

ポイドスラブの解析に関する基礎理論

本研究では、ポイドスラブの解析手法として、ミンドリン理論にもとづく板曲げ解析法を用いる。また、基礎理論の導出は、3次元弾性論から出発し、板曲げ問題における近似理論を明確にする。

1. 3次元弾性論の基礎式

3次元弾性論の基礎式は以下ようになる。

(a) 応力の釣合式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

ただし、 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ は、物体力（既知量）を表す。

(b) 応力 - 歪み関係式

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\tag{1.2}$$

ただし、 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]$ であり、 \mathbf{D} は 6×6 の弾性マトリックス。

(c) 歪み - 変位関係式（微小変形）

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.3}$$

(d) 境界条件

$$\text{自然境界（外力が規定される境界）: } \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}\tag{1.4}$$

$$\text{基本境界（変位が規定される境界）: } \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}\tag{1.5}$$

ただし、 $\mathbf{t} = [t_x \ t_y \ t_z]$ 、 $\bar{\mathbf{t}} = [\bar{t}_x \ \bar{t}_y \ \bar{t}_z]$ 、 $\mathbf{u} = [u \ v \ w]$ 、 $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]$ であり、上付バーは、既知量を表す。

以上の基礎式は、物体内の任意の 1 点で成り立つ式である。このような厳密解を見つけることは、限られた理想的な問題にのみ可能であるため、一般には、以下のような積分方程式に変換することにより、近似解が求められる。

ここでは、有限要素法でよく用いられる仮想仕事式を示す。いま、物体が釣合っている状態から任意の微小な仮想変位 $\delta u, \delta v, \delta w$ が生じるものとする、次式が成り立つ。

(e) 積分方程式強形式

$$\begin{aligned}
 & - \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} \right) \delta v \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} \right) \delta w \right] d\Omega + \iint_{S_\sigma} \left[(t_x - \bar{t}_x) \delta u + (t_y - \bar{t}_y) \delta v + (t_z - \bar{t}_z) \delta w \right] dS = 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

ここに， Ω は物体の領域， S_σ は外力が与えられる境界（自然境界）を表す。ただし，仮想変位は，変位が与えられる境界（基本境界）における $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ の条件を常に満たすものとする。すなわち，境界 S_u 上で $\delta u = 0, \delta v = 0, \delta w = 0$ とする。

(1.6)式は，(1.3)式の平衡方程式と自然境界条件（ $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ on S_σ ）に等価であり，このような方程式を強形式と呼ぶ。

(f) 積分方程式弱形式（仮想仕事式）

(1.6)式を，ガウスの発散定理を用いて部分積分すると，次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) d\Omega \\
 & - \iiint_{\Omega} (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) d\Omega - \iint_{S_\sigma} (\bar{t}_x \delta u + \bar{t}_y \delta v + \bar{t}_z \delta w) dS = 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

(1.7)式は，(1.6)式に比較して，微分の階数が1つ下がっている。このような方程式を弱形式と呼ぶ。また，(1.7)式を内部の歪みエネルギーと外力のなす仕事量に分けて表すと，

$$\delta V = \delta W \tag{1.7a}$$

ここに，

$$\begin{aligned}
 \delta V &= \iiint_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) d\Omega \\
 \delta W &= \iiint_{\Omega} (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) d\Omega + \iint_{S_\sigma} (\bar{t}_x \delta u + \bar{t}_y \delta v + \bar{t}_z \delta w) dS
 \end{aligned} \tag{1.7b,c}$$

(1.7a)式を仮想仕事の原理と呼ぶ。なお，(1.7a)式の δV は，次式の歪みエネルギー V の第一変分となっている。

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) d\Omega \tag{1.8}$$

(1.7)式が，有限要素法（変位法）の基礎式となる。

2．有限要素法の定式化

有限要素法は，1章に示した微分方程式を解くための近似解法の一つである。有限要素法では，まず，対象とする物体を要素と呼ばれる小領域に分割する。そして，部分積分によって微分の階数を下げた弱形式の積分方程式（例えば仮想仕事式）を基礎式とし，この基礎式を，連続関数である要素内の変位を各要素の節点変位を未知数とする近似関数で近似することによって離散化する。このようにして得られた節点変位を未知数とする連立方程式を解くことによって解を得る。

