8　動的解析

8.1　固有振動解析

　有限要素法で表された運動方程式は次式で表される。

$$[M]\{\ddot{U}\}+[K]\{U\}=\{F\} \tag{8.1}$$

ここに，$[M]$は質量マトリックス，$[K]$は剛性マトリックス，$\{U\},\{\ddot{U}\}$は，節点変位ベクトルと加速度ベクトル，$\{F\}$は外力ベクトルである。ただし，ここでは，減衰がないものとしている。

　固有振動数を求める問題では，外力$\{F\}$を$\{0\}$とし，(8.1)式の解を次のようにおく。

$$\{U\}=\{\phi\}\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{8.2}$$

ここに，iは虚数単位，ωは円振動数，tは時間である。

　(8.2)式を(8.1)式に代入すると，次式が得られる。

$$\left(-\omega^2[M]+[K]\right)\{\phi\}=\{0\} \tag{8.3}$$

(8.3)式の同次方程式が$\{\delta\}=\{0\}$以外の解を持つためには，

$$\left|-\omega^2[M]+[K]\right|=0 \tag{8.4}$$

でなければならない。(8.4)式は，ω^2に関する高次方程式であり，マトリックスがN自由度の場合，$\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots,\omega_N^2$の$N$個の固有円振動数が求められる。また，各$\omega_i$に対応して，(8.3)を満足するような$\{\phi_i\}$が定まる。この$\{\phi_1\},\{\phi_2\},\cdots,\{\phi_N\}$を１次，２次，…，$N$次の固有ベクトルと呼ぶ。

8.2　モード重合法による応答解析

　(8.1)式の変位ベクトル$\{U\}$および外力ベクトル$\{F\}$を前節で得られる固有モードの線形和によって表す。すなわち，

$$\{U\}=\alpha_1\{\phi_1\}+\alpha_2\{\phi_2\}+\cdots+\alpha_N\{\phi_N\}=[\Phi]\{\alpha\} \tag{8.5}$$

(8.5)式を(8.1)式に代入すると，

$$[M][\Phi]\{\ddot{\alpha}\}+[K][\Phi]\{\alpha\}=\{F\} \tag{8.6}$$

(8.6)式の前から$[\Phi]^T$を掛けると，

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{\alpha}\}+[\Phi]^T[K][\Phi]\{\alpha\}=[\Phi]^T\{F\} \tag{8.7}$$

ここで，固有モードの直交性の性質を利用すると(8.7)式は次式となる。

$$\begin{bmatrix}\tilde{M}_1 & & & \\ & \tilde{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{M}_N\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\alpha}_1\\ \ddot{\alpha}_2\\ \vdots\\ \ddot{\alpha}_N\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{K}_1 & & & \\ & \tilde{K}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{K}_N\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_N\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\tilde{F}_1\\ \tilde{F}_2\\ \vdots\\ \tilde{F}_N\end{Bmatrix} \tag{8.8}$$

ここに,

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}_i &= \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} \\
\tilde{K}_i &= \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} \\
\tilde{F}_i &= \{\phi_i\}^T \{F\} \ (i = 1, \cdots, N)
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

(8.8)式は次のような N 個の非連成微分方程式となる。

$$
\begin{aligned}
&\tilde{M}_1 \ddot{\alpha}_1 + \tilde{K}_1 \alpha_1 = \tilde{F}_1 \\
&\tilde{M}_2 \ddot{\alpha}_2 + \tilde{K}_2 \alpha_2 = \tilde{F}_2 \\
&\vdots \\
&\tilde{M}_N \ddot{\alpha}_N + \tilde{K}_N \alpha_N = \tilde{F}_N
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

以上の個々の方程式の解は，次式のデュアメル積分(Duhamel's integral)の形で表される。

$$
\alpha_i(t) = \frac{1}{\tilde{M}_i \omega_i} \int_0^t \tilde{F}_i(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau \left(i = 1, 2, \cdots N \right) \tag{8.11}
$$

ここに，t は時間を表し，$\omega_i = \sqrt{\tilde{K}_i / \tilde{M}_i}$ である。

(8.11)式は，三角関数の加法定理によって次のように書き換えられる。

$$
\alpha_i(t) = A_i(t) \sin \omega_i t - B_i(t) \cos \omega_i t \tag{8.12}
$$

ここに,

$$
\begin{aligned}
A_i(t) &= \frac{1}{\tilde{M}_i \omega_i} \int_0^t \tilde{F}_i(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau \\
B_i(t) &= \frac{1}{\tilde{M}_i \omega_i} \int_0^t \tilde{F}_i(\tau) \sin \omega_i \tau d\tau
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

