計算力学手法を用いたコンセプトデザインツールの開発

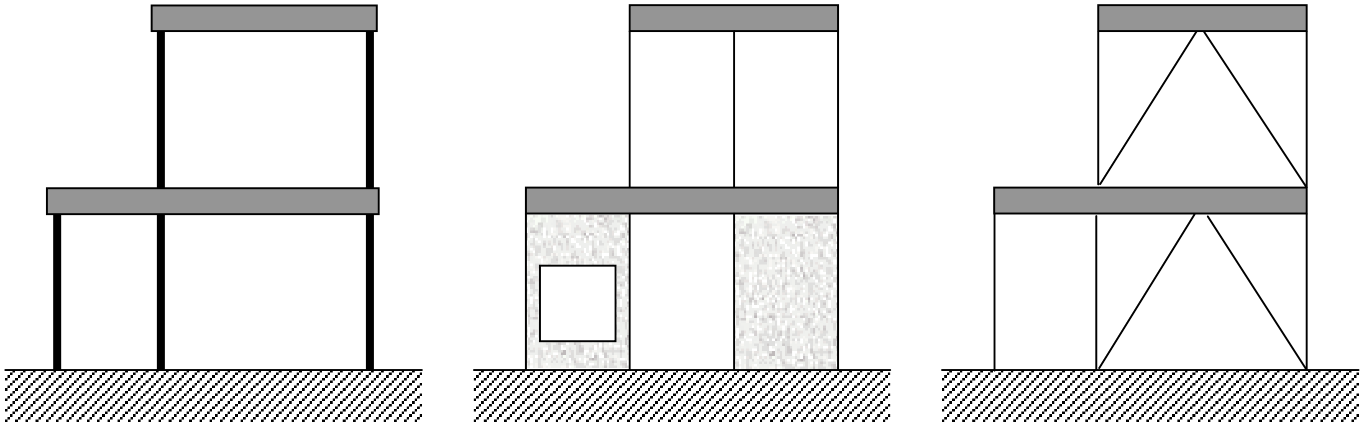
東京大学

藤井　大地

設計の段階

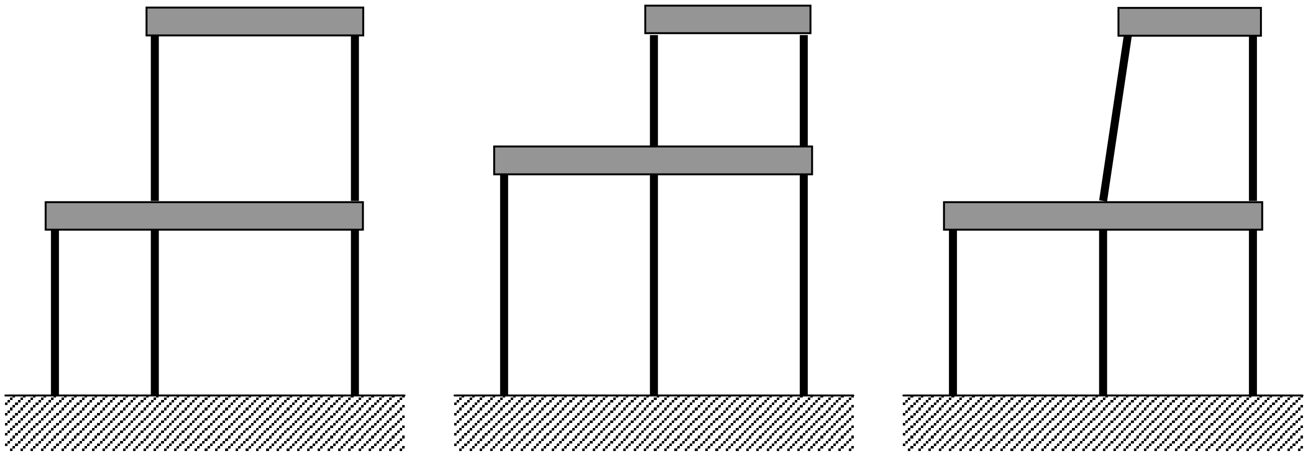
- 位相最適化
  - 柱や梁の本数を決め，これらを空間的にどのように配置するかを設計する。
- 形状最適化
  - スパン長や階高などの全体形状を設計する。
- 断面の最適化
  - 断面の大きさや鉄筋の配置を設計する。
- 材料の最適化
  - 材料の内部構造を設計する。

位相最適化



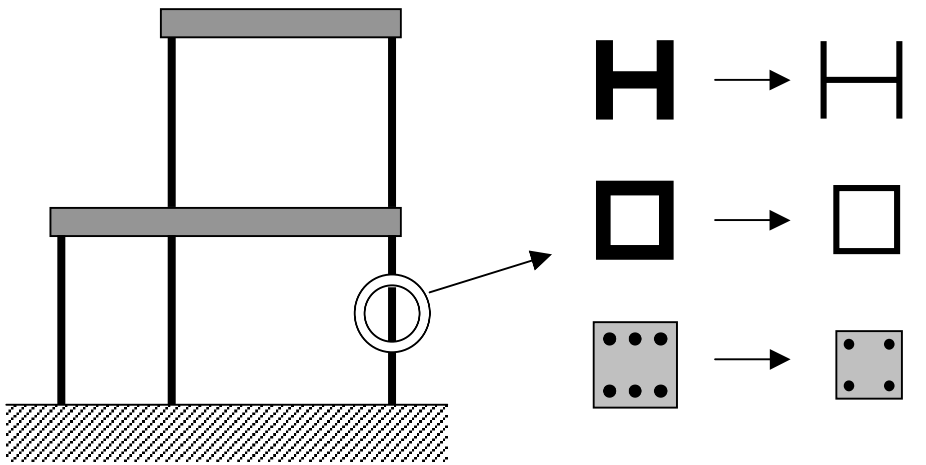
Topology optimization

形状最適化



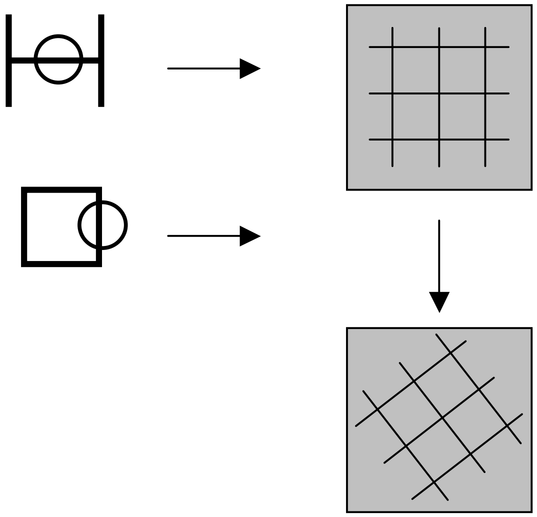
Shape optimization

断面の最適化



Sizing

材料の最適化



Material optimization

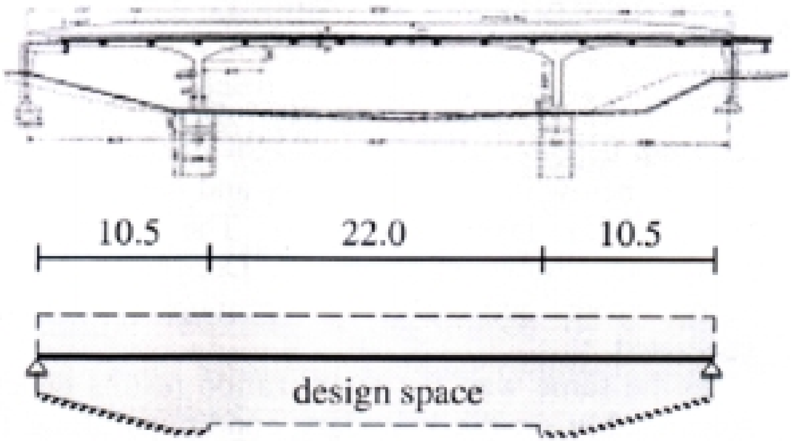
建築設計の現状

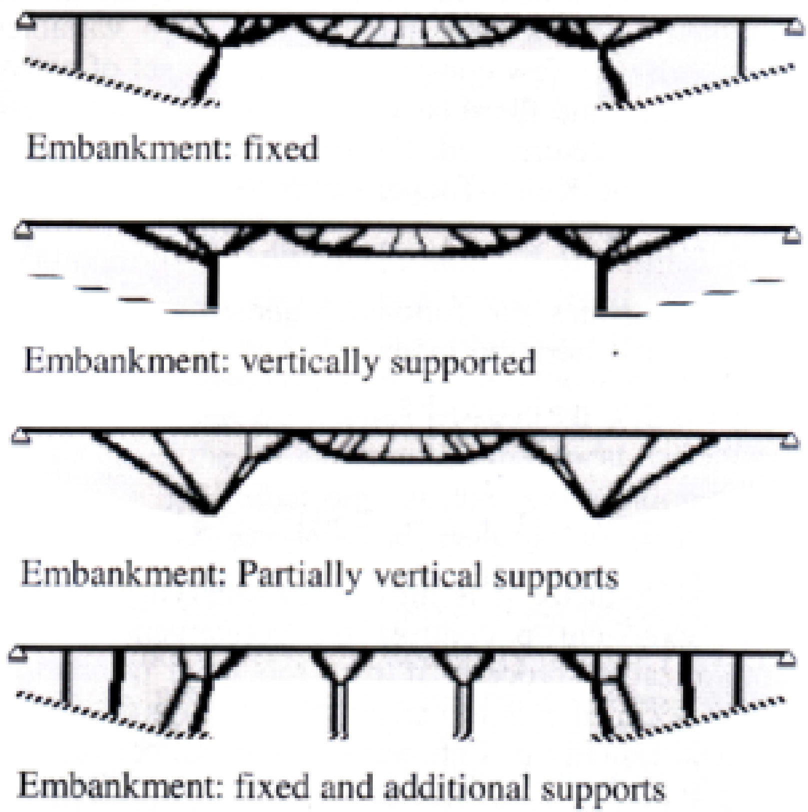
- 位相設計，形状設計は主に計画系の設計者が行い，位相と形状の定まった構造物の断面設計を構造設計者が行う。
- 通常構造物の構造設計は，汎用プログラムで行えるようになり，構造設計の魅力が失われつつある。

Rammらの目的

- E. Rammらは，構造最適化手法を用いて，設計の第一段階である構造物のコンセプトデザインを行おうとしている。

位相最適化手法を用いた橋の設計（E.Ramm）





研究のモチベーション

- 建築においてもデザインの分野に構造最適化手法を使えないだろうか。
- 大学教育において，構造力学，計算力学とデザインを融合させた構造デザイン学というような分野を作れないだろうか。

  - 建築計画の分野においてもデザインを直接教えることはなされていない。

⇒ デザインには個人の才能というものが不可欠となる。

研究内容

- コンセプトデザインツールの開発
  - 骨組構造の位相最適化ツール（Otto）
  - ２次元連続体の位相最適化ツール（Isler）
  - ３次元連続体の位相最適化ツール（Gaudi）
  - 弾性変形機構の位相最適化ツール
  - 材料の内部構造の位相最適化ツール

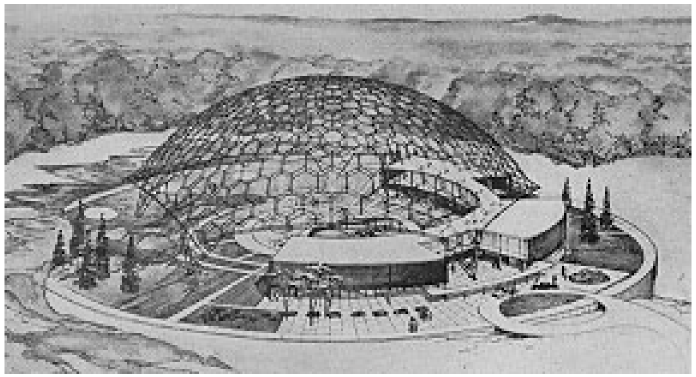
参考論文

1. 藤井大地，菊池昇：SLP法を用いたトポロジー最適化における数値的不安定の改善，日本建築学会構造系論文集，No.521，pp.65-72，1999
2. 藤井大地，江島晋，菊池昇：均質化設計法を用いた弾性変形機構の位相最適化，日本建築学会構造系論文集，No.528，pp.99-105，2000
3. 藤井大地，松本慎也，藤谷義信，菊池昇：グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化，日本建築学会構造工学論文集，Vol.46B，pp.1-8，2000
4. 藤井大地，鈴木克幸，大坪英臣：ボクセル有限要素法を用いた構造物の位相最適化，日本計算工学会論文集，Vol.2，2000
5. 藤井大地，菊池昇：均質化設計法を用いた複合材料の位相最適化，日本建築学会構造系論文集，No.535，2000.9
6. 藤井大地分担執筆：「構造形態解析の応用」，Ⅰ-6均質化設計法，Ⅲ-1.1均質化設計法の応用，日本建築学会，2000

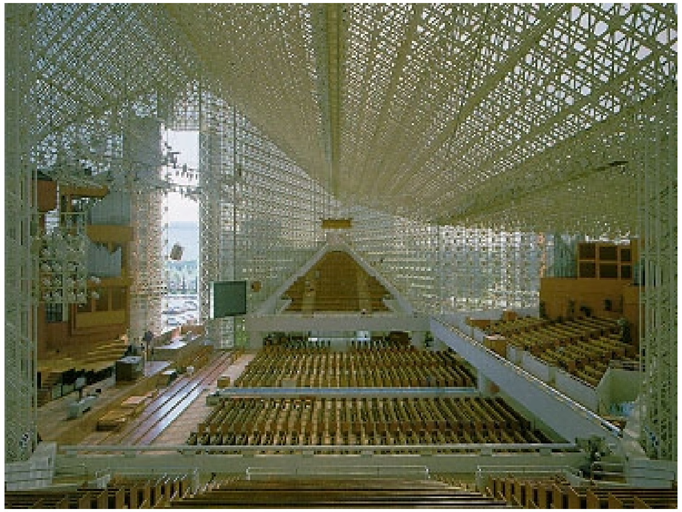
骨組構造の位相最適化ツール（Otto）

建築物の多くは骨組構造

アストロドーム

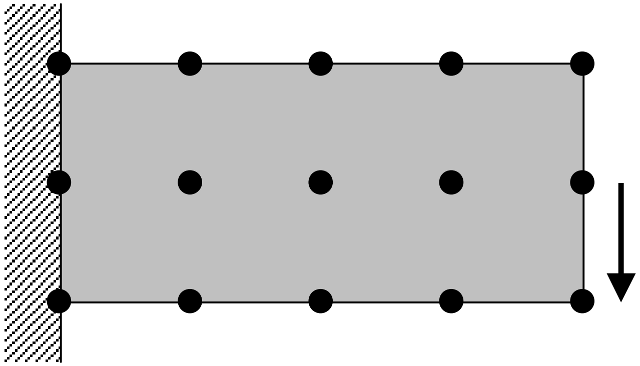


アメリカ金属協会全国本部

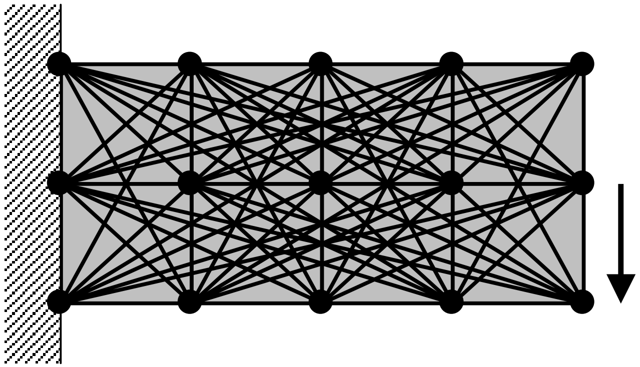


ガラスの教会

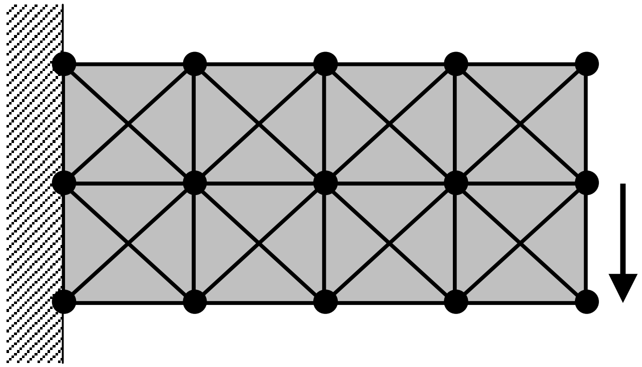
グランドストラクチャー法



節点配置



グランドストラクチャー（1）



グランドストラクチャー（2）

応力制約下の最小重量設計

応力の断面積に関する感度係数

⇒ 節点変位ベクトルの感度係数

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial A_i} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial A_i} = -\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U}}$$