以下では，3次元問題における有限要素法の定式化を示す。図 2.1 に示すように，有限要

素法では、対象とする物体を要素（小領域）に分割し、その要素内の変位を、節点変位を未知数とする近似関数で近似する。これを式で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{u}^e \\ v(x, y, z) &= \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{v}^e \\ w(x, y, z) &= \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{w}^e \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここに、 \mathbf{N} は要素内の変位を節点変位を用いて補間する補間関数で、形状関数と呼ばれる。 $\mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e, \mathbf{w}^e$ は、要素の各節点における変位を成分とするベクトルである。例えば、図 2.1 に示す要素の場合、次のようになる。

$$\mathbf{u}^e = [u_i \quad u_j \quad u_k], \quad \mathbf{v}^e = [v_i \quad v_j \quad v_k], \quad \mathbf{w}^e = [w_i \quad w_j \quad w_k] \quad (2.2)$$

(2.1)式をさらにまとめると、

$$\mathbf{d}_x = \mathbf{N}_d \mathbf{d}^e \quad (2.3)$$

ここに、

$$\mathbf{d}_x = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \\ \mathbf{w}^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & & \\ & \mathbf{N} & \\ & & \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

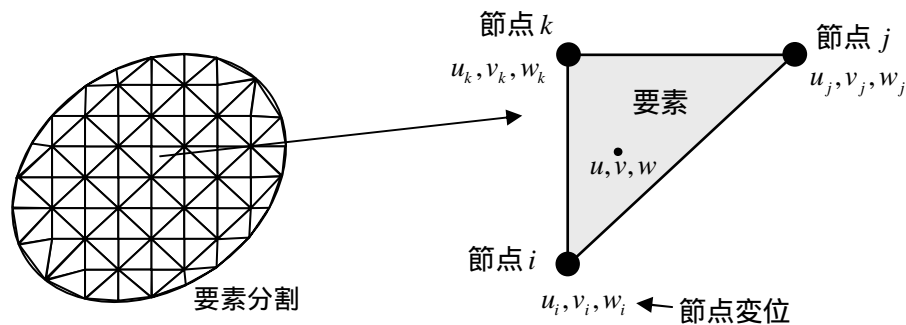


図 2.1 有限要素分割と要素および節点

(2.1)式を歪み - 変位関係式(1.3)に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{u}^e, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \mathbf{v}^e, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \mathbf{w}^e \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{v}^e + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \mathbf{u}^e, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \mathbf{w}^e + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \mathbf{v}^e, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \mathbf{u}^e + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{w}^e \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.5)式をまとめると、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (2.6)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial\mathbf{N}/\partial x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \partial\mathbf{N}/\partial y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \partial\mathbf{N}/\partial z \\ \partial\mathbf{N}/\partial y & \partial\mathbf{N}/\partial x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \partial\mathbf{N}/\partial z & \partial\mathbf{N}/\partial y \\ \partial\mathbf{N}/\partial z & \mathbf{0} & \partial\mathbf{N}/\partial x \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

(2.6)式を応力 - 歪み関係式(1.2)に代入すると,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBd}^e \quad (2.8)$$

このとき, (1.8)式の歪みエネルギーは, 一つの要素に関して次式となる。

$$V^e = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{eT} \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{DBd}^e d\Omega \quad (2.9)$$

ただし, Ω^e は要素の領域を表す。(2.9)式を節点変位に関して変分をとると,

$$\delta V^e = \delta \mathbf{d}^{eT} \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{DBd}^e d\Omega \quad (2.10)$$

一方, 要素境界に作用する外力の仮想仕事量は, (1.7c)式より次式となる。

$$\delta W^e = \iiint_{\Omega^e} \delta \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega + \iint_{S_\sigma^e} \delta \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{t}} dS = \delta \mathbf{d}^{eT} \left(\iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega + \iint_{S_\sigma^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{t}} dS \right) \quad (2.11)$$

ここに, $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{Z}]$, S_σ^e は要素の自然境界を表す。(1.7a)式の仮想仕事の原理に, (2.10), (2.11)式を代入すると,

$$\delta V^e - \delta W^e = \delta \mathbf{d}^{eT} \left(\iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{DBd}^e d\Omega - \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega - \iint_{S_\sigma^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{t}} dS \right) = 0 \quad (2.12)$$

$\delta \mathbf{d}^e$ の任意性により, 次式の要素に関する方程式が導かれる。

$$\mathbf{k}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \quad (2.13)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{DBd}^e d\Omega \\ \mathbf{f}^e &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega + \iint_{S_\sigma^e} \mathbf{N}_d^T \bar{\mathbf{t}} dS \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここに, \mathbf{k}^e は要素剛性マトリックス, \mathbf{f}^e は要素の等価節点力ベクトルである。

