} \tag{7.12}
$$

7.5　骨組要素における質量マトリックスの導出法

軸方向変形と曲げ変形の両方を有する骨組要素の質量マトリックスは次式の運動エネルギーから導かれる。

$$
\begin{aligned}
T^e &= \frac{1}{2}\int_{\Omega^e}\dot{u}\frac{\gamma}{g}\dot{u}d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega^e}\dot{v}\frac{\gamma}{g}\dot{v}d\Omega\\
&=\frac{1}{2}\left\{\dot{d}_u\right\}^T\int_0^l\left(\iint[s]^T\frac{\gamma}{g}[s]dydz\right)dx\left\{\dot{d}_u\right\}+\frac{1}{2}\left\{\dot{d}_v\right\}^T\int_0^l\left(\iint[S]^T\frac{\gamma}{g}[S]dydz\right)dx\left\{\dot{d}_v\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\dot{u}_i\quad \dot{v}_i\quad \dot{v}_i'\quad \dot{u}_j\quad \dot{v}_j\quad \dot{v}_j'\right\}\frac{\gamma Al}{g}\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & & & & & \text{Sym.}\\
0 & \frac{13}{35} & & & & \\
0 & \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & & & \\
\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & \\
0 & \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & \\
0 & -\frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & 0 & -\frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105}
\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}_i\\ \dot{v}_i\\ \dot{v}_i'\\ \dot{u}_j\\ \dot{v}_j\\ \dot{v}_j'\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.13}
$$

したがって，骨組要素の質量マトリックスは次式となる。

$$
\left[m^e\right]=\frac{\gamma Al}{g}\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & & & & & \text{Sym.}\\
0 & \frac{13}{35} & & & & \\
0 & \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & & & \\
\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & \\
0 & \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & \\
0 & -\frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & 0 & -\frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105}
\end{bmatrix} \tag{7.14}
$$

7.6　要素質量マトリックスの座標変換

要素の座標系と全体座標系の関係は次式で表された。

$$\left\{\bar{d}\right\}=[T]\{d\} \tag{7.15}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\left\{\bar{d}\right\}^T &= \left\{\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{v}'_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{v}'_j\right\} \\
\{d\}^T &= \left\{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\right\} \\
[T] &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

ただし，ここでは，バー付きを要素の座標系における節点変位としている。上式を(7.13)式に代入すると，全体座標系の質量マトリックスは次式で表される。ここで，(7.13)式の節点変位は(7.15)の$\left\{\bar{d}\right\}$に相当する。また，(7.14)式の質量マトリックスは要素の座標系で定義されたものであるから，ここではこれにバーを付けて表す。

$$\left[m^e\right]=[T]^T\left[\bar{m}^e\right][T] \tag{7.17}$$

ここに，$\left[m^e\right]$は全体座標系の質量マトリックス，$\left[\bar{m}^e\right]$は(7.14)式で定義される要素座標系の質量マトリックス，$[T]$は，(7.16)で定義される座標変換マトリックスである。

(7.17)式を計算すると次式となる。

$$\left[m^e\right]=\frac{\gamma A l}{g}\begin{bmatrix}
\frac{13}{35}\sin^2\alpha+\frac{1}{3}\cos^2\alpha & & & & & \text{Sym.} \\
-\frac{4}{105}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{13}{35}\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\sin^2\alpha & & & & \\
-\frac{11l}{210}\sin\alpha & \frac{11l}{210}\cos\alpha & \frac{l^2}{105} & & & \\
\frac{9}{70}\sin^2\alpha+\frac{1}{6}\cos^2\alpha & \frac{4}{105}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{13l}{420}\sin\alpha & \frac{13}{35}\sin^2\alpha+\frac{1}{3}\cos^2\alpha & & \\
\frac{4}{105}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{9}{70}\cos^2\alpha+\frac{1}{6}\sin^2\alpha & \frac{13l}{420}\cos\alpha & -\frac{4}{105}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{13}{35}\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\sin^2\alpha & \\
\frac{13l}{420}\sin\alpha & -\frac{13l}{420}\cos\alpha & -\frac{l^2}{140} & \frac{11l}{210}\sin\alpha & -\frac{11l}{210}\cos\alpha & \frac{l^2}{105}
\end{bmatrix} \tag{7.18}$$

なお，全体質量マトリックスの作成に関しては，剛性マトリックスの場合と全く同様である。