重量制約下の剛性最大化

ひずみエネルギーの断面積に関する感度係数

$$\boxed{V=\frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial A_i}=-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial A_i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial A_i}\mathbf{K}\mathbf{U}+\mathbf{U}^T\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U}+\mathbf{U}^T\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial A_i}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^T\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U}+2\mathbf{U}^T\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial A_i}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial A_i}=-\frac{1}{2}\mathbf{U}^T\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial V}{\partial A_i}=-\frac{1}{2}\mathbf{u}_i^{\;T}\frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial A_i}\mathbf{u}_i}$$

グランドストラクチャー法の最適化問題

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \left[V(\boldsymbol{\alpha}) \right]$$

$$\text{subject to :}$$

$$W = \sum_{i=1}^{N} (1-\alpha_i) A_{\max} l_i \le \overline{W}$$

$$0 \le \alpha_i \le 1, \qquad i = 1, \cdots, N$$

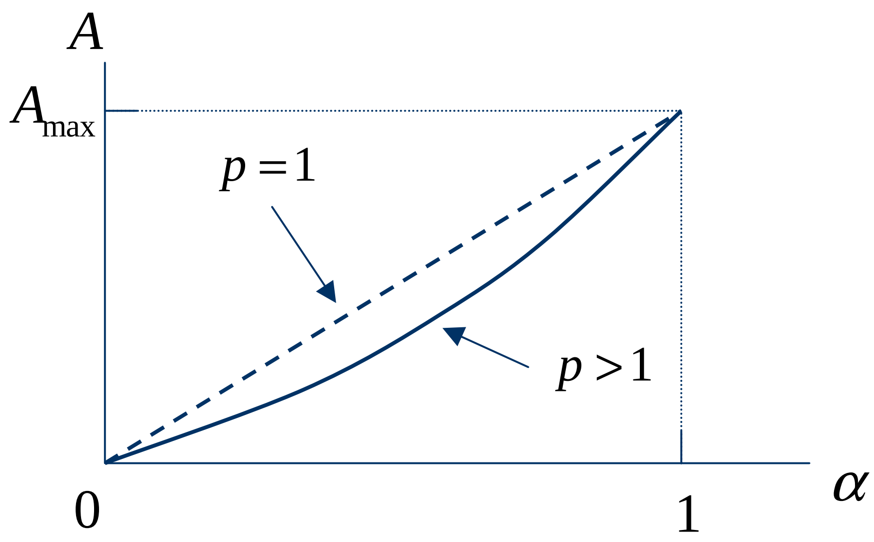
$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_N\}$$

$$A_i = (1-\alpha_i) A_{\max}, \quad 0 \le \alpha_i \le 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

中間断面積へのペナルティー

$$A_i = (1-\alpha_i)^p A_{\max}, \quad 0 \le \alpha_i \le 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

pが1以上なら中間断面積
が通常より低く評価される



最適化問題の解法

- 最適性規準法(OC)
  - 設計変数の数に依らず収束が速い。
  - 目的関数が凸関数条件を満たす必要があり，収束解が得られない場合がある。
  - 制約条件の扱いが煩雑。
- 逐次線形計画法(SLP,SQP)
  - 局所解を見つけやすい。
  - 制約条件の扱いが簡単で，収束に関するロバスト性が高い。
  - 汎用サブルーチンを利用できる。
- CONLIN

最適性規準法

Lagrangianを定義

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = V(\boldsymbol{\alpha}) - \Lambda\left(\sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)A_i^{\max} l_i - \overline{W}\right) \qquad ;\Lambda \le 0$$

設計変数に関する変分

$$\delta L(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} + A_i^{\max} l_i \Lambda\right)\delta\alpha_i - \left(\sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)A_i^{\max} l_i - \overline{W}\right)\delta\Lambda$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$-\frac{A_i^{\max} l_i \Lambda}{\dfrac{\partial V(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}} = 1 \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

$$\frac{1}{\overline{W}}\sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)A_i^{\max} l_i = 1$$

更新式の導出

$$\left[-\frac{A_i^{\max} l_i \Lambda}{\frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}}\right]^{\beta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left[-\frac{A_i^{\max} l_i \Lambda}{\frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}}\right]^{\beta} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i^{(k+1)} = \left[-\frac{A_i^{\max} l_i \Lambda^{(k)}}{\frac{\partial V\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial \alpha_i^{(k)}}}\right]^{\beta} \alpha_i^{(k)}$$

設計変数の更新式

ラグランジェ定数の更新式

$$\Lambda^{(k+1)} = \left[\frac{1}{\overline{W}} \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \alpha_i^{(k)}\right) A_i^{\max} l_i\right]^{\beta} \Lambda^{(k)}$$

変数の制約条件の考慮

$$0 \le \alpha_i \le 1 \quad \left(i = 1, \cdots, N\right), \quad \Lambda \le 0$$

$$\alpha_i^{(k+1)} = \min\left\{\max\left\{0,\ s_i^{(k)}\right\},\ 1\right\}$$

$$\Lambda^{(k+1)} = \min\left\{0,\ \left[\frac{1}{\overline{W}}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\alpha_i^{(k)}\right)A_i^{\max} l_i\right]^{\beta} \Lambda^{(k)}\right\}$$

ただし，

$$s_i^{(k)} = \left[-A_i^{\max} l_i \Lambda^{(k)} \middle/ \frac{\partial V\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial \alpha_i^{(k)}}\right]^{\beta} \alpha_i^{(k)}$$

設計変数のムーブリミット

$$\alpha_i^{(k+1)} = \begin{cases} \max\left\{(1-\zeta)\alpha_i^{(k)}, 0\right\} & \text{if} \quad s_i^{(k)} \le \max\left\{(1-\zeta)\alpha_i^{(k)}, 0\right\} \\ s_i^{(k)} & \text{if} \quad \max\left\{(1-\zeta)\alpha_i^{(k)}, 0\right\} \le s_i^{(k)} \\ & \qquad \le \min\left\{(1+\zeta)\alpha_i^{(k)}, 1\right\} \\ \min\left\{(1+\zeta)\alpha_i^{(k)}, 1\right\} & \text{if} \quad \min\left\{(1+\zeta)\alpha_i^{(k)}, 1\right\} \le s_i^{(k)} \end{cases}$$

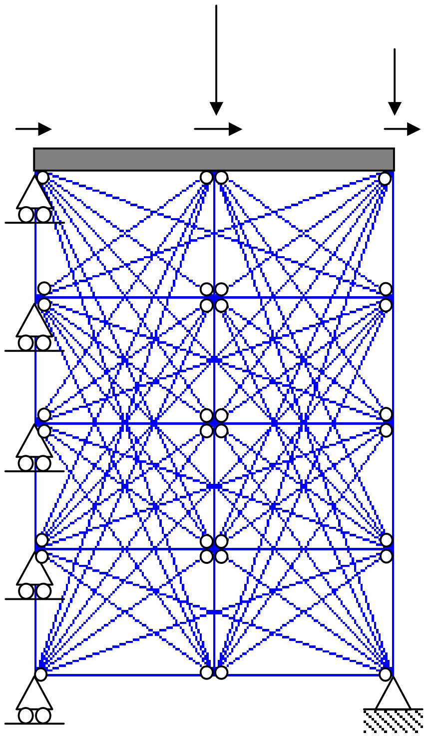
$$s_i^{(k)} = \left[-A_i^{\max} l_i \Lambda^{(k)} \Big/ \frac{\partial V\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial \alpha_i^{(k)}} \right]^{\beta} \alpha_i^{(k)}$$

ζ ；ムーブリミット

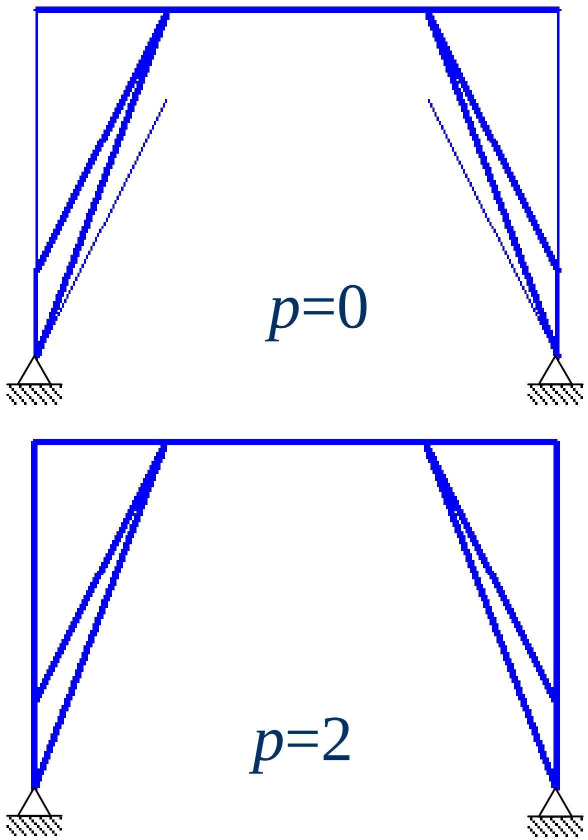
骨組構造の位相最適化ソフト Otto

- グランドストラクチャー法による3次元骨組の位相最適化ソフト（Otto）
  - 節点を入力すればグランドストラクチャーを自動生成できる。
  - 接合部の剛性を自由に変化させられる。
  - 設計変更しない部材を指定できる。
  - 最適位相から新しい骨組データを生成できる。
  - 最適性規準法の採用により計算効率が向上。
  - p=2のペナルティーにより明確な位相が求まる。
  - 通常の骨組解析（断面力，変位等）も行える。