(2.13)式を節点変位の連続性を考慮して, 領域を分割したすべての要素について重ね合わせを行うと, 領域全体の剛性方程式

$$\mathbf{kd} = \mathbf{f} \quad (2.15)$$

が得られる。

(2.15)式を変位が規定される境界条件(基本境界条件)を考慮して解くと, すべての節点変位が求められる。そうすれば, (2.8)式により各要素の応力を求めることができる。

以上が有限要素法の定式化の流れである。板理論, 梁理論は, これを2次元化あるいは1次元化した理論で, 基本的には, 以上とまったく同様である。

3. 板曲げ問題

3.1 3次元理論の2次元化

板曲げ問題は、3次元理論を近似によって2次元化したものである。2次元化する方法には大きく2つの方法がある。1つは、キルヒホッフ・ラブの仮定に基づくものであり、この方法では、3次元の変位が次式のように2次元化される。

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}, \quad w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.1)$$

ただし、 w_0 は図 3.1 に示す中立面のたわみである。すなわち、(3.1)式の左辺は、3次元物体の任意点 (x, y, z) の変位であるが、右辺では、これが x, y のみの関数になっている。ただし、(3.1)が成り立つためには、いくつかの仮定が成立しなければならない。まず、第一の仮定は、板の断面内のたわみ w_0 は z に関係なく一定であるということである。すなわち変形前と変形後の板厚は変化しないことを前提としている。さらに、(3.1)式では、 x, y 方向の変位は、板のたわみによる回転角に比例することが仮定され、また、その回転角は、たわみ w_0 の変化率（傾き）に一致することが仮定されている。すなわち、変形前に中立面に垂直であった断面は、変形後も中立面に垂直であるという仮定がなされている。この仮定をキルヒホッフ・ラブの仮定と呼ぶ。

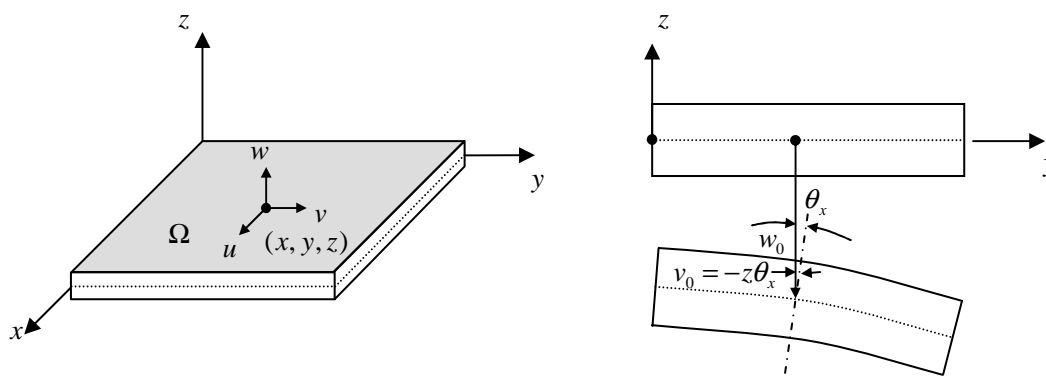


図 3.1 板の理論における近似

キルヒホッフ・ラブの仮定は、板が十分薄い場合に成立するもので、板が厚くなると実際の現象を表せない。そこで、たわみによる回転角をたわみの変化率とは独立に定義する次のような近似が提案された。

$$u(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \quad v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y), \quad w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.2)$$

ただし、 θ_x, θ_y は x, y 軸まわりの回転角を表す（右ねじ方向が正）。そして、このような仮定にもとづく板曲げ理論をミンドリן・ライスナー理論と呼んでいる。

(3.1)式にもとづく定式化では、未知数がたわみ w_0 のみであるため、チモシェンコらによって、多くの板曲げ問題の理論解が導出されている。また、有限要素法による定式化にお

いても、高次の変位関数を仮定できるため、解析精度の良い要素が開発されている。しかしながら、(3.1)式に基づく基礎式は、微分の階数が高くなり、要素間の連続性を満足する変位関数を見つけることが困難になる。したがって、要素間の不連続性を許容する非適合要素が多く提案されているが、この非適合性が問題を生じること指摘されている。

一方、(3.2)式に基づく有限要素法においても、薄板の解析において、非常に硬い変位となるシアロック現象等の問題が指摘されているが、通常の問題では、低減積分法等で回避できることと、有限要素法の定式化が容易になるという理由から、本研究では、この理論にもとづく方法を採用する。

(3.2)式を歪み - 変位関係式(1.3)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

また、平面応力仮定 ($\sigma_z = 0$) を用いると、等方性板では、(1.2)式の応力ひずみ関係式は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