(8.13)式の積分は，$\tilde{F}_i(t)$ が周期関数であれば解析的に積分できるが，一般には，次のように数値積分する。すなわち，(8.13)式を時間に対する増分形で表現すると,

$$
\begin{aligned}
A_i(t) &= \frac{1}{\tilde{M}_i \omega_i} \left(\int_0^{t-\Delta t} \tilde{F}_i(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \tilde{F}_i(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau \right) = A_i(t - \Delta t) + \frac{1}{\tilde{M}_i \omega_i} \int_{t-\Delta t}^t \tilde{F}_i(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau \\
B_i(t) &= \frac{1}{\tilde{M}_i \omega_i} \left(\int_0^{t-\Delta t} \tilde{F}_i(\tau) \sin \omega_i \tau d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \tilde{F}_i(\tau) \sin \omega_i \tau d\tau \right) = B_i(t - \Delta t) + \frac{1}{\tilde{M}_i \omega_i} \int_{t-\Delta t}^t \tilde{F}_i(\tau) \sin \omega_i \tau d\tau
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

となる。このような表現にしておけば，毎回 0〜t の積分を行う必要はなく，第 2 項の積分を行って，前ステップの値に加えて行けばよい。また，この第 2 項の積分には，台形積分，またはガウス積分法を用いればよい。

8.3 直接数値積分法による応答解析

以上で示した方法は線形解析においては, 少ない計算時間で精度の良い解が得られる。しかし, 非線形解析では，剛性が変化するごとに固有値問題を解く必要があるため，一般には直接数値積分法の方がよく用いられる。直接数値積分法は，微小な時間間隔ごとに運動方程式を数値的に積分して解を定めてゆく方法であり，ここでは，その代表的な方法である加速度法について説明す

る。

加速度法（acceleration method）は，微小時間内の加速度の変化の仕方を仮定することにより数値積分を行う方法である。(8.1)式を例にこの方法による解法を示す。

$$[M]\{\ddot{U}\}+[K]\{U\}=\{F\} \tag{8.1}$$

時刻 t_n および時刻 $t_{n+1}(=t_n+\Delta t)$ の変位，速度，加速度を $\{U_n\},\{\dot{U}_n\},\{\ddot{U}_n\},\{F_n\}$ および $\{U_{n+1}\},\{\dot{U}_{n+1}\},\{\ddot{U}_{n+1}\},\{F_{n+1}\}$ とする。ここで，t_n における値は既知数，t_{n+1} の値は未知数である。また，$\{F_n\},\{F_{n+1}\}$ も既知数である。

いま，微小区間 Δt で，加速度が一定であると仮定して，次式のようにおく。

$$\{\ddot{U}(t)\}=\frac{1}{2}\left(\{\ddot{U}_n\}+\{\ddot{U}_{n+1}\}\right) \tag{8.15}$$

上式を積分することにより，速度，変位が次式のように得られる。

$$\begin{aligned}
\{\dot{U}(t)\}&=\{\dot{U}_n\}+\int_{t_n}^{t}\{\ddot{U}(t)\}dt=\{\dot{U}_n\}+\frac{1}{2}\left(\{\ddot{U}_n\}+\{\ddot{U}_{n+1}\}\right)(t-t_n)\\
\{U(t)\}&=\{U_n\}+\int_{t_n}^{t}\{\dot{U}(t)\}dt=\{U_n\}+\{\dot{U}_n\}(t-t_n)+\frac{1}{4}\left(\{\ddot{U}_n\}+\{\ddot{U}_{n+1}\}\right)(t-t_n)^2
\end{aligned} \tag{8.16}$$

(8.16)式より，t_{n+1} 時刻の速度と変位は次式となる。

$$\begin{aligned}
\{\dot{U}_{n+1}\}&=\{\dot{U}_n\}+\frac{1}{2}\left(\{\ddot{U}_n\}+\{\ddot{U}_{n+1}\}\right)\Delta t\\
\{U_{n+1}\}&=\{U_n\}+\{\dot{U}_n\}\Delta t+\frac{1}{4}\left(\{\ddot{U}_n\}+\{\ddot{U}_{n+1}\}\right)\Delta t^2
\end{aligned} \tag{8.17}$$