Ottoの解析例（ラーメン構造）

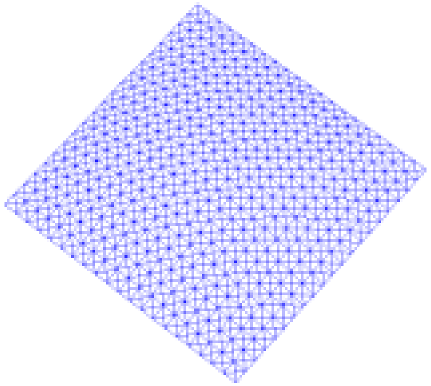


解析モデル

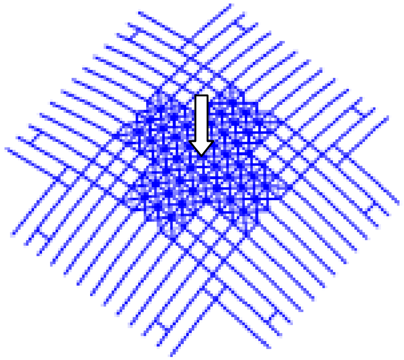


最適位相

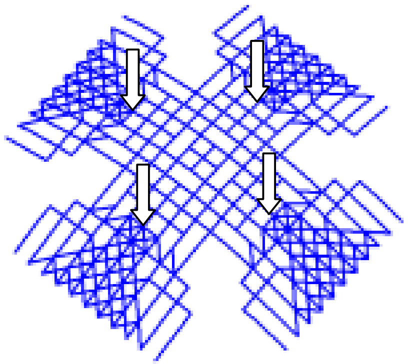
Ottoの解析例（シェル構造）



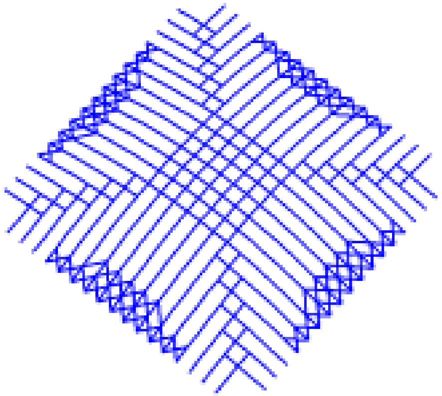
グランドストラクチャー



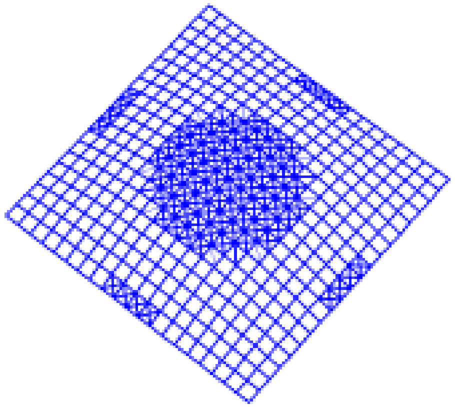
1点集中荷重



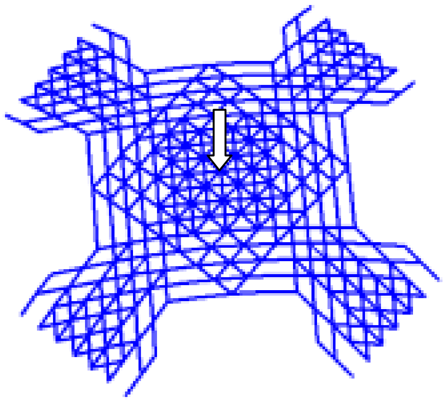
4点集中荷重



等分布荷重

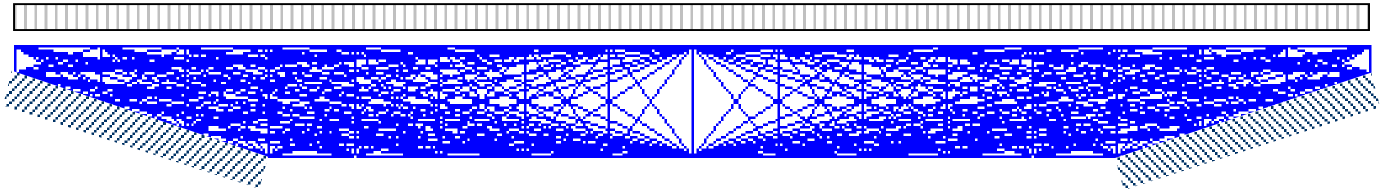


等分布荷重（設計対象：斜材）



斜材半剛接

Ottoの解析例（橋梁）

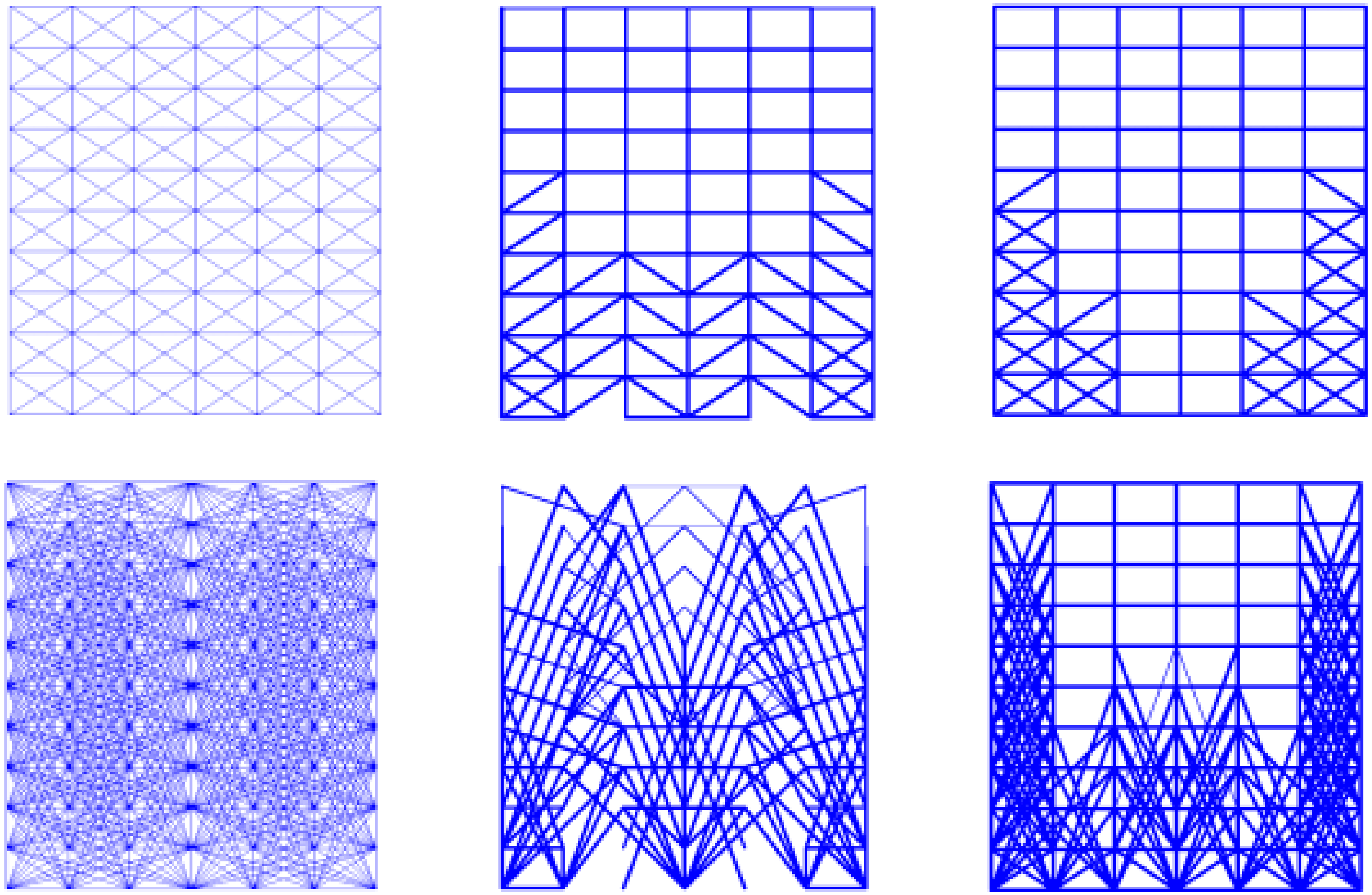


グランドストラクチャー（鉛直等分布荷重）

最適位相（斜材剛接）

最適位相（斜材ピン接）

Ottoの解析例（フレーム）



2次元連続体の位相最適化ツール（Isler）

連続体の位相最適化

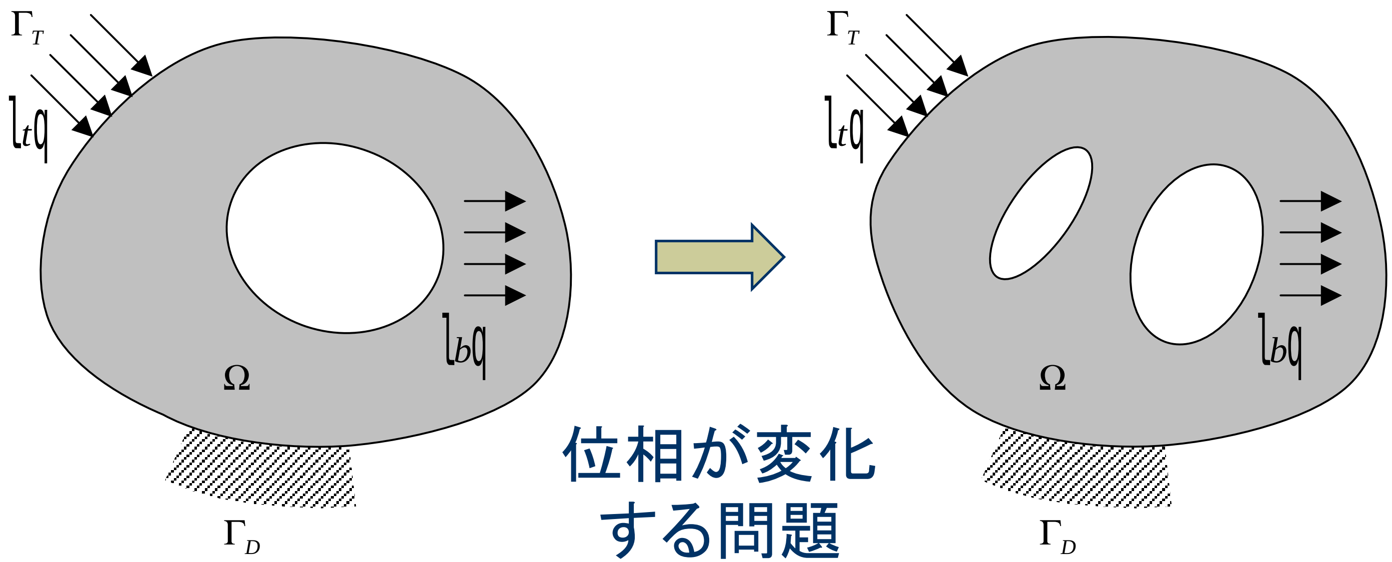
- コンセプトデザインには骨組構造だけでなく連続体の位相最適化が必要である。

グエル公園内の立体道路(ガウディー)

連続体の位相最適化の難しさ

<u>従来の形状最適化の考え方</u>

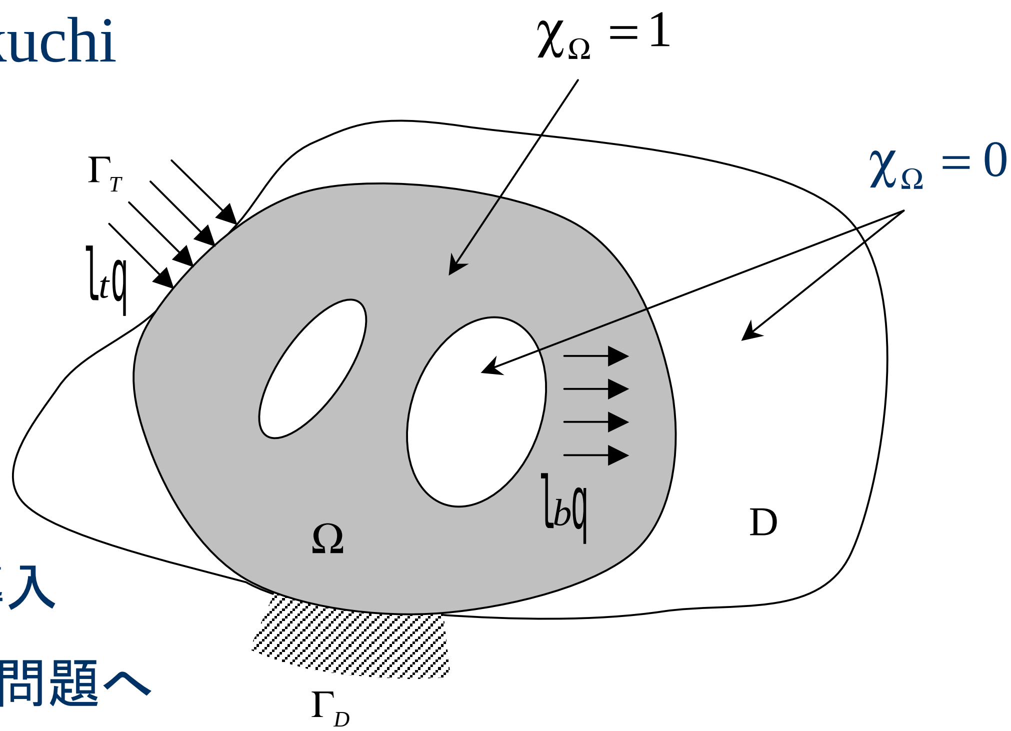
境界形状を変化させて最適化を行う



新しい位相最適化の考え方

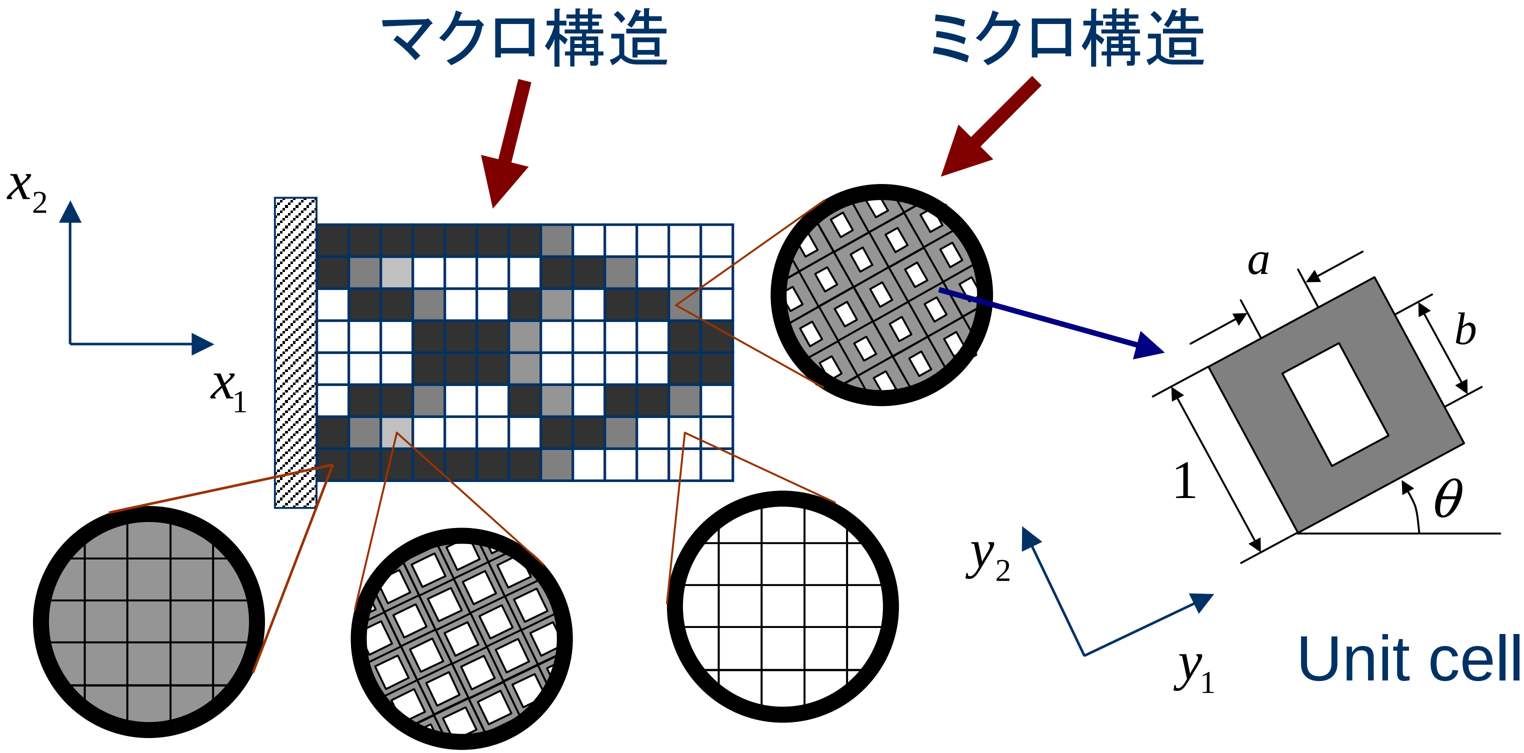
- 1985 Murat and Tartar
- 1988 Bendsøe and Kikuchi
- 1991 Suzuki and Kikuchi

$$\chi_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases}$$



- 領域の拡張と特性関数の導入
- 均質化理論により微分可能問題へ

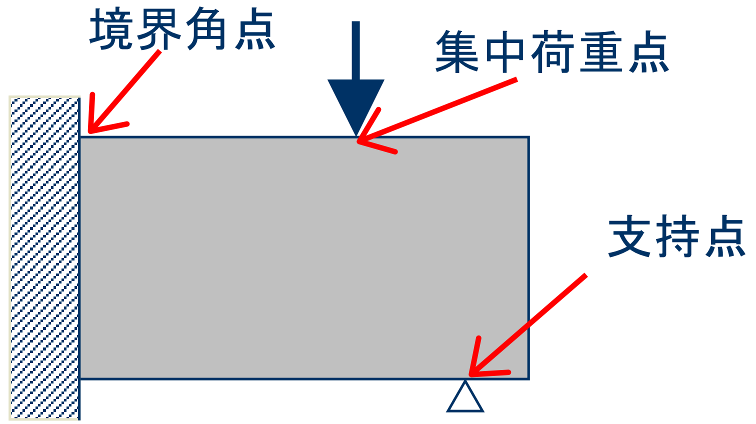
均質化設計法
－連続体の位相最適化手法－



均質化設計法の特徴

目的関数にエネルギー的な物理量を用いる

局所的な応力の
発散に適応

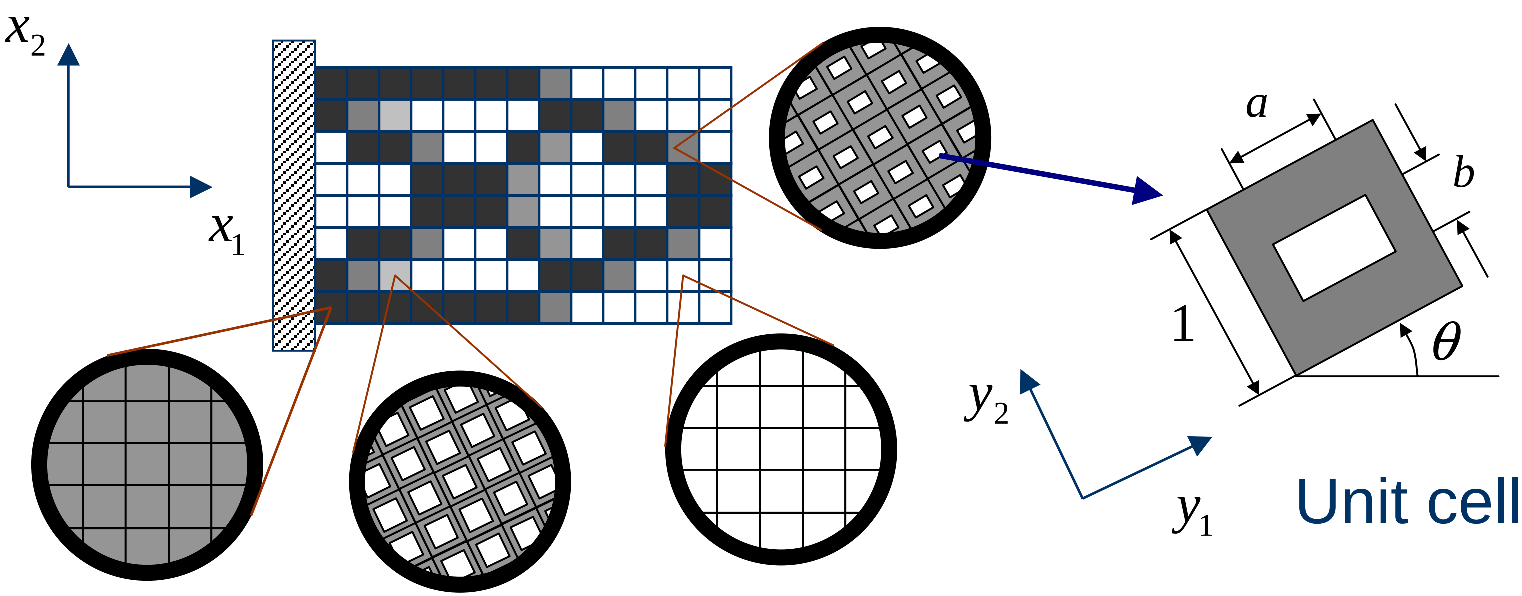


感度解析が非常に高速に計算できる

均質化設計法の最適化問題

$$\text{Minimize}\quad V(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{K}_0\mathbf{U},\quad \boldsymbol{\alpha} = \{a_1,\cdots,a_N,b_1,\cdots,b_N\}$$

$$\text{subject to}\quad W(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N}(1-a_ib_i) \le \overline{W},\quad 0 \le a_i \le 1,\quad 0 \le b_i \le 1\quad (i=1,\cdots,N)$$