ただし、 ν はポアソン比である。ここで、(3.4)式を平面内の応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) と面外のせん断応力 (τ_{yz}, τ_{zx}) に分離して表しておく。すなわち、

$$\boldsymbol{\sigma}^b = \mathbf{D}^b \boldsymbol{\varepsilon}^b, \quad \boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{D}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s \tag{3.5}$$

ここに、

$$\mathbf{D}^b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^b &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}] \\ \boldsymbol{\sigma}^b &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{D}^s = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^s &= [\gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}] \\ \boldsymbol{\sigma}^s &= [\tau_{yz} \quad \tau_{zx}] \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.3)、(3.5)式を(1.8)式に代入すると、歪みエネルギーは次式となる。

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^{bT} \mathbf{D}^b \boldsymbol{\epsilon}^b d\Omega + \frac{1}{2} \kappa \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^{sT} \mathbf{D}^s \boldsymbol{\epsilon}^s d\Omega \quad (3.8)$$

ただし， κ は面外せん断応力を板厚方向に一定と仮定したことを補正する係数で，Reissnerによれば $\kappa=5/6$ ，Mindlinによれば $\kappa=\pi^2/12$ が用いられる。

(3.8)式より，歪みエネルギーの変分は，次式となる。

$$\delta V = \iiint_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^{bT} \mathbf{D}^b \boldsymbol{\epsilon}^b d\Omega + \kappa \iiint_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^{sT} \mathbf{D}^s \boldsymbol{\epsilon}^s d\Omega \quad (3.9)$$

一方，(1.7c)式に(3.2)式を代入すると，外力仕事量は次式となる。

$$\delta W = \iiint_{\Omega} (z\bar{X}\delta\theta_y - z\bar{Y}\delta\theta_x + \bar{Z}\delta w_0) d\Omega + \iint_{S_\sigma} (z\bar{t}_x\delta\theta_y - z\bar{t}_y\delta\theta_x + \bar{t}_z\delta w_0) dS \quad (3.10)$$

3.2 有限要素法による離散化

次に，以上の板曲げ問題の基礎方程式を有限要素法によって解く方法を示す。板を分割する要素としては，図 3.2 に示す 4 節点要素を用いる。そして，要素内における(3.2)式の 2 次元化されたたわみ w_0 と回転角 θ_x, θ_y を，それぞれ次式の近似関数を用いて節点変位によって表す。

$$w_0(x, y) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{w}, \quad \theta_x(x, y) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \boldsymbol{\theta}_x, \quad \theta_y(x, y) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \boldsymbol{\theta}_y \quad (3.11)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \\ \mathbf{w}^T &= \{w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4\} \\ \boldsymbol{\theta}_x^T &= \{\theta_{x1} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{x3} \quad \theta_{x4}\} \\ \boldsymbol{\theta}_y^T &= \{\theta_{y1} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{y3} \quad \theta_{y4}\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

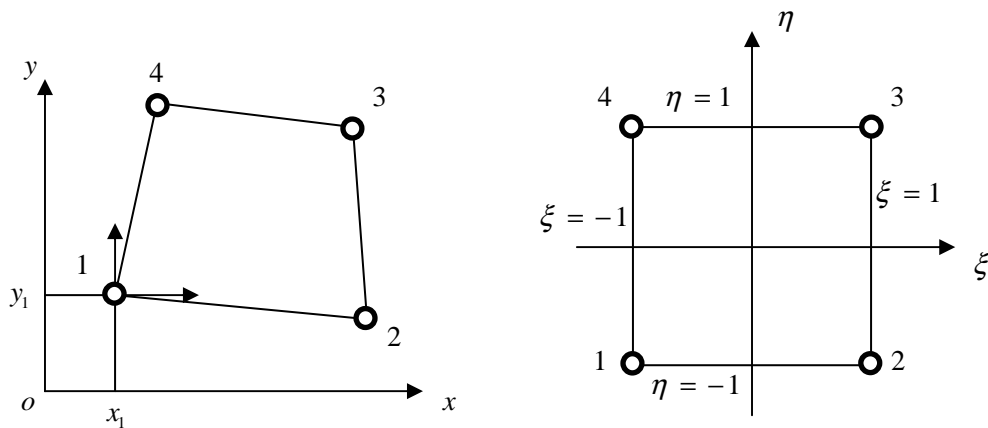


図 3.2 4 節点板曲げ要素

ただし，形状関数 $N_i (i=1, \dots, 4)$ は，図 3.2 右に示す正規座標系 (ξ, η) の関数であり，具体的

には，次式となる。

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (3.13)$$

また，実座標 (x, y) と正規化座標 (ξ, η) の関係を求めるために，実座標系における要素内の座標を(3.11)式の内挿関数と節点の座標値を用いて次のように表す。

$$x = \mathbf{N}\mathbf{x}, \quad y = \mathbf{N}\mathbf{y} \quad (3.14)$$

ここに，

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4], \quad \mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4] \quad (3.15)$$