また，t_{n+1} 時刻でも(8.1)式が成り立つので，

$$\{\ddot{U}_{n+1}\}=-[M]^{-1}[K]\{U_{n+1}\}+[M]^{-1}\{F_{n+1}\} \tag{8.18}$$

(8.17)式，(8.18)式を解くと，次式のようになる。

$$\{\ddot{U}_{n+1}\}=\left[\bar{M}\right]^{-1}\{\bar{F}\} \tag{8.19}$$

ここに，

$$\begin{aligned}
\left[\bar{M}\right]&=[M]+\frac{\Delta t^2}{4}[K]\\
\{\bar{F}\}&=\{F_{n+1}\}-[K]\left(\{U_n\}+\Delta t\{\dot{U}_n\}+\frac{\Delta t^2}{4}\{\ddot{U}_n\}\right)
\end{aligned} \tag{8.20}$$

(8.19)式から求められる $\{\ddot{U}_{n+1}\}$ を(8.17)式に代入すれば $\{\dot{U}_{n+1}\},\{U_{n+1}\}$ が求められる。この過程を順次繰り返してゆけば時事刻々の応答を求めることができる。

次に，剛性マトリックス $[K]$ が時間によって変化する非線形問題を考える。この場合も Δt を十

分小さくとれば，時間 t_n の $\left[K\left(t_n\right)\right]$ と t_{n+1} の $\left[K\left(t_{n+1}\right)\right]$ はほぼ等しいと見なすことができる。したがって，(8.1)式より，

$$\begin{aligned}
&[M]\left\{\ddot{U}_n\right\}+\left[K\left(t_n\right)\right]\left\{U_n\right\}=\left\{F_n\right\} \\
&[M]\left\{\ddot{U}_{n+1}\right\}+\left[K\left(t_n\right)\right]\left\{U_{n+1}\right\}=\left\{F_{n+1}\right\}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

上２式の差を取ると，増分表現

$$[M]\left\{\Delta\ddot{U}\right\}+\left[K\left(t_n\right)\right]\left\{\Delta U\right\}=\left\{\Delta F\right\} \tag{8.22}$$

ここに，

$$\begin{aligned}
&\left\{\Delta U\right\}=\left\{U_{n+1}\right\}-\left\{U_n\right\} \\
&\left\{\Delta\ddot{U}\right\}=\left\{\ddot{U}_{n+1}\right\}-\left\{\ddot{U}_n\right\} \\
&\left\{\Delta F\right\}=\left\{F_{n+1}\right\}-\left\{F_n\right\}
\end{aligned} \tag{8.23}$$

(8.17)式も増分変位で表すと次式となる。

$$\begin{aligned}
&\left\{\Delta\dot{U}\right\}=\left\{\ddot{U}_n\right\}\Delta t+\frac{1}{2}\left\{\Delta\ddot{U}\right\}\Delta t \\
&\left\{\Delta U\right\}=\left\{\dot{U}_n\right\}\Delta t+\frac{1}{2}\left\{\ddot{U}_n\right\}\Delta t^2+\frac{1}{4}\left\{\Delta\ddot{U}\right\}\Delta t^2
\end{aligned} \tag{8.24}$$

また，(8.22)式から，

$$\left\{\Delta\ddot{U}\right\}=-[M]^{-1}\left[K\left(t_n\right)\right]\left\{\Delta U\right\}+[M]^{-1}\left\{\Delta F\right\} \tag{8.25}$$

(8.24)式と(8.25)式を変位増分 $\left\{\Delta U\right\}$ について解けば，

$$\left\{\Delta U\right\}=\left[\bar{K}\right]^{-1}\left\{\Delta\bar{F}\right\} \tag{8.26}$$

ここに，

$$\begin{aligned}
&\left[\bar{K}\right]=\left[K\left(t_n\right)\right]+\frac{4}{\Delta t^2}[M] \\
&\left\{\Delta\bar{F}\right\}=\left\{\Delta F\right\}+[M]\left(\frac{4}{\Delta t}\left\{\dot{U}_n\right\}+2\left\{\ddot{U}_n\right\}\right)
\end{aligned} \tag{8.27}$$

(8.26)式から $\left\{\Delta U\right\}$ が求まれば，(8.24)式から次式により $\left\{\Delta\dot{U}\right\},\left\{\Delta\ddot{U}\right\}$ が求められる。

$$\begin{aligned}
&\left\{\Delta\ddot{U}\right\}=\frac{4}{\Delta t^2}\left\{\Delta U\right\}-\frac{4}{\Delta t}\left\{\dot{U}_n\right\}-2\left\{\ddot{U}_n\right\} \\
&\left\{\Delta\dot{U}\right\}=\frac{2}{\Delta t}\left\{\Delta U\right\}-2\left\{\dot{U}_n\right\}
\end{aligned} \tag{8.28}$$

以上の計算を繰り返すことによって時事刻々の応答を求めることができる。