感度解析

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\frac{1}{2}\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_i}\mathbf{U} = -\frac{1}{2}\mathbf{u}_i{}^T \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \alpha_i}\mathbf{u}_i$$

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{u}_i{}^T \left(\int_{\Omega^{ei}} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \alpha_i} \mathbf{B} d\Omega^{ei} \right) \mathbf{u}_i$$

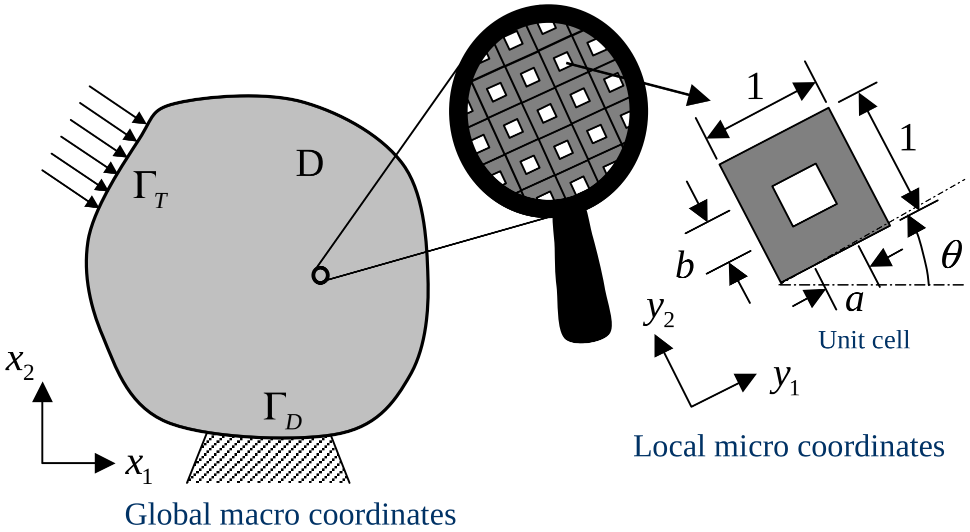
$\mathbf{D}^H$; 均質化法によって求められる
均質化弾性マトリックス

均質化法による均質化弾性マトリックスの導出

変位場の仮定

$$\mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \approx \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$$



ひずみ－変位関係

$$\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{v}^{\varepsilon}\right) = \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}^{\varepsilon} \approx \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_0 + \partial_{\mathbf{y}}\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\partial_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix}, \quad \partial_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \partial/\partial y_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y_2 \\ \partial/\partial y_2 & \partial/\partial y_1 \end{bmatrix}$$

ミクロ変位－マクロひずみ関係

$$\mathbf{v}_1 = -\chi(\mathbf{y})\boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) = -\chi(\mathbf{y})\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$$

均質化された全ポテンシャルエネルギー

$$\Pi\left(\mathbf{v}^{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}\int_{D}\left(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{0}\right)^{T}\mathbf{D}^{Y}\left(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{0}\right)dD-\int_{D}\mathbf{v}_{0}{}^{T}\rho\mathbf{b}^{H}dD-\int_{\Gamma_{T}}\mathbf{v}_{0}{}^{T}\mathbf{t}\,d\Gamma$$

$$\mathbf{D}^{Y}=\frac{1}{|Y|}\int_{Y}\left(\mathbf{I}-\partial_{\mathbf{y}}\chi\right)^{T}\mathbf{D}\left(\mathbf{I}-\partial_{\mathbf{y}}\chi\right)dY$$

$$\rho\mathbf{b}^{H}=\frac{1}{|Y|}\int_{Y}\rho^{E}\mathbf{b}dY$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D^{\varepsilon}}\Phi^{\varepsilon}\left(\mathbf{x}\right)dD^{\varepsilon}=\int_{D}\left(\frac{1}{|Y|}\int_{Y}\Phi\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)dY\right)dD$$

均質化された
最小ポテンシャルエネルギー

最小ポテンシャルエネルギー

$$\min_{\mathbf{v}^\varepsilon}\left[\Pi\left(\mathbf{v}^\varepsilon\right)\right]\approx\min_{\mathbf{v}_0}\left[\Pi\left(\mathbf{v}_0\right)\right]=\Pi^H\left(\mathbf{u}_0\right)$$

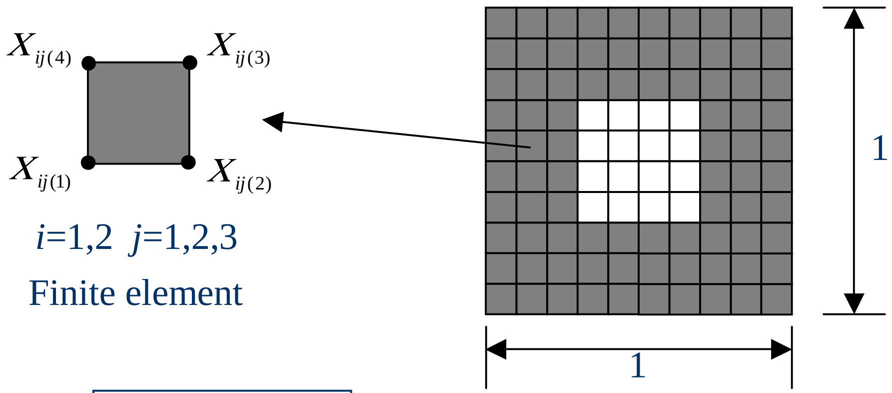
$$=\min_{\mathbf{v}_0}\left[\frac{1}{2}\int_D\left(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_0\right)^T\mathbf{D}^H\left(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_0\right)dD-\int_D\mathbf{v}_0{}^T\rho\mathbf{b}^H dD-\int_{\Gamma_T}\mathbf{v}_0{}^T\mathbf{t}\,d\Gamma\right]$$

均質化された弾性マトリックス

$$\mathbf{D}^H=\min_{\substack{\chi\\ \text{periodic}}}\mathbf{D}^Y=\min_{\substack{\chi\\ \text{periodic}}}\left[\frac{1}{|Y|}\int_Y\left(\mathbf{I}-\partial_{\mathbf{y}}\chi\right)^T\mathbf{D}\left(\mathbf{I}-\partial_{\mathbf{y}}\chi\right)dY\right]$$

有限要素法による離散化

$$\boxed{\begin{aligned}\chi &= \mathbf{N}_1\mathbf{X}_e \\ \partial_{\mathbf{y}}\chi &= \mathbf{B}_1\mathbf{X}_e\end{aligned}}$$



$$\boxed{\mathbf{K}_{1e}\mathbf{X}_e = \mathbf{q}_e}$$

$$\boxed{\mathbf{K}_1\mathbf{X} = \mathbf{q}}$$

$$\mathbf{K}_{1e} = \int_{Y_e} \mathbf{B}_1{}^T\mathbf{D}\mathbf{B}_1\,dY_e$$

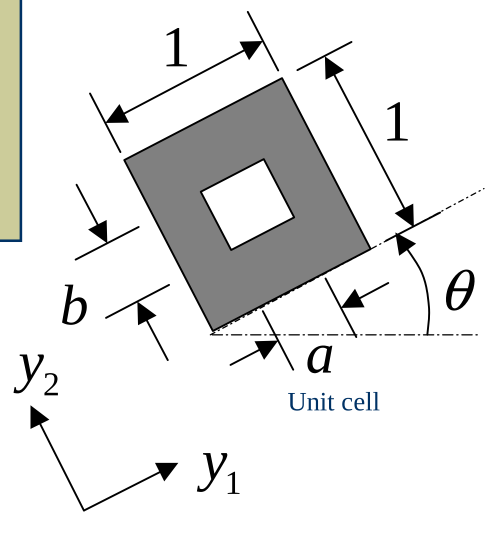
$$\mathbf{q}_e = \int_{Y_e} \mathbf{B}_1{}^T\mathbf{D}\,dY_e$$

$$\boxed{\mathbf{D}^H = \int_Y \mathbf{D}\,dY - \mathbf{X}^T\mathbf{K}_1\mathbf{X}}$$

セルの角度に関する変換

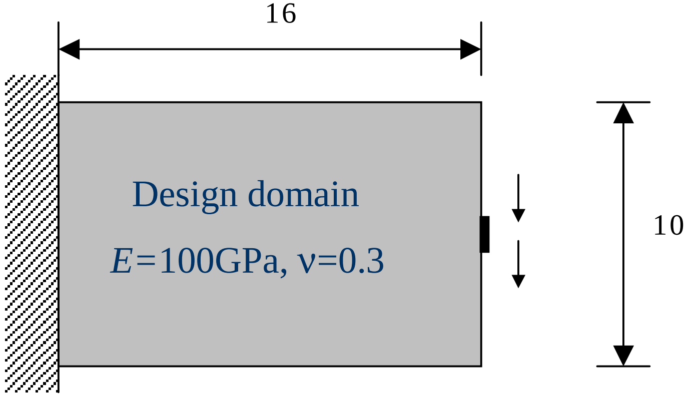
$$\mathbf{D}^H(a,b,\theta)=\mathbf{R}(\theta)^T\,\mathbf{D}^H(a,b)\,\mathbf{R}(\theta)$$

$$\mathbf{R}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta\\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$$

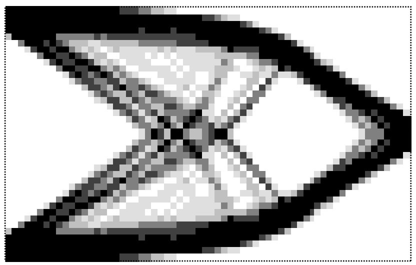


Unit cell

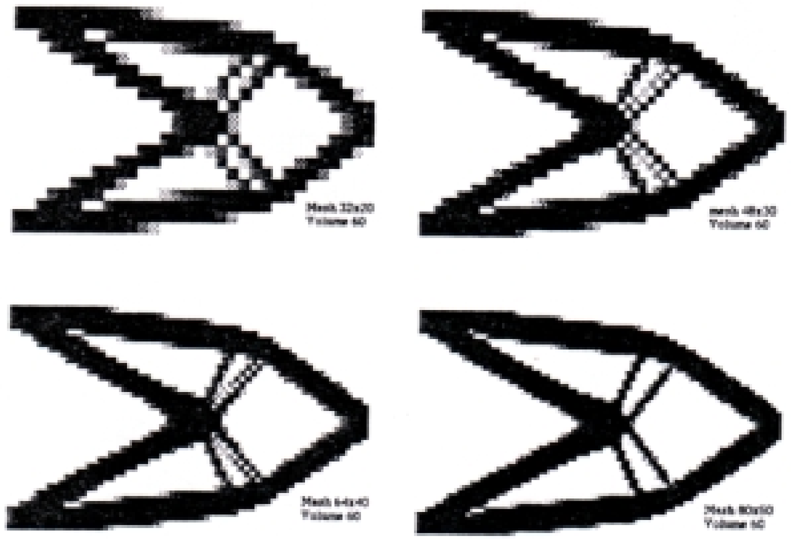
フィルタリングの必要性



設計対象領域



SLP法による最適位相

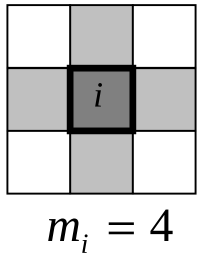


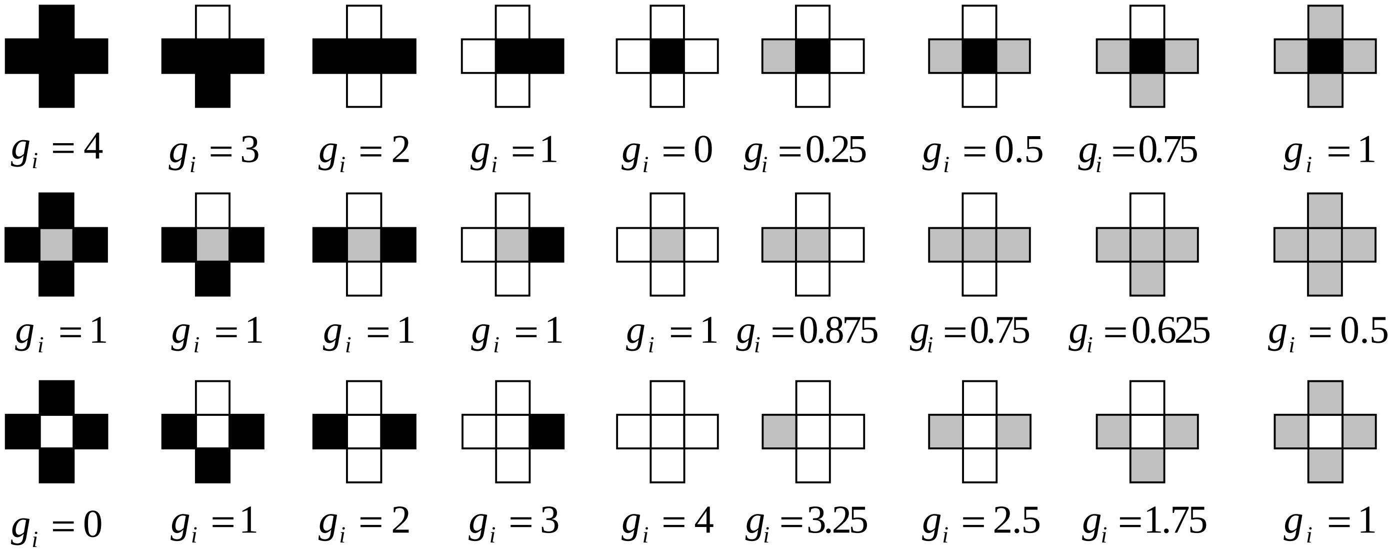
Suzuki and Kikuchi (1991)

重力制御フィルタリング

$$G=\sum_{i=1}^{N} g_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\left(\rho_i\cdot\rho_j+\bar{\rho}_i\cdot\bar{\rho}_j\right)\Big/\sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\rho_i = 1-a_i b_i,\quad \bar{\rho}_i = 1-\rho_i,\quad 0<G\le 1$$





要素密度が0, 0.5, 1の場合の*gravity control* 関数g_i値

Filteringを考慮した定式化

$$\min_{\alpha}\left[V(\alpha)\right] \qquad \alpha=\{a_1,a_2,\cdots,a_N,b_1,b_2,\cdots,b_N\}$$

subject to :

$$W=\sum_{i=1}^{N}(1-a_i b_i)\le \bar{W}, \quad 0\le \alpha_i \le 1, \quad i=1,\cdots,2N$$

⇧

$$G\ge \bar{G}$$

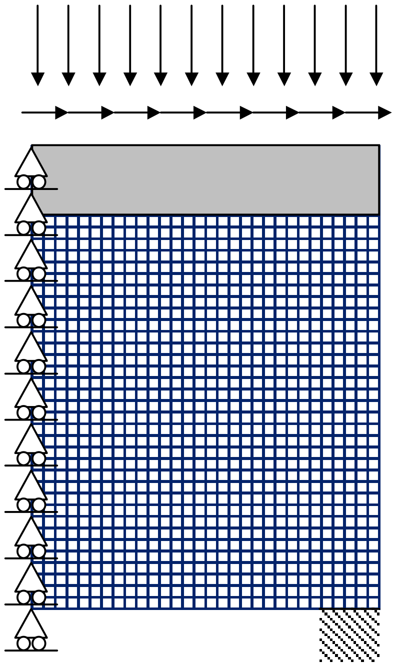
制約条件として加える

ただし，$G(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\left[\rho_i\rho_j+(1-\rho_i)(1-\rho_j)\right]\Big/\sum_{i=1}^{N}m_i$

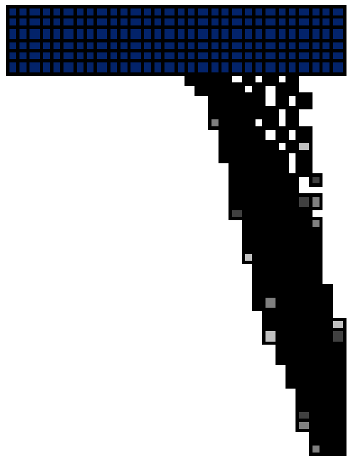
2次元連続体の位相解析ソフト Isler

- 教育向けに無償公開（Webからダウンロード可）
- 本プログラムの特徴
  - VBで作成したプリポストによりデータ作成が容易にできる。簡単なメッシュ自動生成も付随している。
  - 最適性規準法（OC法）により計算効率を改善。対称問題では対称な位相が得られる。
  - 重力制御フィルタリングにより明解な最適位相が得られる。
  - 固定設計領域の設定を行うことができる。