(3.14)式より， x, y に関する微分は，次式を用いることによって， ξ, η の微分に変換できる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

ここに， \mathbf{J} はヤコビアンマトリックスであり， \mathbf{J} および \mathbf{J}^{-1} は次式となる。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} \\ -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ただし， $|\mathbf{J}|$ は \mathbf{J} の行列式であり，次式となる。

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x} \quad (3.18)$$

また，(3.13)式より，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1+\eta) & -\frac{1}{4}(1+\eta) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\xi) & -\frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.3)式に(3.11)式を代入すると，

$$\boldsymbol{\varepsilon}^b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{z} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^b \mathbf{d}^e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^s \mathbf{d}^e \quad (3.20)$$

(3.20)式を(3.9)式に代入すると，

$$\delta V^e = \delta \mathbf{d}^{eT} \left(\iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{D}^b \mathbf{B}^b d\Omega + \kappa \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^{sT} \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s d\Omega \right) \mathbf{d}^e \quad (3.21)$$

ただし, Ω^e は要素の領域を表す。また, (3.11)式を(3.10)式に代入すると,

$$\begin{aligned} \delta W^e &= \iiint_{\Omega^e} (\delta \boldsymbol{\theta}_y^T \mathbf{N}^T z \bar{X} - \delta \boldsymbol{\theta}_x^T \mathbf{N}^T z \bar{Y} + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T \bar{Z}) d\Omega \\ &+ \iint_{S_{\sigma^e}} (\delta \boldsymbol{\theta}_y^T \mathbf{N}^T z \bar{t}_x - \delta \boldsymbol{\theta}_x^T \mathbf{N}^T z \bar{t}_y + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T \bar{t}_z) dS \\ &= \delta \mathbf{d}^{eT} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{Z} d\Omega \\ - \iiint_{\Omega^e} z \mathbf{N}^T \bar{Y} d\Omega \\ \iiint_{\Omega^e} z \mathbf{N}^T \bar{X} d\Omega \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \iint_{S_{\sigma^e}} \mathbf{N}^T \bar{t}_z dS \\ - \iint_{S_{\sigma^e}} z \mathbf{N}^T \bar{t}_y dS \\ \iint_{S_{\sigma^e}} z \mathbf{N}^T \bar{t}_x dS \end{array} \right) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

(3.21)式と(3.22)式より,

$$\mathbf{k}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \quad (3.23)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{D}^b \mathbf{B}^b d\Omega + \kappa \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^{sT} \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s d\Omega = \mathbf{k}^{be} + \mathbf{k}^{se} \\ \mathbf{f}^e &= \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{Z} d\Omega \\ - \iiint_{\Omega^e} z \mathbf{N}^T \bar{Y} d\Omega \\ \iiint_{\Omega^e} z \mathbf{N}^T \bar{X} d\Omega \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \iint_{S_{\sigma^e}} \mathbf{N}^T \bar{t}_z dS \\ - \iint_{S_{\sigma^e}} z \mathbf{N}^T \bar{t}_y dS \\ \iint_{S_{\sigma^e}} z \mathbf{N}^T \bar{t}_x dS \end{array} \right) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.3 要素剛性マトリックスの計算法

(3.24)式の \mathbf{k}^{be} , \mathbf{k}^{se} は, 次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{be} &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{D}^b \mathbf{B}^b d\Omega \\ &= \iiint_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix}^T \frac{z^2 E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega \end{aligned} \quad (3.25a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{se} &= \kappa \iiint_{\Omega^e} \mathbf{B}^{sT} \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s d\Omega \\ &= \iiint_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T \frac{\kappa E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} d\Omega \end{aligned} \quad (3.25b)$$

(3.25a), (3.25b)式を板厚方向にあらかじめ積分し, x, y 方向の積分を ξ, η 方向の積分に変換すると, 次のようになる。

$$\mathbf{k}^{be} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11}^b & D_{12}^b & 0 \\ D_{12}^b & D_{22}^b & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.26a,b)$$

$$\mathbf{k}^{se} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11}^s & 0 \\ 0 & D_{22}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

