

板の面内変形解析に関する基礎理論

板の面内変形解析理論を示す。基礎理論の導出は、3次元弾性論から出発し、面内変形問題における近似理論を明確にする。

1. 3次元弾性論の基礎式

3次元弾性論の基礎式は以下のようになる。

(a) 応力の釣合式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

ただし、 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ は、物体力（既知量）を表す。

(b) 応力 - 歪み関係式

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.2)$$

ただし、 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]$ であり、 \mathbf{D} は 6×6 の弾性マトリックス。

(c) 歪み - 変位関係式（微小変形）

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.3)$$

(d) 境界条件

$$\text{自然境界（外力が規定される境界）：} \quad \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad (1.4)$$

$$\text{基本境界（変位が規定される境界）：} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (1.5)$$

ただし、 $\mathbf{t} = [t_x \ t_y \ t_z]$ 、 $\bar{\mathbf{t}} = [\bar{t}_x \ \bar{t}_y \ \bar{t}_z]$ 、 $\mathbf{u} = [u \ v \ w]$ 、 $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]$ であり、上付バーは、既知量を表す。

以上の基礎式は、物体内の任意の1点で成り立つ式である。このような厳密解を見つけることは、限られた理想的な問題にのみ可能であるため、一般には、以下のような積分方程式に変換することにより、近似解が求められる。

ここでは、有限要素法でよく用いられる仮想仕事式を示す。いま、物体が釣合っている状態から任意の微小な仮想変位 $\delta u, \delta v, \delta w$ が生じるものとする、次式が成り立つ。

(e) 積分方程式強形式

$$\begin{aligned}
 & - \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} \right) \delta v \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} \right) \delta w \right] d\Omega + \iint_{S_\sigma} \left[(t_x - \bar{t}_x) \delta u + (t_y - \bar{t}_y) \delta v + (t_z - \bar{t}_z) \delta w \right] dS = 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

ここに， Ω は物体の領域， S_σ は外力が与えられる境界（自然境界）を表す。ただし，仮想変位は，変位が与えられる境界（基本境界）における $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ の条件を常に満たすものとする。すなわち，境界 S_u 上で $\delta u = 0$ ， $\delta v = 0$ ， $\delta w = 0$ とする。

(1.6)式は，(1.3)式の平衡方程式と自然境界条件（ $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ on S_σ ）に等価であり，このような方程式を強形式と呼ぶ。

(f) 積分方程式弱形式（仮想仕事式）

(1.6)式を，ガウスの発散定理を用いて部分積分すると，次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) d\Omega \\
 & - \iiint_{\Omega} (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) d\Omega - \iint_{S_\sigma} (\bar{t}_x \delta u + \bar{t}_y \delta v + \bar{t}_z \delta w) dS = 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

(1.7)式は，(1.6)式に比較して，微分の階数が1つ下がっている。このような方程式を弱形式と呼ぶ。また，(1.7)式を内部の歪みエネルギーと外力のなす仕事量に分けて表すと，

$$\delta V = \delta W \tag{1.7a}$$

ここに，

$$\begin{aligned}
 \delta V &= \iiint_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) d\Omega \\
 \delta W &= \iiint_{\Omega} (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) d\Omega + \iint_{S_\sigma} (\bar{t}_x \delta u + \bar{t}_y \delta v + \bar{t}_z \delta w) dS
 \end{aligned} \tag{1.7b,c}$$

(1.7a)式を仮想仕事の原理と呼ぶ。なお，(1.7a)式の δV は，次式の歪みエネルギー V の第一変分となっている。

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) d\Omega \tag{1.8}$$

(1.7)式が，有限要素法（変位法）の基礎式となる。

2．有限要素法の定式化

有限要素法は，1章に示した微分方程式を解くための近似解法の一つである。有限要素法では，まず，対象とする物体を要素と呼ばれる小領域に分割する。そして，部分積分によって微分の階数を下げた弱形式の積分方程式（例えば仮想仕事式）を基礎式とし，この基礎式を，連続関数である要素内の変位を各要素の節点変位を未知数とする近似関数で近似することによって離散化する。このようにして得られた節点変位を未知数とする連立方程式を解くことによって解を得る。