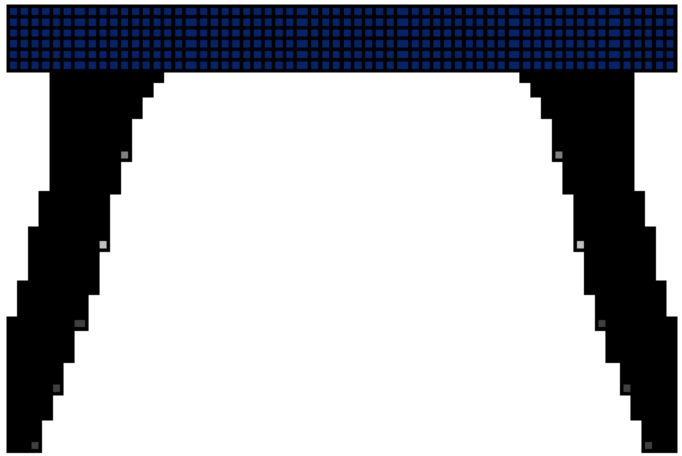
Islerの解析例（ラーメン構造）



解析モデル

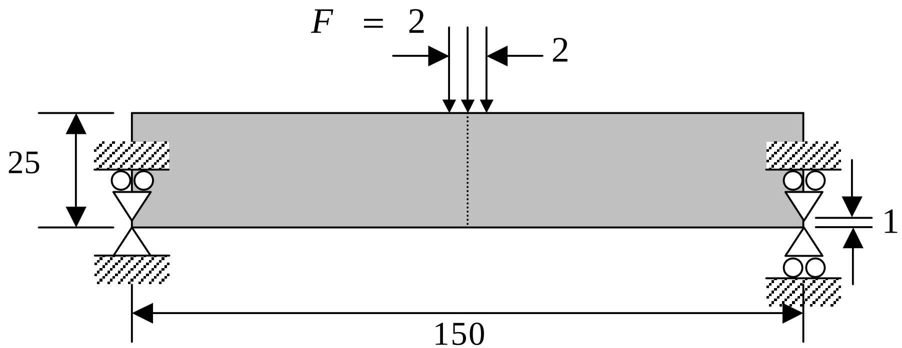


Without filtering

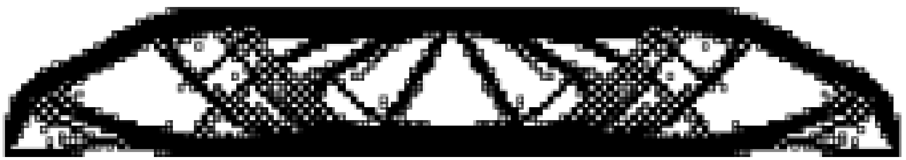


With filtering

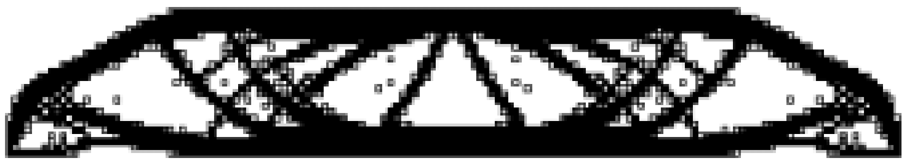
Islerの解析例（MBB梁）



制約なし

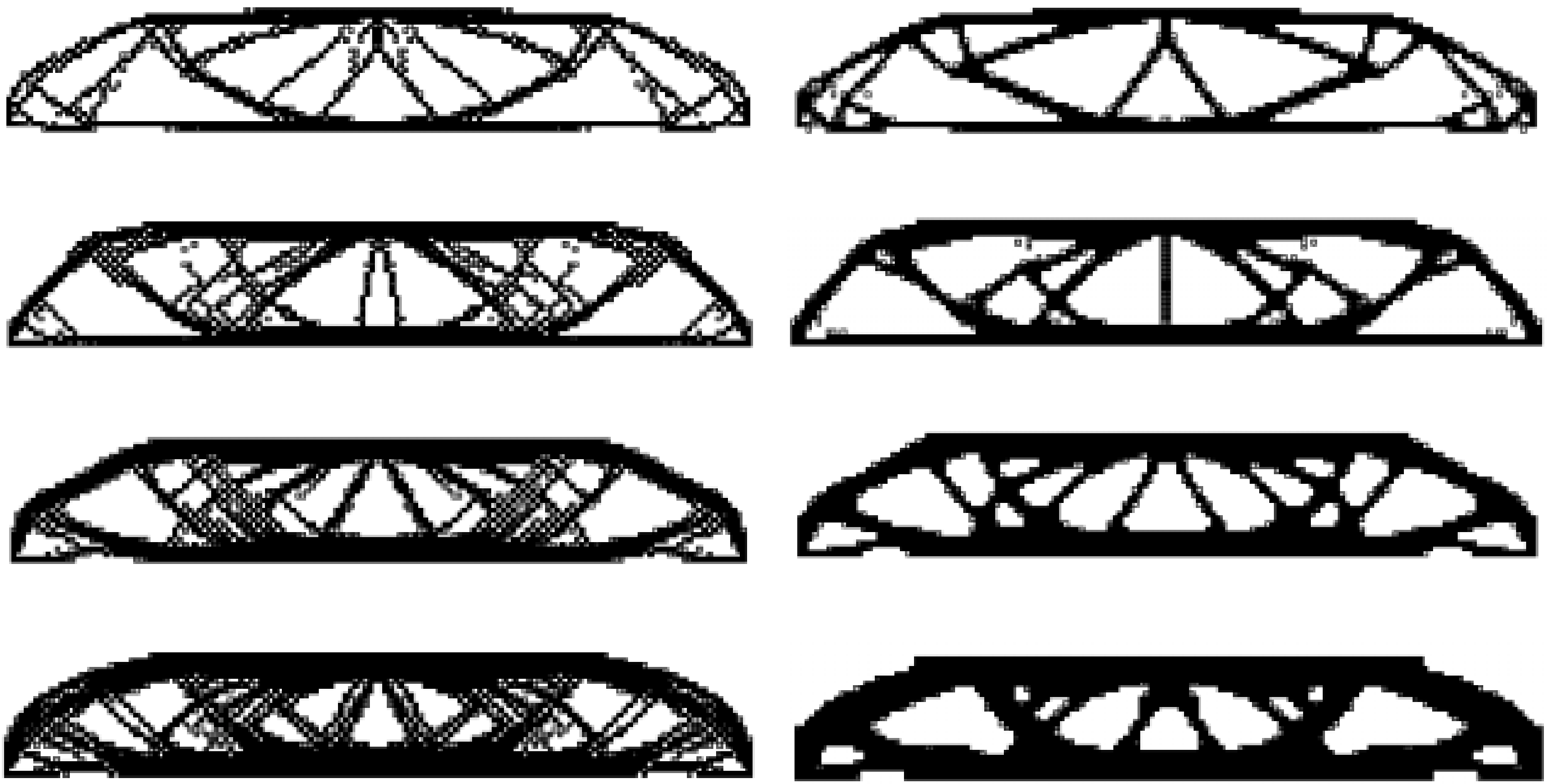


制約値0.7



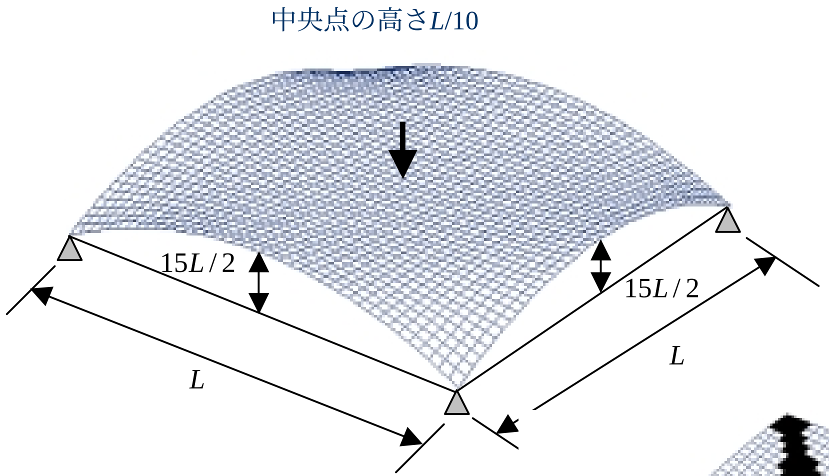
制約値0.8

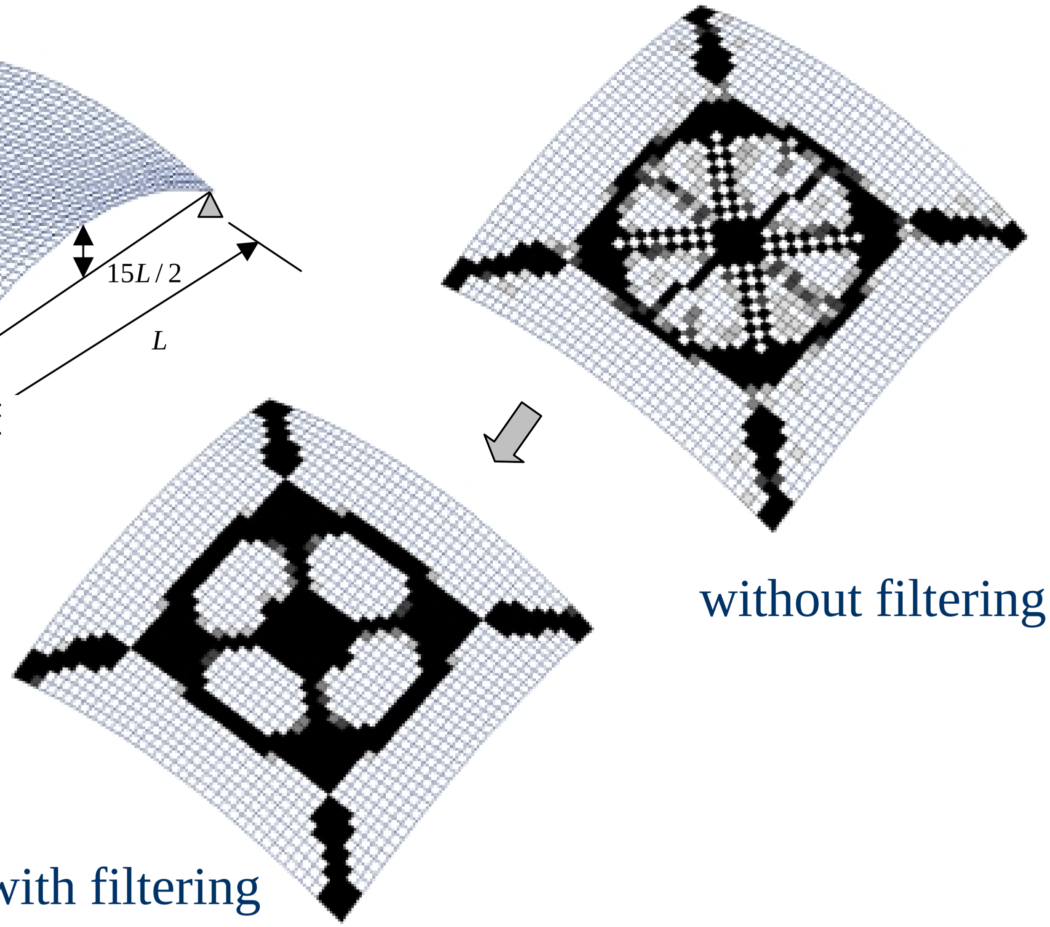
Islerの解析例（MBB梁）



without filtering　　　　with filtering

Islerの解析例（シェル）

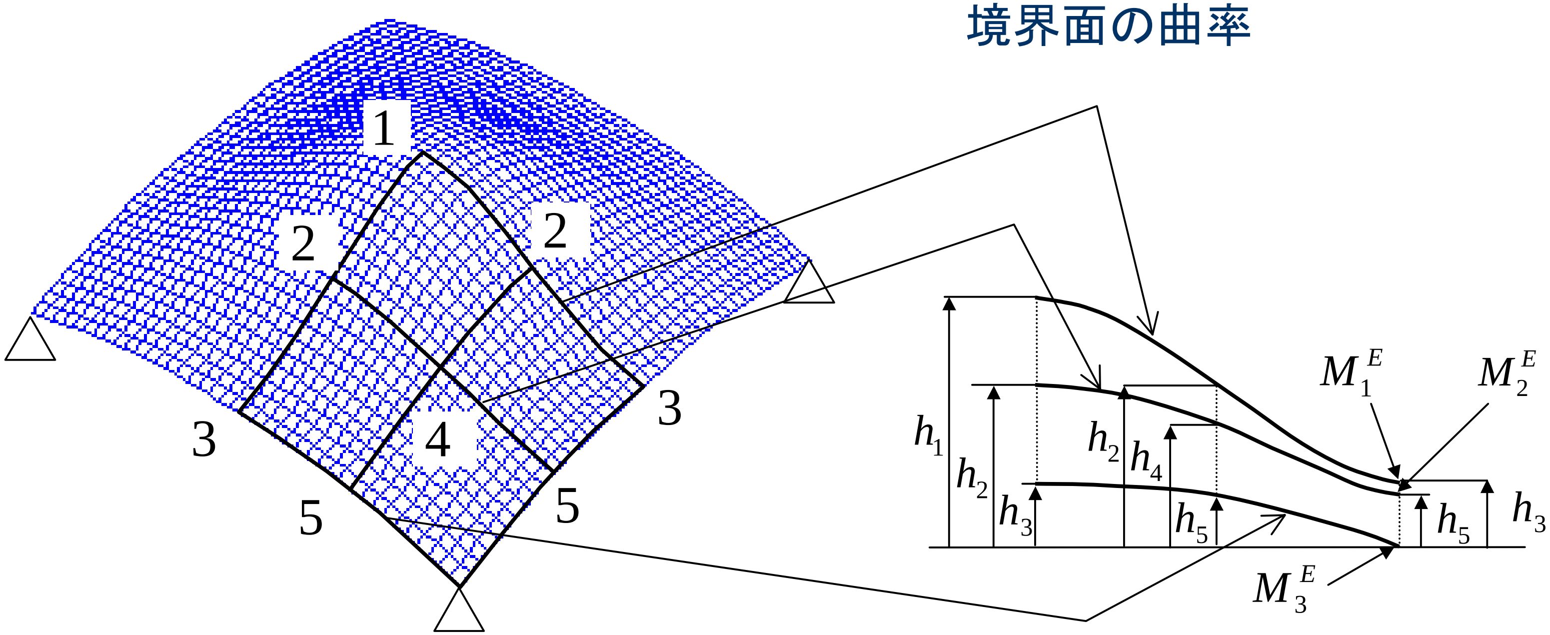




曲面形状と位相の同時最適化

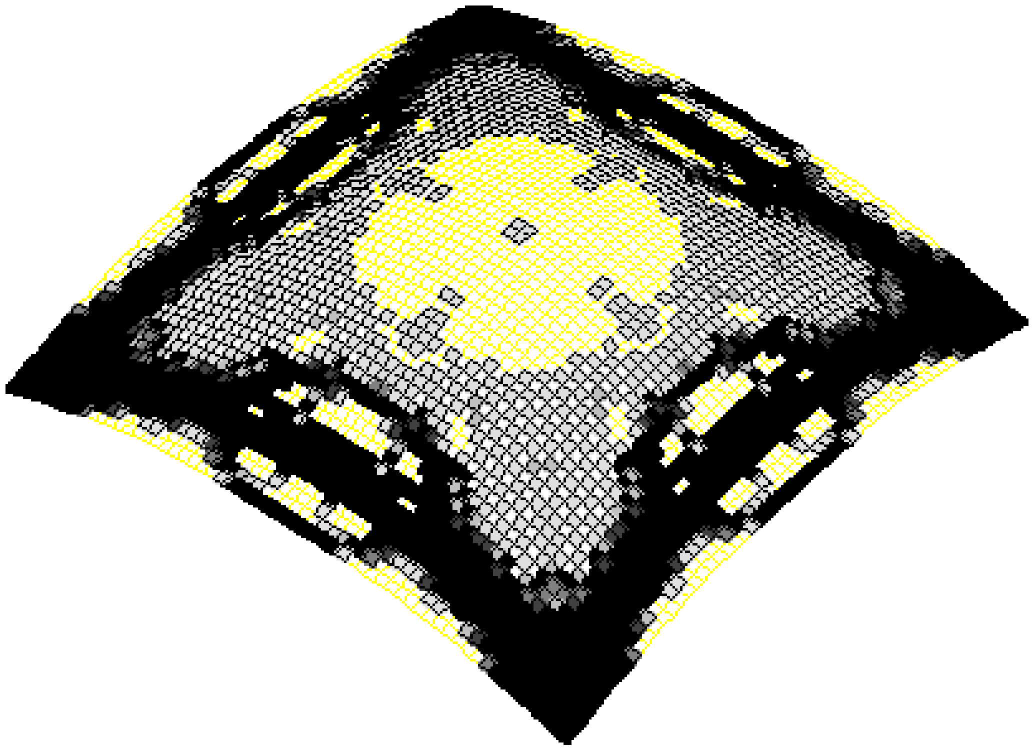
設計変数:　コントロールポイントの高さ

境界面の曲率

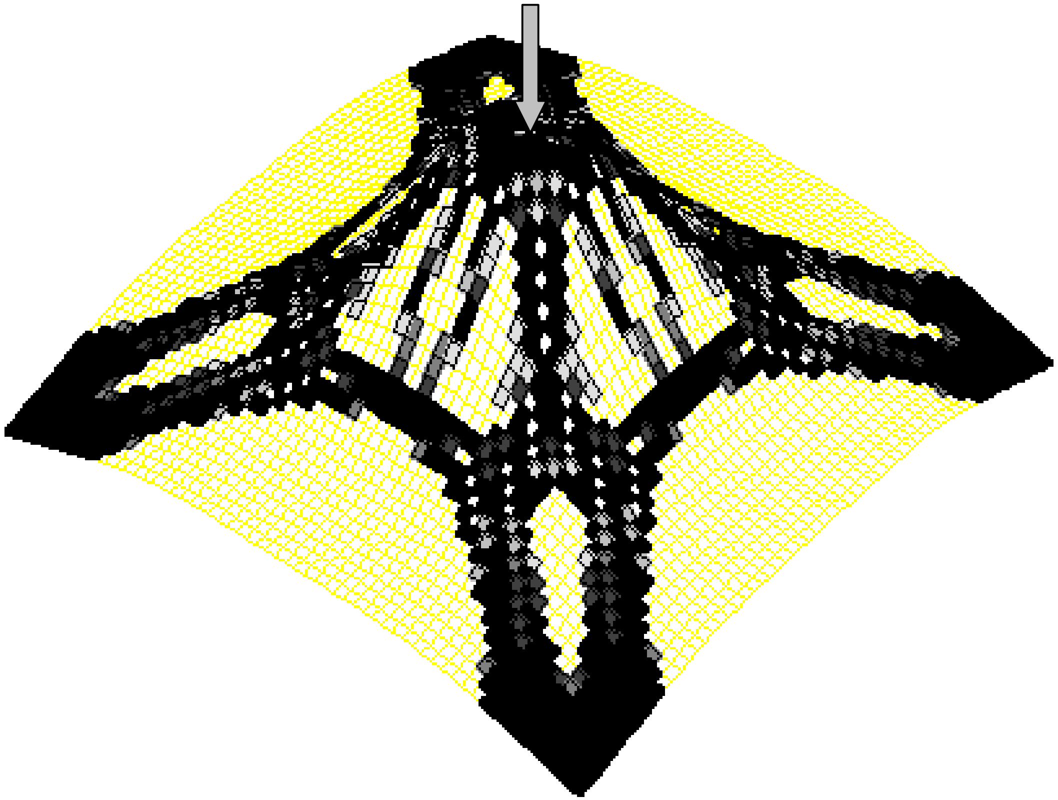


スプライン曲線近似

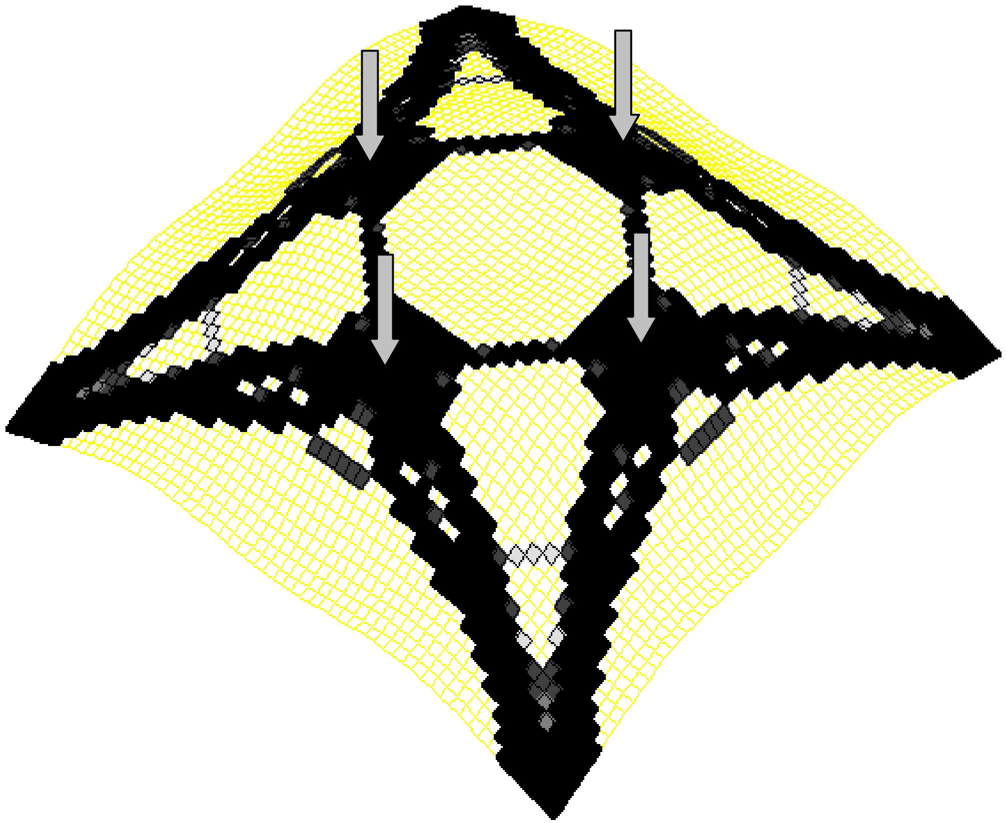
最適位相(等分布荷重)



最適位相(1点集中荷重)



最適位相(4点集中荷重)



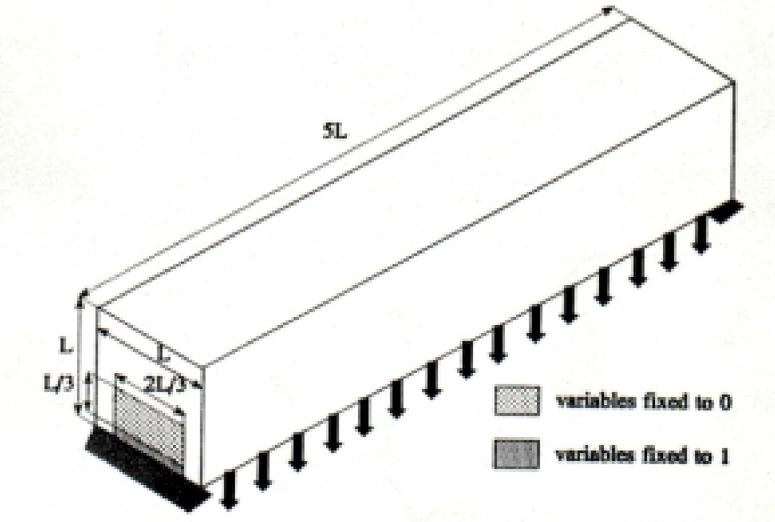
３次元連続体の位相最適化ツール
（Gaudi）

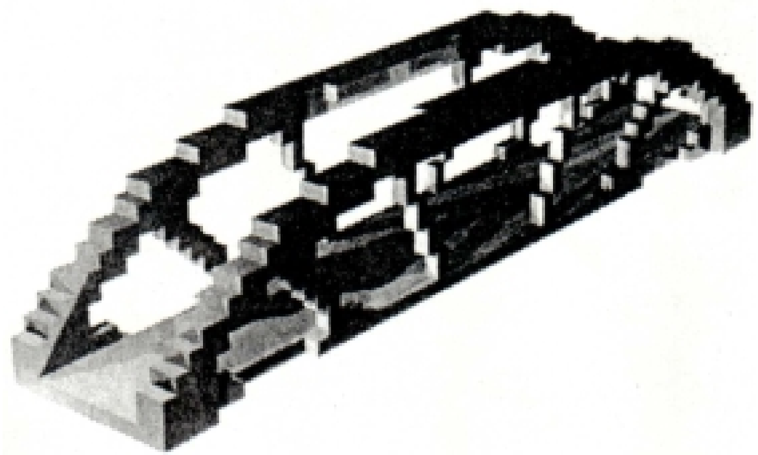
3次元連続体の位相最適化によって設計できるか？

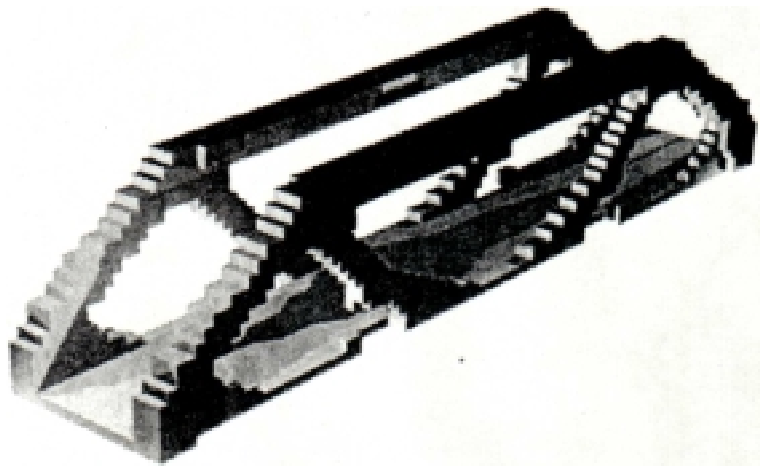
パルテノン神殿

サグラダファミリア（ガウディー）

可能性は0ではない







M.Beckers (1999)

Structural Optimization より引用

３次元連続体の位相最適化の問題点

- 膨大な解析自由度数
  - 通常のパソコンのメモリーは256MB程度であり，通常の方法（連立方程式の直接解法）では数千程度の要素数が限界
- 膨大な計算時間
  - 位相最適化問題では，変位を求める解析を数十回繰り返す必要があるため膨大な計算時間がかかる

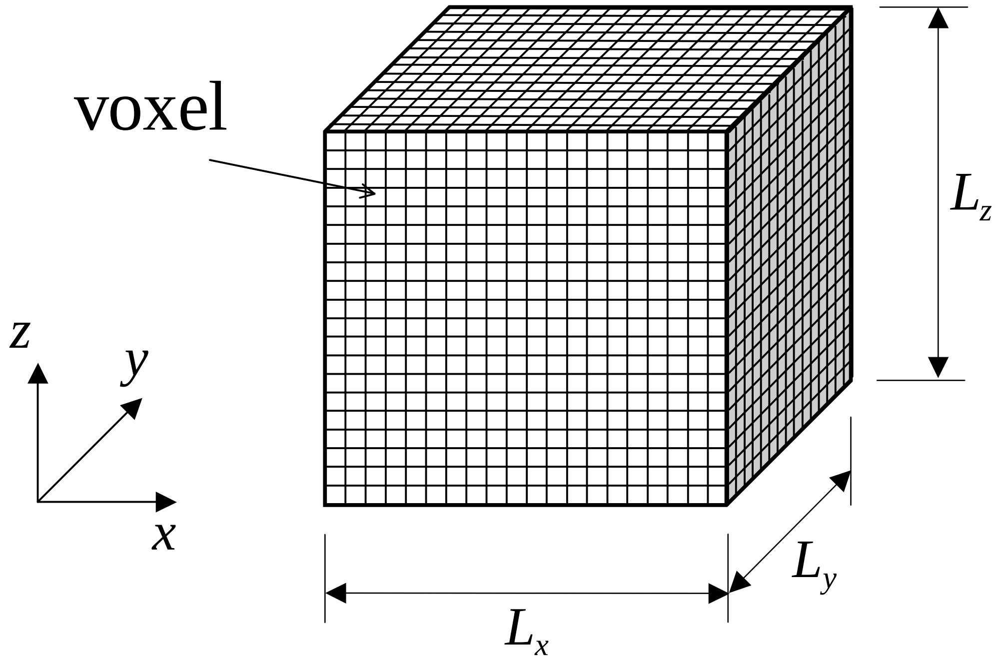
3次元連続体の主な位相最適化手法

- 均質化設計法
  - 力学的整合性のとれた滑らかな位相が得られる。
  - 設計変数が穴の大きさと傾きで，3次元問題では1要素につき6個（3個）の設計変数となる。
- 密度法