ここに,

$$\begin{bmatrix} D_{11}^b & D_{12}^b & 0 \\ D_{12}^b & D_{22}^b & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^b \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{pmatrix} z^2 E & 1 & \nu & 0 \\ 1-\nu^2 & \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} dz \quad (3.27a,b)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11}^s & 0 \\ 0 & D_{22}^s \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{pmatrix} \kappa E & 1 & 0 \\ 2(1+\nu) & 0 & 1 \end{pmatrix} dz$$

ただし, t は, 板厚を表す。

ポイドスラブの場合, 図 3.3 に示すように直交異方性となり, ヤング係数が板厚方向で変化する。

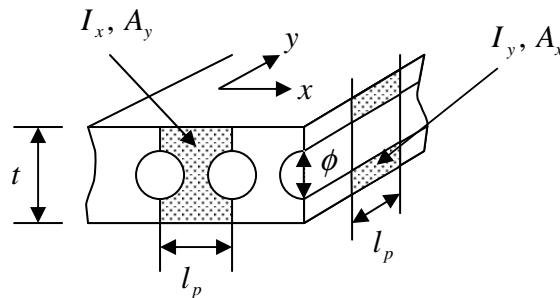


図 3.3 ポイドスラブの断面

この場合, S_x, S_y 区間 (長さ) の断面二次モーメント I_x, I_y , 断面積を A_x, A_y とすると, (3.27)式の弾性マトリックスの成分は, 次のように表される。

$$D_{11}^b = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{I_y}{l_p}, \quad D_{22}^b = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{I_x}{l_p}, \quad D_{12}^b = \nu \sqrt{D_{11}^b D_{12}^b}, \quad D_{33}^b = \frac{1-\nu}{2} \sqrt{D_{11}^b D_{12}^b} \quad (3.28a)$$

$$D_{11}^s = \frac{\kappa E}{2(1+\nu)} \frac{A_y}{l_p}, \quad D_{22}^s = \frac{\kappa E}{2(1+\nu)} \frac{A_x}{l_p}$$

ただし, 中空管の直径を ϕ とすると, I_x, I_y, A_x, A_y は次式から計算される。

$$I_x = \frac{l_p t^3}{12} - \frac{\pi \phi^4}{64}, \quad I_y = \frac{l_p}{12} (t^3 - \phi^3), \quad A_x = l_p (t - \phi), \quad A_y = l_p t - \frac{\pi \phi^2}{4} \quad (3.28b)$$

また，等方性板として解析する場合は，次のようになる。

$$D_{11}^b = D_{22}^b = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t^3}{12}, \quad D_{12}^b = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{t^3}{12}, \quad D_{33}^b = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{t^3}{12}, \quad D_{11}^s = D_{22}^s = \frac{\kappa E t}{2(1+\nu)} \quad (3.29)$$

ただし，板厚 t は，次式から計算される。

$$\frac{I_x + I_y}{2l_p} = \frac{t^3}{12} \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{6(I_x + I_y)}{l_p}} \quad (3.30)$$

また，(3.26)式の \mathbf{N} の x, y に関する微分は，(3.16)式より，次式から求められる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

以上で，(3.26)式の被積分項は計算できる。

なお，(3.26)の被積分項のマトリックス演算をあらかじめ行うと，次式のようになる。

$$\mathbf{k}^{be} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}}_{22}^{be} & \bar{\mathbf{k}}_{23}^{be} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}}_{23}^{beT} & \bar{\mathbf{k}}_{33}^{be} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad \mathbf{k}^{se} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_{11}^{se} & \bar{\mathbf{k}}_{12}^{se} & \bar{\mathbf{k}}_{13}^{se} \\ \bar{\mathbf{k}}_{12}^{seT} & \bar{\mathbf{k}}_{22}^{se} & \bar{\mathbf{k}}_{23}^{se} \\ \bar{\mathbf{k}}_{13}^{seT} & \bar{\mathbf{k}}_{23}^{seT} & \bar{\mathbf{k}}_{33}^{se} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.32a,b)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{22}^{be} &= D_{22}^b \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + D_{33}^b \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \bar{\mathbf{k}}_{23}^{be} &= -D_{12}^b \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} - D_{33}^b \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.33a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{33}^{be} &= D_{11}^b \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + D_{33}^b \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \bar{\mathbf{k}}_{11}^{se} &= D_{11}^s \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + D_{22}^s \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \bar{\mathbf{k}}_{12}^{se} &= -D_{11}^s \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right)^T \mathbf{N}, \quad \bar{\mathbf{k}}_{13}^{se} = D_{22}^s \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)^T \mathbf{N} \end{aligned} \quad (3.33b)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{22}^{se} = D_{11}^s \mathbf{N}^T \mathbf{N}, \quad \bar{\mathbf{k}}_{23}^{se} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{k}}_{33}^{se} = D_{22}^s \mathbf{N}^T \mathbf{N}$$