以下では，3次元問題における有限要素法の定式化を示す。図 2.1 に示すように，有限要素法では，対象とする物体を要素（小領域）に分割し，その要素内の変位を，節点変位を

未知数とする近似関数で近似する。これを式で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{u}^e \\ v(x, y, z) &= \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{v}^e \\ w(x, y, z) &= \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{w}^e \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここに、 \mathbf{N} は要素内の変位を節点変位を用いて補間する補間関数で、形状関数と呼ばれる。 $\mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e, \mathbf{w}^e$ は、要素の各節点における変位を成分とするベクトルである。例えば、図 2.1 に示す要素の場合、次のようになる。

$$\mathbf{u}^e = [u_i \quad u_j \quad u_k], \quad \mathbf{v}^e = [v_i \quad v_j \quad v_k], \quad \mathbf{w}^e = [w_i \quad w_j \quad w_k] \quad (2.2)$$

(2.1)式をさらにまとめると、

$$\mathbf{d}_x = \mathbf{N}_d \mathbf{d}^e \quad (2.3)$$

ここに、

$$\mathbf{d}_x = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \\ \mathbf{w}^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & & \\ & \mathbf{N} & \\ & & \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

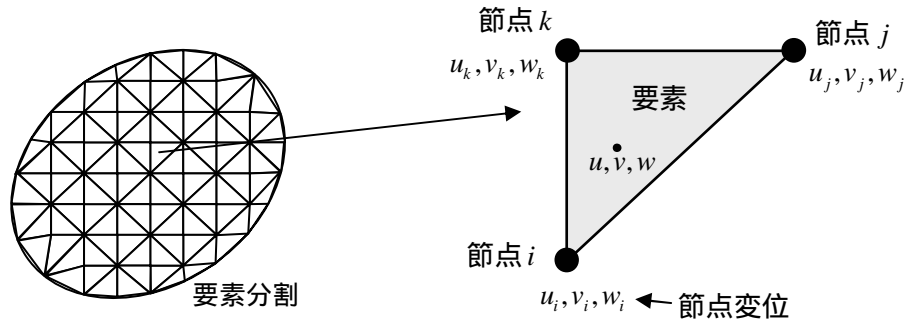


図 2.1 有限要素分割と要素および節点

(2.1)式を歪み - 変位関係式(1.3)に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{u}^e, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \mathbf{v}^e, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \mathbf{w}^e \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{v}^e + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \mathbf{u}^e, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \mathbf{w}^e + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \mathbf{v}^e, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \mathbf{u}^e + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{w}^e \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.5)式をまとめると、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (2.6)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial\mathbf{N}/\partial x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \partial\mathbf{N}/\partial y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \partial\mathbf{N}/\partial z \\ \partial\mathbf{N}/\partial y & \partial\mathbf{N}/\partial x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \partial\mathbf{N}/\partial z & \partial\mathbf{N}/\partial y \\ \partial\mathbf{N}/\partial z & \mathbf{0} & \partial\mathbf{N}/\partial x \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

(2.6)式を応力 - 歪み関係式(1.2)に代入すると,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBd}^e \quad (2.8)$$

このとき, (1.8)式の歪みエネルギーは, 一つの要素に関して次式となる。

$$V^e = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{eT} \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} d\Omega \mathbf{d}^e \quad (2.9)$$

ただし, Ω^e は要素の領域を表す。(2.9)式を節点変位に関して変分をとると,

$$\delta V^e = \delta \mathbf{d}^{eT} \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} d\Omega \mathbf{d}^e \quad (2.10)$$

一方, 要素境界に作用する外力の仮想仕事量は, (1.7c)式より次式となる。

$$\delta W^e = \iiint_{\Omega^e} \delta \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega + \iint_{S_\sigma^e} \delta \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{t}} dS = \delta \mathbf{d}^{eT} \left(\iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega + \iint_{S_\sigma^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{t}} dS \right) \quad (2.11)$$

ここに, $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{Z}]$, S_σ^e は要素の自然境界を表す。(1.7a)式の仮想仕事の原理に, (2.10), (2.11)式を代入すると,

$$\delta V^e - \delta W^e = \delta \mathbf{d}^{eT} \left(\iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} d\Omega \mathbf{d}^e - \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega - \iint_{S_\sigma^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{t}} dS \right) = 0 \quad (2.12)$$