  - 設計変数は密度で，1要素につき1個の設計変数となる。
  - 密度分布が交互に0,1となるチェッカーボード状の位相が得られやすい。
  - メッシュ依存性があり，メッシュを相当に細かくしないと均質化設計法と同等の位相が得られない。

開発の方針

- 膨大な解析自由度数に対して
  - 連立方程式の解法としてElement-by-Element法を用いたPCG法を用いる。
- 膨大な計算時間に対して
  - 要素をすべて同形状の長方柱要素とする（ボクセル要素）。
  - 設計変数の少ない密度法を用いる。
  - 最適解を求める方法として，収束の速い最適性規準法を用いる。
- 密度法の問題に対して
  - チェッカーボード解を防ぐために2次元問題で提案した重力制御フィルタリング法を3次元問題に適用する。
  - メッシュ依存性に対しては，精細なメッシュ分割と，精度の良い応力仮定法による要素を採用することによって対応する。

ボクセル有限要素解析



8節点長方柱要素：関口＆菊池が提案している応力仮定法要素

E-by-E PCG法における1回の応力解析に必要なメモリー数

種　別	ディメンション数	メモリー数(byte)
要素の材料種別情報(整数)	[要素数]	[要素数]×4
境界条件の情報(整数)	[節点数]×3	[節点数]×3×4
連立方程式の解法(実数)	[節点数]×3×4	[節点数]×3×4×8

100万要素，100万節点で，112MBのメモリー

↓

256MBのメモリーを積めば，100万要素程度の解析は可能

ボクセル解析と密度法を組み合わせることの大きな利点

要素密度の変化は要素剛性マトリックスの係数を変化させることで対応できる。

$$\mathbf{K}_e(\rho) = \rho\mathbf{K}_e$$

要素形状および材料定数が同じならば要素剛性マトリックスは同じ

⇒ 要素剛性マトリックスの各成分の計算は最適化計算に入る前に1度行って記憶しておけばよい。

なぜ大きな利点か？

E-by-E CG法を用いる場合，要素剛性マトリックスを膨大な回数繰り返し計算する必要がある。

連立方程式を解く

感度計算

設計変数の更新

⇔

共役勾配法（CG）

$$\boxed{\mathbf{KU}=\mathbf{F} \;\Rightarrow\; \mathbf{r}=\mathbf{F}-\mathbf{KU}}$$

$$\beta_k = \mathbf{r}_{k-1}{}^T\mathbf{r}_{k-1} \big/ \mathbf{r}_{k-2}{}^T\mathbf{r}_{k-2}$$

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \beta_k \mathbf{d}_{k-1}$$

$$\alpha_k = \mathbf{r}_{k-1}{}^T\mathbf{r}_{k-1} \big/ \mathbf{d}_k{}^T\,\mathbf{K}\mathbf{d}_k$$