最後に，(3.32)式の積分法について説明する。ミンドリン・ライスナーの理論にもとづく要素では，板厚が薄くなるとシアロック現象が生じる。これを避けるため，面外せん断変形に関する剛性マトリックスは低減積分を行う。

まず，面内の歪みに関する剛性は，通常の数値積分を行う。数値積分法として，ガウス

の 2 点積分を用いると，(3.32a)式は，次のようになる。

$$\mathbf{k}^{be} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{k}}^{be} |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \bar{\mathbf{k}}^{be} |\mathbf{J}| w_p w_q \quad (3.34)$$

次に，面外せん断変形成分に関しては低減積分を行うが，単に 1 点積分で低減すると 0 エネルギーモードの影響で解が不安定になる場合があるため，ここでは， γ_{yz} に関する積分と γ_{zx} に関する積分を分離し， γ_{yz} に関する積分に関しては， y 方向に 1 点積分， x 方向に 2 点積分し， γ_{zx} に関する積分に関しては， x 方向に 1 点積分， y 方向に 2 点積分する。具体的には，まず， \mathbf{k}^s を y 方向のせん断剛性成分と， x 方向のせん断剛性成分に分離する。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{se} &= \mathbf{k}^{sye} + \mathbf{k}^{sxe} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.35)$$

そして，次式のような低減積分を行う。

$$\mathbf{k}^{se} = t \sum_{p=1}^1 \sum_{q=1}^2 \bar{\mathbf{k}}^{sxe}(\xi_p, \eta_q) |\mathbf{J}| w_p w_q + t \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^1 \bar{\mathbf{k}}^{sye}(\xi_p, \eta_q) |\mathbf{J}| w_p w_q \quad (3.36)$$

なお，(3.35)式の被積分項は，(3.33b)を D_{11}^s に関する項と D_{22}^s に関する項に分ければよい。

(3.34)，(3.36)式の 2 点積分点と重みは次の通りである。

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1 = -0.57735026918963 \\ \xi_2 &= \eta_2 = 0.57735026918963 \\ w_1 &= w_2 = 1 \end{aligned} \quad (3.37)$$

また，1 点積分の積分点と重みは， $\xi_1 = \eta_1 = 0$ ， $w_1 = 2$ である。

以上で，(3.23)式が計算できるので，これをすべての要素について重ね合わせ，全体の剛性方程式を基本境界条件を考慮して解くことにより，各節点変位を求めることができる。

3.4 応力の計算法

節点変位が求まると，要素内の応力は次式から求められる。

$$\boldsymbol{\sigma}^b = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^b \mathbf{B}^b \mathbf{d}^e = \frac{zE}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s \mathbf{d}^e = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} & -N & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix}$$

また，断面に作用する断面力は次式から求められる。

$$\begin{Bmatrix} M_y \\ M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} z \boldsymbol{\sigma}^b dz = \begin{bmatrix} D_{11}^b & D_{12}^b & 0 \\ D_{12}^b & D_{22}^b & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{11}^b \frac{\partial N}{\partial x} \boldsymbol{\theta}_y - D_{12}^b \frac{\partial N}{\partial y} \boldsymbol{\theta}_x \\ D_{12}^b \frac{\partial N}{\partial x} \boldsymbol{\theta}_y - D_{22}^b \frac{\partial N}{\partial y} \boldsymbol{\theta}_x \\ D_{33}^b \left(-\frac{\partial N}{\partial x} \boldsymbol{\theta}_x + \frac{\partial N}{\partial y} \boldsymbol{\theta}_y \right) \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \kappa \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\sigma}^s dz = \begin{bmatrix} D_{11}^s & 0 \\ 0 & D_{22}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} & -N & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{11}^s \left(\frac{\partial N}{\partial y} \mathbf{w} - N \boldsymbol{\theta}_x \right) \\ D_{22}^s \left(\frac{\partial N}{\partial x} \mathbf{w} + N \boldsymbol{\theta}_y \right) \end{Bmatrix}$$

3.5 境界条件の緩和

スラブの境界条件は，単純支持または固定支持とされる場合が多いが，実際は，その中間的支持条件である場合が多い。そこで，ここでは，固定端との間にペナルティーバネを仮定し，固定支持条件を緩和する方法を示す。