$\delta \mathbf{d}^e$ の任意性により, 次式の要素に関する方程式が導かれる。

$$\mathbf{k}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \quad (2.13)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} d\Omega \\ \mathbf{f}^e &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega + \iint_{S_\sigma^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{t}} dS \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここに, \mathbf{k}^e は要素剛性マトリックス, \mathbf{f}^e は要素の等価節点力ベクトルである。

(2.13)式を節点変位の連続性を考慮して, 領域を分割したすべての要素について重ね合わせを行うと, 領域全体の剛性方程式

$$\mathbf{kd} = \mathbf{f} \quad (2.15)$$

が得られる。

(2.15)式を変位が規定される境界条件(基本境界条件)を考慮して解くと, すべての節点変位が求められる。そうすれば, (2.8)式により各要素の応力を求めることができる。

以上が有限要素法の定式化の流れである。板理論, 梁理論は, これを2次元化あるいは1次元化した理論で, 基本的には, 以上とまったく同様である。

3. 板の面内変形問題

3.1 3次元理論の2次元化

板の面内変形理論では、3次元理論で定義された変位を次式のように2次元化する。

$$u(x, y, z) = u_0(x, y), \quad v(x, y, z) = v_0(x, y), \quad w(x, y, z) = w_0(z) \quad (3.1)$$

ただし、 u_0, v_0 は板の面内の x, y 方向変位である。ここで、(3.1)式の左辺は、3次元物体の任意点 (x, y, z) の変位であるが、右辺では、これが x, y のみの関数になっている。ただし、(3.1)が成り立つためには、板の面内の変位が板厚方向に一定 (z に無関係) である必要がある。

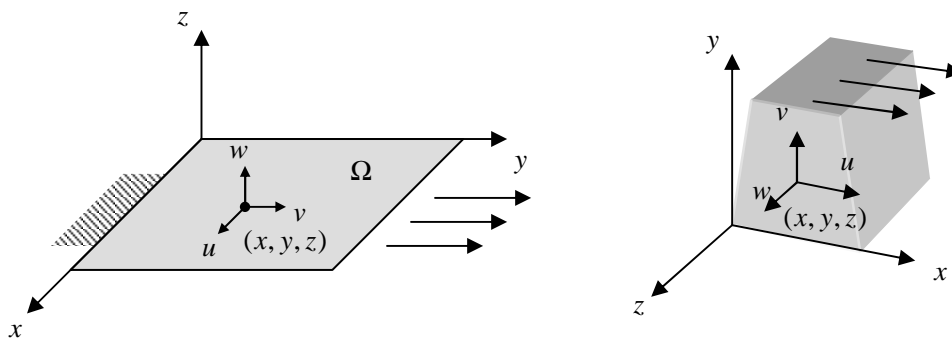


図 3.1 面内変形理論における近似

(3.1)式を歪み - 変位関係式(1.3)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

また、平面応力仮定 ($\sigma_z = 0$) を用いると、等方性板では、(1.2)式の応力 - ひずみ関係式は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

ただし、 ν はポアソン比である。

(3.3)式を(1.8)式に代入すると、歪みエネルギーは次式となる。

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (3.4)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}], \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

(3.4)式より，歪みエネルギーの変分は，次式となる。

$$\delta V = \iiint_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (3.6)$$

一方，(1.7c)式に(3.1)式を代入すると，外力仕事量は次式となる。

$$\delta W = \iint_{\Omega} (\bar{X} \delta u_0 + \bar{Y} \delta v_0) d\Omega + \iint_{S_c} (\bar{t}_x \delta u_0 + \bar{t}_y \delta v_0) dS \quad (3.7)$$

3.2 有限要素法による離散化

次に，以上の面内変形問題の基礎方程式を有限要素法によって解く方法を示す。板を分割する要素としては，図 3.2 に示す 4 節点要素を用いる。そして，要素内における(3.1)式の 2 次元化された変位 u_0, v_0 と回転角 θ_x, θ_y を，それぞれ次式の近似関数を用いて節点変位によって表す。

$$u_0(x, y) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}^e, \quad v_0(x, y) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{v}^e \quad (3.8)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \\ \mathbf{u}^{eT} &= \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\} \\ \mathbf{v}^{eT} &= \{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