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{K}\mathbf{d}_k$$

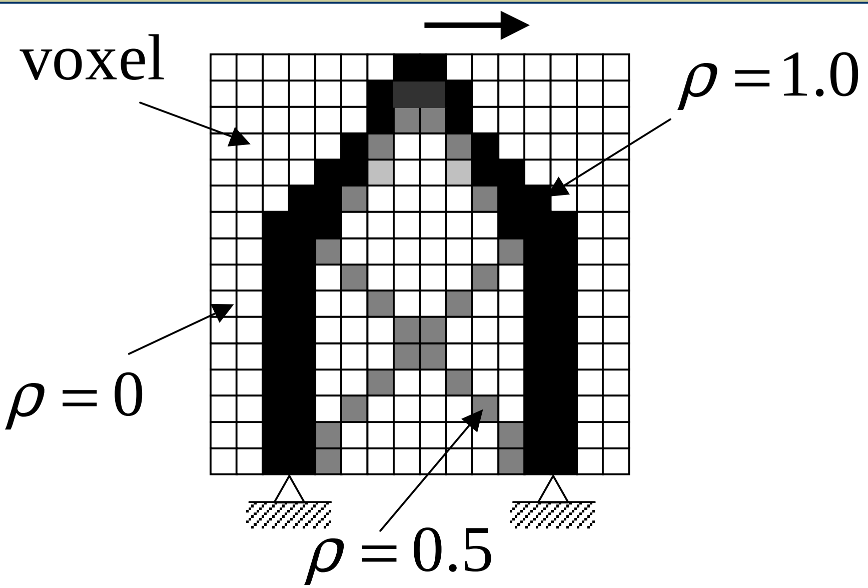
要素剛性マトリックスの計算

最適設計問題

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}}\left[V(\boldsymbol{\alpha})\right] \qquad \boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N\}, \quad \alpha_i=1-\rho_i$$

subject to :

$$W=\sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)\le\bar{W}, \quad G\ge\bar{G}, \quad 0\le\alpha_i\le 1, \quad i=1,\cdots,2N$$



感度解析

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\frac{1}{2}\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_i}\mathbf{U}$$

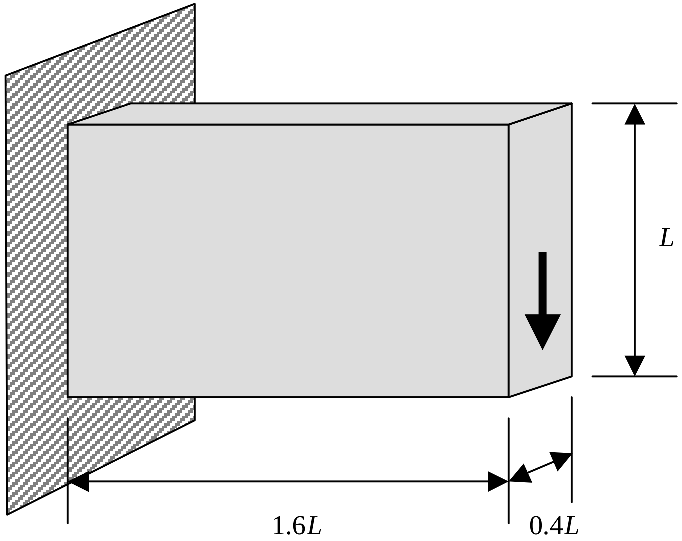
$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N}\left[(1-\alpha_i)^p \mathbf{k}_i\right]$$

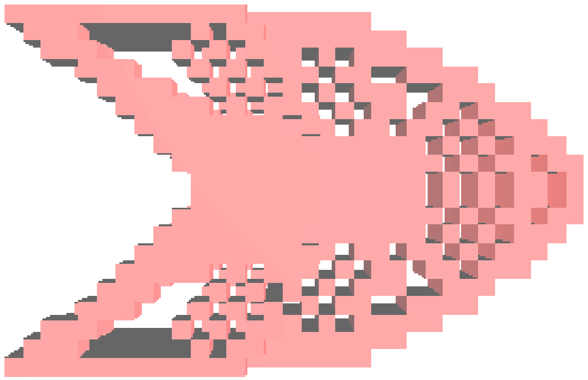
$$\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} = -p(1-\alpha_i)^{p-1}\mathbf{k}_i$$

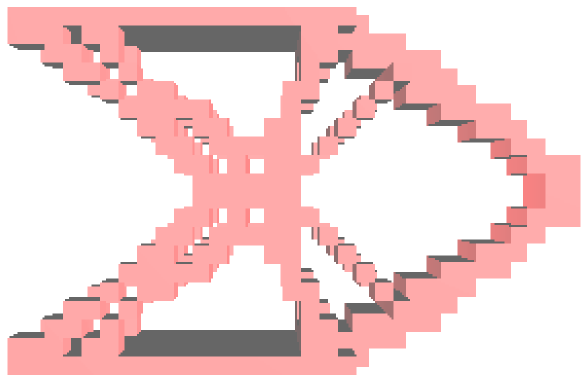
３次元連続体の位相解析ソフトGaudi

- 教育向けに無償公開(Webからダウンロード可)
- 本プログラムの特徴
  - 解析領域を長方柱とし，領域の寸法，分割数，各面(6面)の境界条件と荷重条件を入力することでデータを作成できる。
  - ポスト処理はOpenGLを用いた表示ソフト付き。
  - 数千要素なら数分で解ける。50万要素まで解析可。
  - 固定設計領域を指定できる。

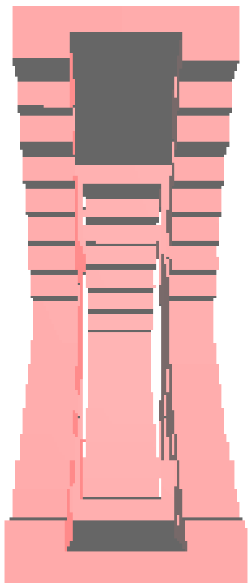
Gaudi解析例(片持梁)