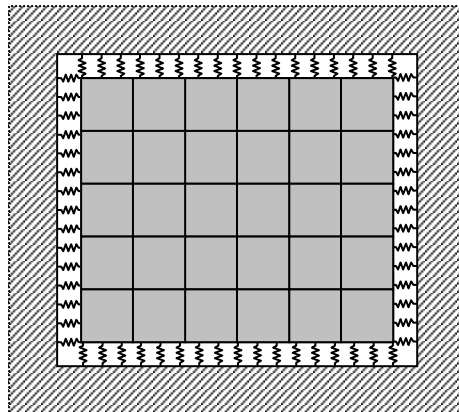


図 3.4 固定条件緩和バネを有するスラブの要素分割

図 3.4 に示すように、固定端とスラブを分割した要素の間にペナルティーバネを設けた場合を考える。このような場合は、境界バネの剛性マトリックスを求めて、これを全体マトリックスに重ね合わせればよい。しかし、この場合、境界辺の情報等が新たな入力データとして発生するため、ここでは、境界に接する要素の要素剛性マトリックスに、このペナルティーバネの剛性を加える方法を採用する。後者の場合、境界に接する要素は、境界条件から自動的に判別できるため、新たな入力データを加えずに、処理を行える。

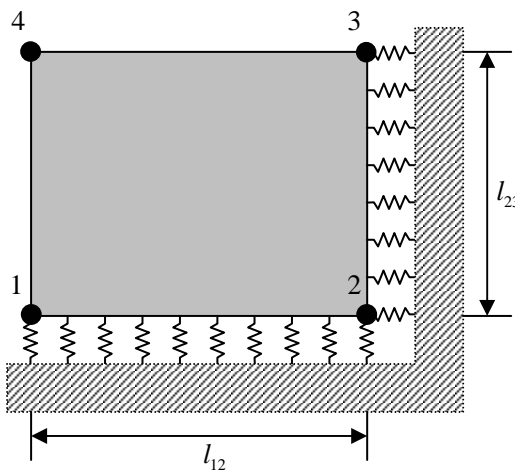


図 3.5 固定条件緩和バネを有する要素

図 3.5 に示すように、要素周辺に固定緩和バネを有する要素を考える。この場合、固定緩和バネに蓄えられる歪みエネルギーは次式で定義される。

$$V^{sp} = \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^c \left[\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] dcdz \quad (3.40)$$

ここに、 dc は境界線上の線素、 $l_c = l_{12} + l_{23}$ 、 p_x, p_y, p_z は、 x, y, z 方向のバネ係数である。(3.40) 式に(3.2)式を代入すると、

$$\begin{aligned} V^{sp} &= \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^c \left[\begin{pmatrix} z\theta_y \\ -z\theta_x \\ w_0 \end{pmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} z\theta_y \\ -z\theta_x \\ w_0 \end{pmatrix} \right] dcdz \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-t/2}^{t/2} \int_0^c z^2 p_x \theta_y^2 dcdz + \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^c z^2 p_y \theta_x^2 dcdz + \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^c p_z w_0^2 dcdz \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

(3.41)式に(3.11)式を代入すると,

$$\begin{aligned}
 V^{sp} &= \frac{1}{2} \left(\frac{p_x t^3}{12} \boldsymbol{\theta}_y^T \int_0^t \mathbf{N}^T \mathbf{N} dc \boldsymbol{\theta}_y + \frac{p_y t^3}{12} \boldsymbol{\theta}_x^T \int_0^t \mathbf{N}^T \mathbf{N} dc \boldsymbol{\theta}_x + p_z t \mathbf{w}_0^T \int_0^t \mathbf{N}^T \mathbf{N} dc \cdot \mathbf{w}_0 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_z t \int_0^t \mathbf{N}^T \mathbf{N} dc & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_y t^3}{12} \int_0^t \mathbf{N}^T \mathbf{N} dc & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_x t^3}{12} \int_0^t \mathbf{N}^T \mathbf{N} dc \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{k}^{spe} \mathbf{d}^e \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

ここで, \mathbf{k}^{spe} が, この要素の固定緩和バネの剛性マトリックスとなる。なお, (3.42)式中の $\int_0^t \mathbf{N}^T \mathbf{N} dc$ の計算は, 辺 12 では, $\eta = -1$ として, ξ に関して $-1 \sim 1$ まで積分を行えばよいし, 辺 23 では, $\xi = 1$ として, η に関して $-1 \sim 1$ まで積分を行えばよい。辺 34, 41 にバネがある場合も同様である。ただし, ヤコビアン等の計算等は, (3.17)式に示すものと同じである。

なお, p_x, p_y, p_z の大きさは, ある程度大きくすれば固定条件の解と一致するはずである。オーダー的には, ヤング係数の倍率として, $p_x = E\bar{p}_x, p_y = E\bar{p}_y, p_z = E\bar{p}_z$ として与えると良い。