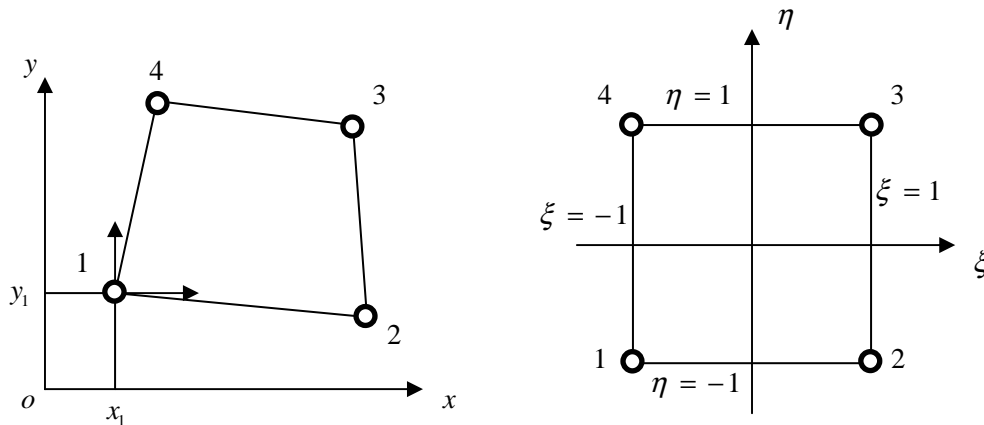


図 3.2 4 節点面内変形要素

ただし，形状関数 $N_i (i=1, \dots, 4)$ は，図 3.2 右に示す正規座標系 (ξ, η) の関数であり，具体的には，次式となる。

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (3.10)$$

また，実座標 (x, y) と正規化座標 (ξ, η) の関係を求めるために，実座標系における要素内の座標を(3.11)式の内挿関数と節点の座標値を用いて次のように表す。

$$x = \mathbf{N}\mathbf{x}, \quad y = \mathbf{N}\mathbf{y} \quad (3.11)$$

ここに，

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4], \quad \mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4] \quad (3.12)$$

(3.14)式より， x, y に関する微分は，次式を用いることによって， ξ, η の微分に変換できる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

ここに， \mathbf{J} はヤコビアンマトリックスであり， \mathbf{J} および \mathbf{J}^{-1} は次式となる。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} \\ -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ただし， $|\mathbf{J}|$ は \mathbf{J} の行列式であり，次式となる。

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x} \quad (3.15)$$

また，(3.13)式より，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1+\eta) & -\frac{1}{4}(1+\eta) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\xi) & -\frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.2)式に(3.8)式を代入すると，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{d}^e \quad (3.17)$$

(3.17)式を(3.6)式に代入すると，

$$\delta V^e = \delta \mathbf{d}^{eT} \left(\iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d}^e \quad (3.18)$$

ただし， Ω^e は要素の領域を表す。また，(3.8)式を(3.7)式に代入すると，

$$\begin{aligned}
 \delta W^e &= \iiint_{\Omega^e} (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \bar{X} + \delta \mathbf{v}^T \mathbf{N}^T \bar{Y}) d\Omega + \iint_{S_{\sigma^e}} (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \bar{t}_x + \delta \mathbf{v}^T \mathbf{N}^T \bar{t}_y) dS \\
 &= \delta \mathbf{d}^{eT} \left(\left\{ \begin{array}{l} \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{X} d\Omega \\ \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{Y} d\Omega \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \iint_{S_{\sigma^e}} \mathbf{N}^T \bar{t}_x dS \\ \iint_{S_{\sigma^e}} \mathbf{N}^T \bar{t}_y dS \end{array} \right\} \right)
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.18)式と(3.19)式より，

$$\mathbf{k}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \quad (3.20)$$

ただし，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}^e &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \\
 \mathbf{f}^e &= \left(\left\{ \begin{array}{l} \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{X} d\Omega \\ \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{Y} d\Omega \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \iint_{S_{\sigma^e}} \mathbf{N}^T \bar{t}_x dS \\ \iint_{S_{\sigma^e}} \mathbf{N}^T \bar{t}_y dS \end{array} \right\} \right)
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.3 要素剛性マトリックスの計算法

(3.24)式の \mathbf{k}^e は，次のように計算できる。

$$\mathbf{k}^e = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \iiint_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix}^T \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.22)$$

(3.22)式を板厚方向にあらかじめ積分し， x, y 方向の積分を ξ, η 方向の積分に変換すると，次のようになる。

$$\mathbf{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.23)$$

ただし，

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad D_{12} = \frac{\nu Et}{1-\nu^2}, \quad D_{33} = \frac{Et}{2(1+\nu)} \quad (3.24)$$

ここに， t は板厚を表す。また，(3.23)式の \mathbf{N} の x, y に関する微分は，(3.13)式より，次式から求められる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

以上で、(3.23)式の被積分項は計算できる。

なお、(3.23)の被積分項のマトリックス演算をあらかじめ行くと、次式のようにになる。

$$\mathbf{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_{11}^e & \bar{\mathbf{k}}_{12}^e \\ \bar{\mathbf{k}}_{12}^{eT} & \bar{\mathbf{k}}_{22}^e \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.26)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{11}^e &= \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} D_{11} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} D_{33} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \bar{\mathbf{k}}_{12}^e &= \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} D_{12} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} D_{33} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \bar{\mathbf{k}}_{22}^e &= \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} D_{22} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} D_{33} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.27)$$

最後に、(3.26)式の積分は、ガウスの2点積分を用いて行う。この場合、(3.26)式は、次のようになる。

$$\mathbf{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{k}}^e |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \bar{\mathbf{k}}^e |\mathbf{J}| w_p w_q \quad (3.28)$$

(3.28)式の2点積分点と重みは次の通りである。

$$\begin{aligned} \xi_1 = \eta_1 &= -0.57735026918963 \\ \xi_2 = \eta_2 &= 0.57735026918963 \\ w_1 = w_2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

以上で、(3.20)式が計算できるので、これをすべての要素について重ね合わせ、全体の剛性方程式を基本境界条件を考慮して解くことにより、各節点変位を求めることができる。

3.4 応力の計算法

節点変位が求まると、要素内の応力は次式から求められる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{DBd}^e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

また，ミーゼスの応力は， $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6\tau_{xy}^2}$ となる。

3.5 座屈問題の解析法

ここでは，詳しい理論の説明は省略して，面内変形における座屈荷重を解析する方法を示す。弾性座屈解析では，3.3 節に示した要素剛性マトリックスの他に，次式で示される初期応力マトリックスが必要となる。

$$\mathbf{k}^{(\sigma)e} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & \tau_{xy} \\ 0 & 0 & \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.31)$$

ただし， $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は，初期荷重が加わった場合の応力を表す。(3.31)式の被積分項をさらに計算すると，

$$\mathbf{k}^{(\sigma)e} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}^{(\sigma)e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}}^{(\sigma)e} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.32)$$

ここに，

$$\bar{\mathbf{k}}^{(\sigma)e} = \sigma_x \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \quad (3.33)$$

(3.32)式は，(3.28)式と同様に数値積分により計算できる。

(3.26)式と(3.32)式を節点の連続性を考慮して重ね合わせると，次式のような座屈問題の固有方程式が得られる。ただし，基本境界条件の自由度は除く。

$$\left(\mathbf{k} + \lambda \mathbf{k}^{(\sigma)} \right) \mathbf{d}^m = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

ここに， λ は荷重倍率で，初期荷重に荷重倍率 λ を掛けることによって座屈荷重が求められる。また， \mathbf{d}^m は，座屈モードベクトルを表す。

(3.34)式は，固有値問題の解法プログラムを適用することによって解くことができる。なお，以上の座屈解析では，まず，初期荷重を与えて $\mathbf{k}\mathbf{d} = \mathbf{f}$ の問題を解き，ここで得られた応力を用いて，(3.32)式を計算する。そして，(3.34)式を求めて，固有値解析により， λ 値を求める。