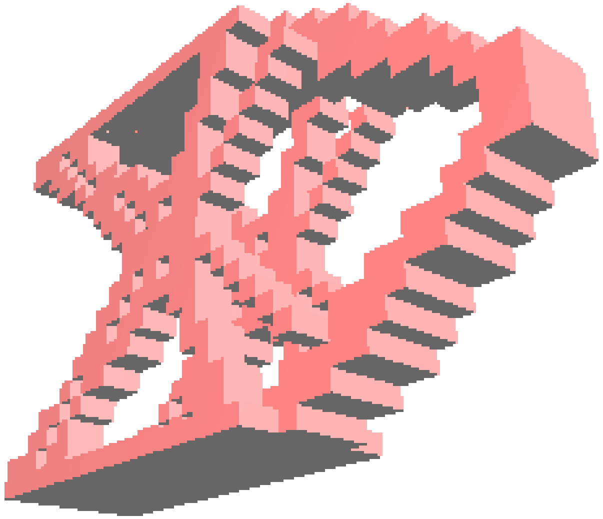


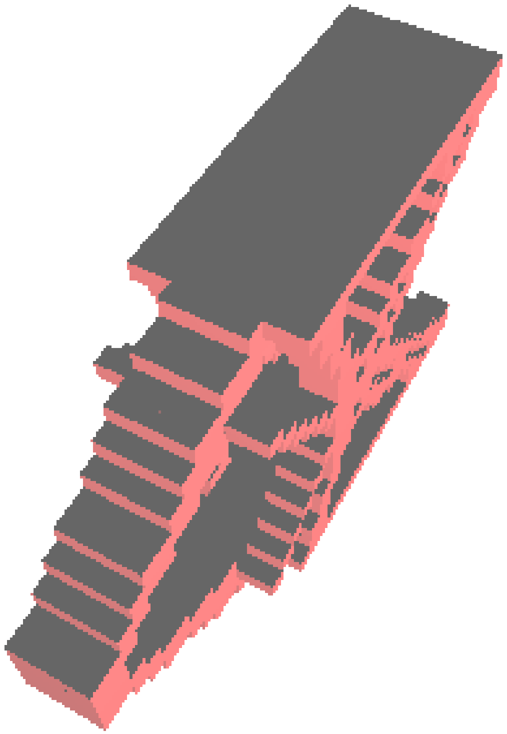




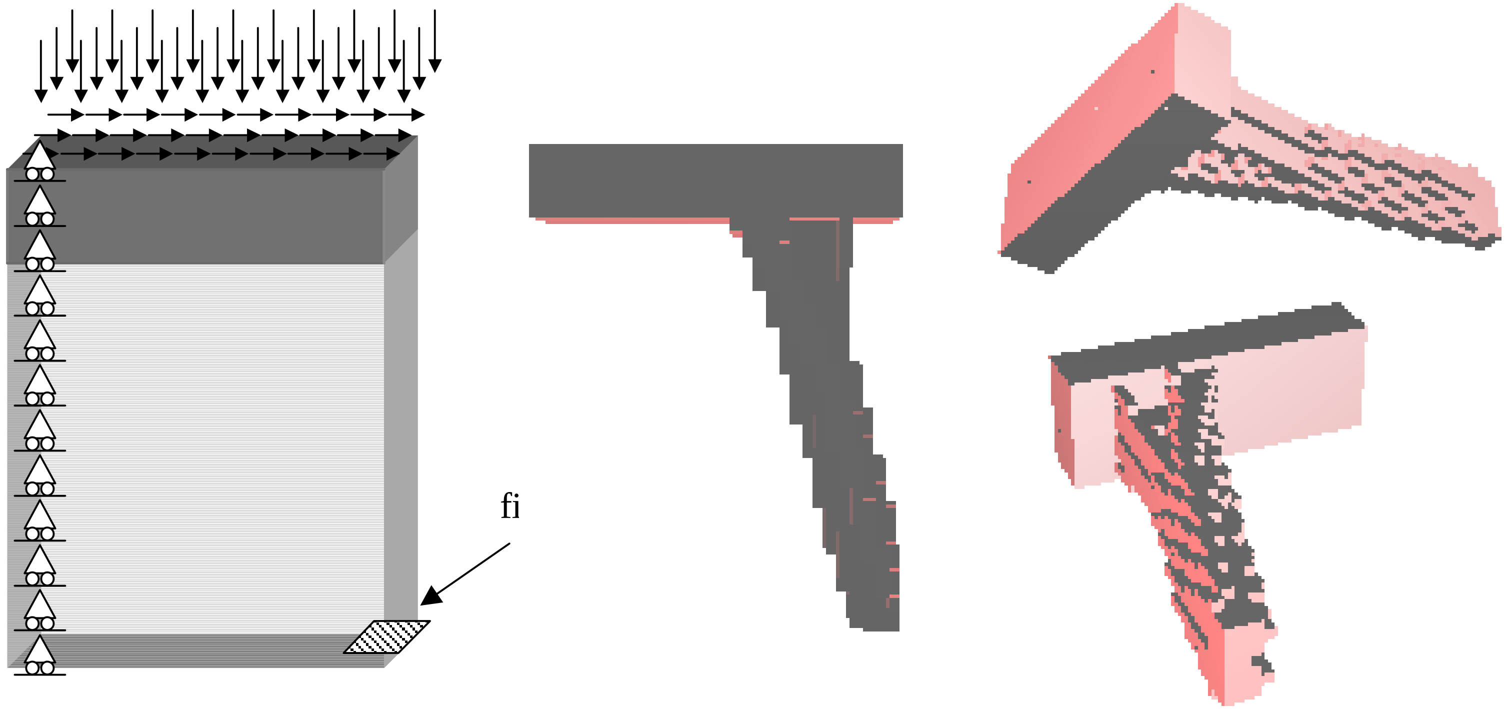
Gaudi解析例（最新）







Gaudiの解析例（ラーメン構造）

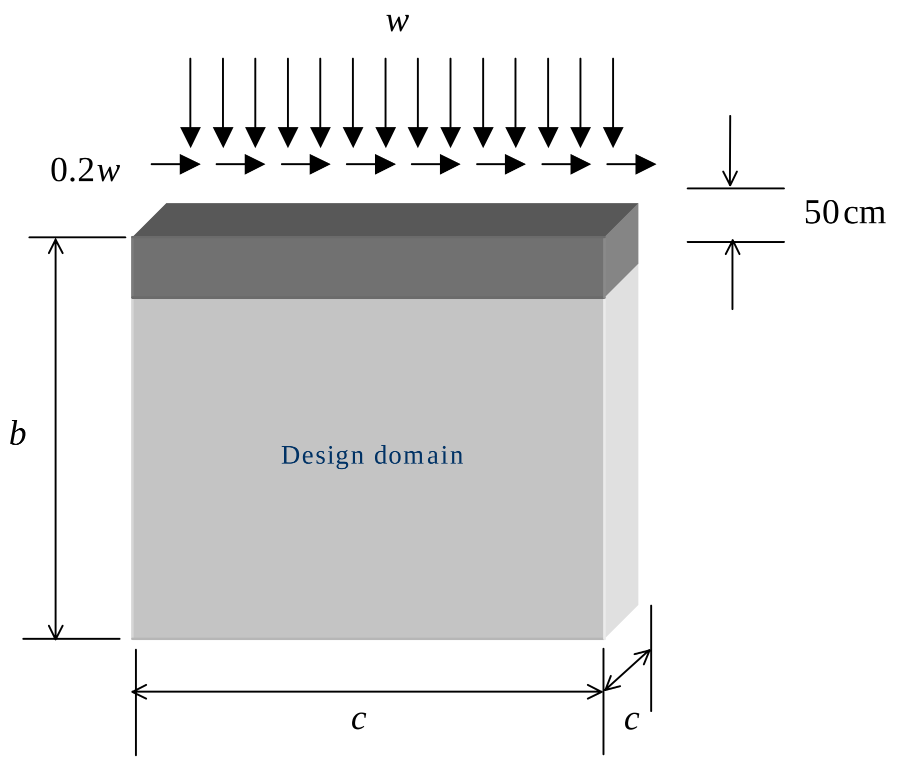


A. Gaudiの建築

グエル公園内の立体道路（ガウディー）

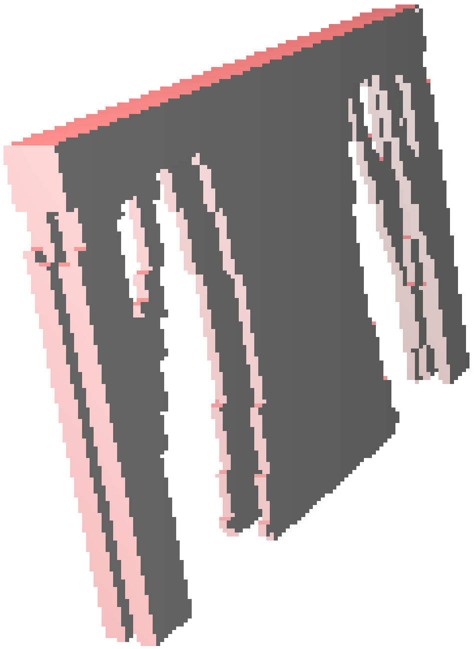
柱は傾いている！

コンクリートラーメンの解析

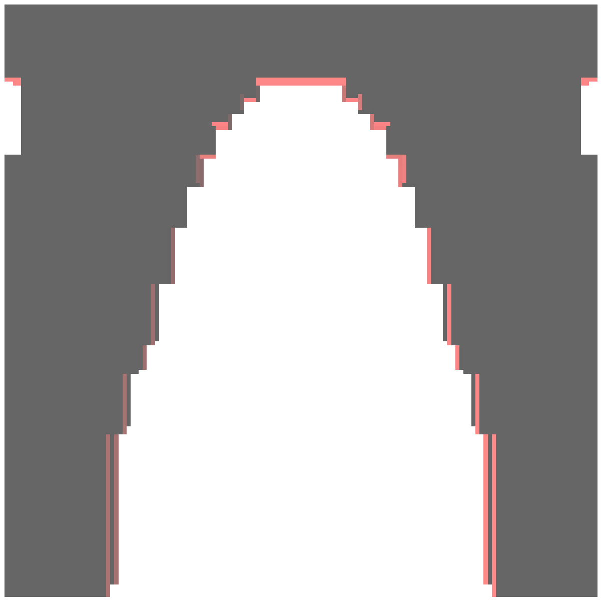


	A	B	c
Case 1	600cm	400cm	50cm
Case 2	400cm	400cm	50cm
Case 3	400cm	600cm	50cm

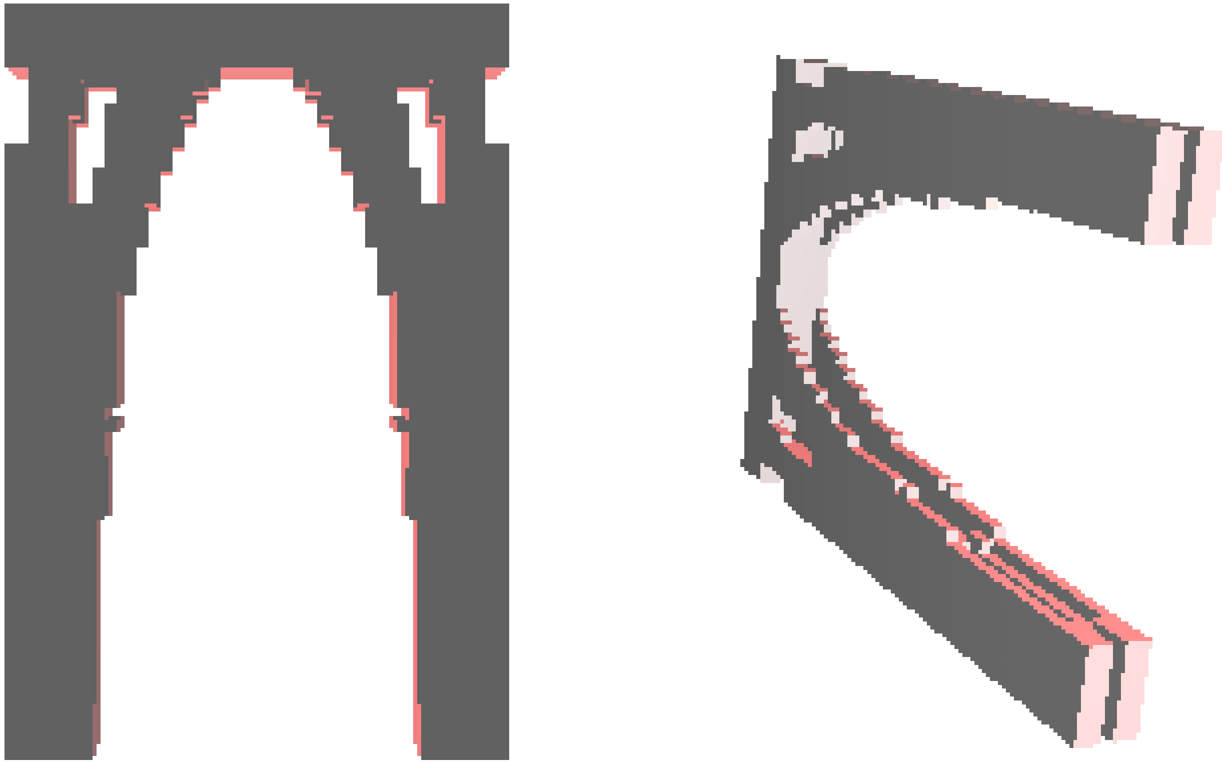
アスペクト比３：２



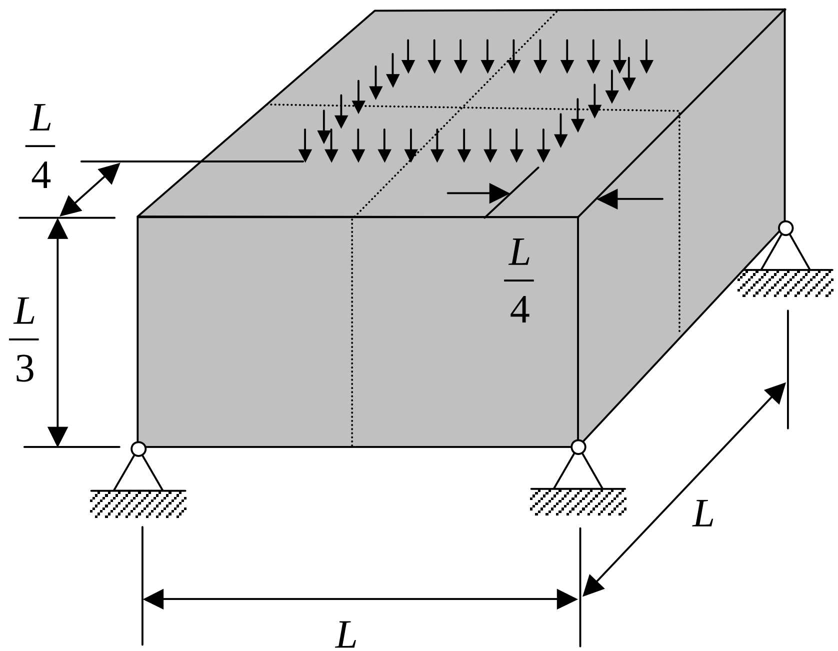
アスペクト比１：１



アスペクト比２：３



要素数の多い例題

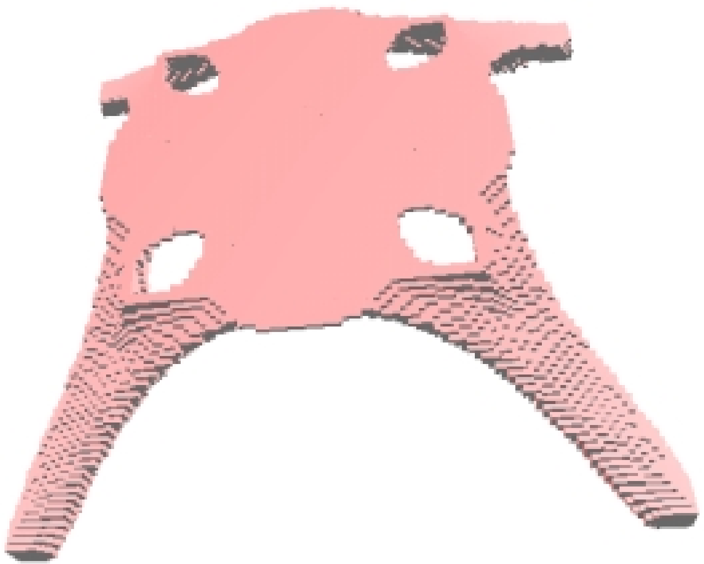


体積制約は領域
体積の5%

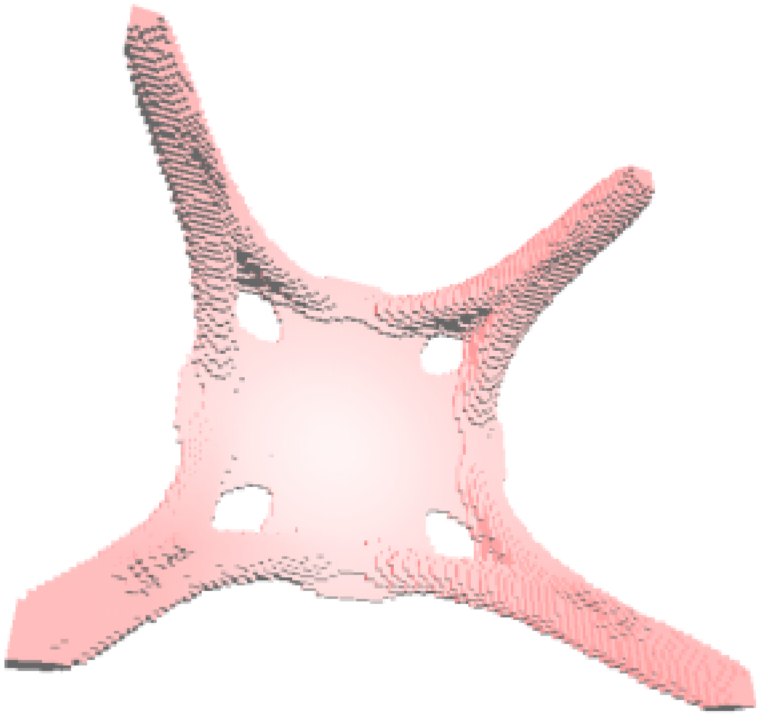
要素分割数は1/4領域で，40×60×60=144000

Intel Celeron 466MHzのパソコンで約37時間

最適位相



上から



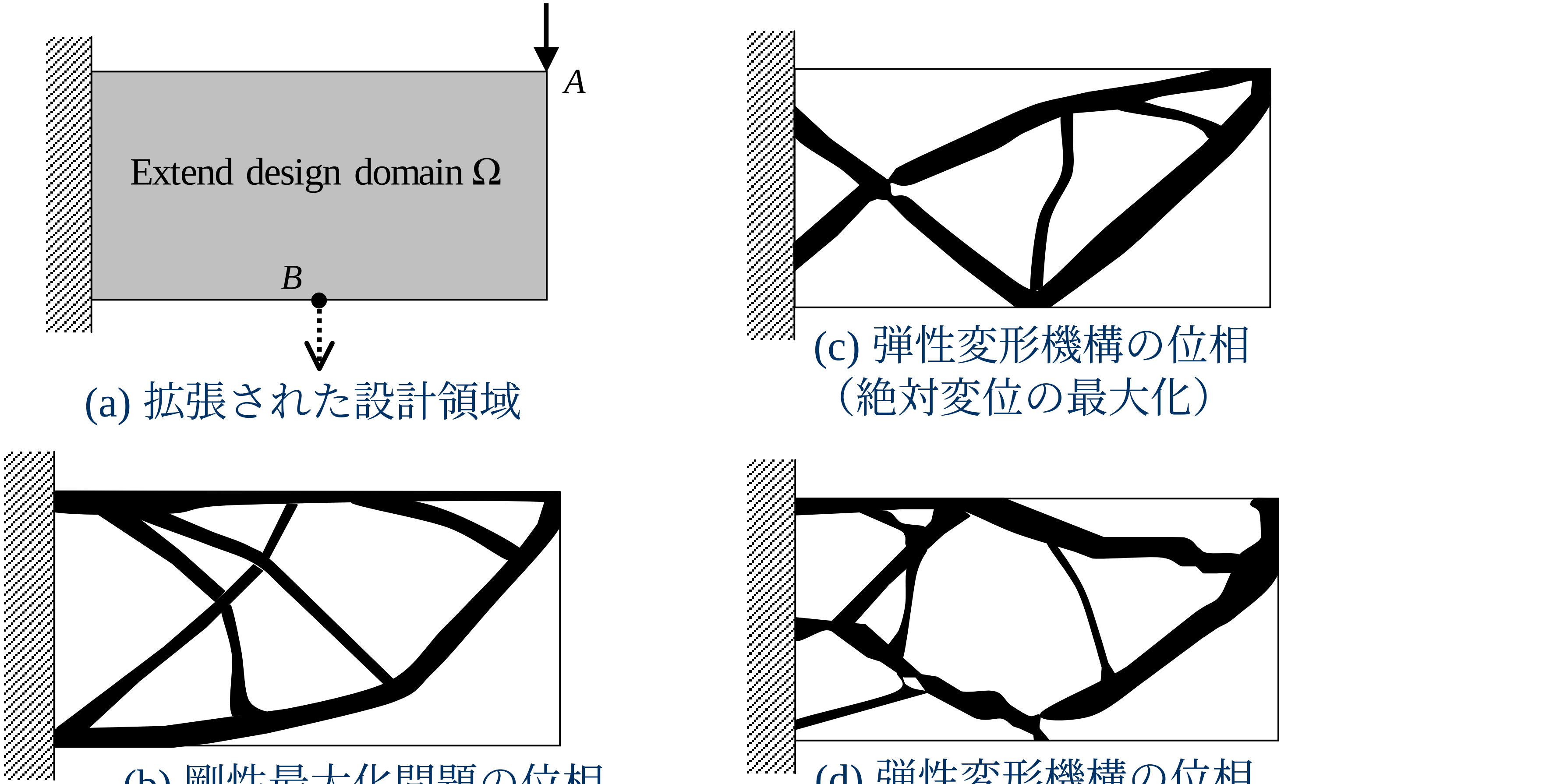
下から

弾性変形機構の位相最適化ツール

弾性変形機構とは？

- 弾性変形機構は，従来の剛性を最大化する構造とは逆に，変形を生み出す構造形態であり，柔軟性が要求される構造を設計する上で重要となる。
- 現在，マイクロ構造のメカニズムの設計等にニーズがある。

絶対変位の最大化と相対変位の最大化



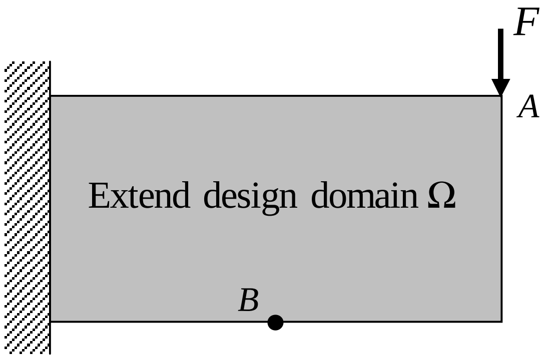
(a) 拡張された設計領域

(c) 弾性変形機構の位相
（絶対変位の最大化）

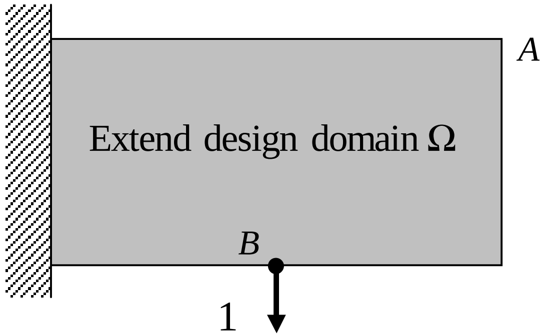
(b) 剛性最大化問題の位相

(d) 弾性変形機構の位相
（相対変位の最大化）

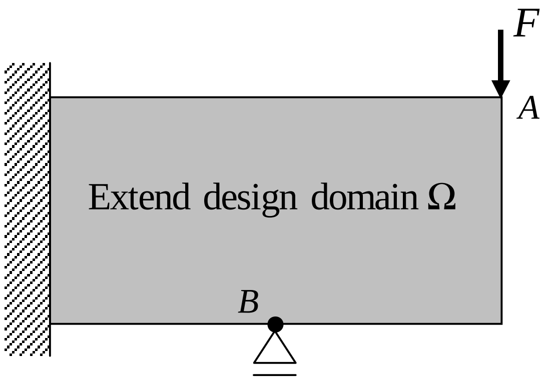
位相最適化のための境界条件と荷重条件



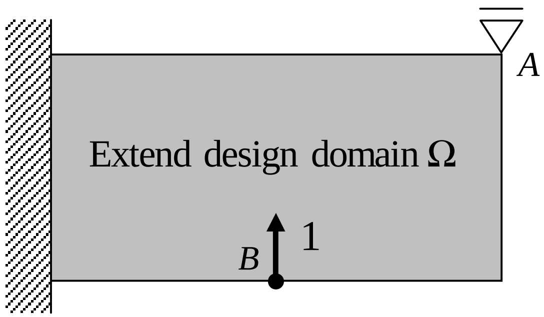
CASE 1



CASE 2



CASE 3



CASE 4

目的関数

$$\text{Maxmize}\left(\frac{L^2\left(\mathbf{u}^1\right)-L^4\left(\mathbf{u}^4\right)}{L^1\left(\mathbf{u}^1\right)+L^3\left(\mathbf{u}^3\right)}\right)$$

（A点から入力する仕事量とB点から出力される仕事量の比）

$$L^1(\mathbf{u}^1)=F\cdot u^1_{2(A)}=\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}^1\right)^T\mathbf{D}^G\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}^1\right)d\Omega$$

$$L^2(\mathbf{u}^1)=1\cdot u^1_{2(B)}=\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}^2\right)^T\mathbf{D}^G\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}^1\right)d\Omega$$

$$L^3(\mathbf{u}^3)=F\cdot u^3_{2(A)}=\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}^3\right)^T\mathbf{D}^G\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}^3\right)d\Omega$$

$$L^4(\mathbf{u}^4)=1\cdot u^4_{2(B)}=\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}^4\right)^T\mathbf{D}^G\boldsymbol{\varepsilon}\left(\left\{\mathbf{u}^4\right\}\right)d\Omega$$

最適化問題の定式化

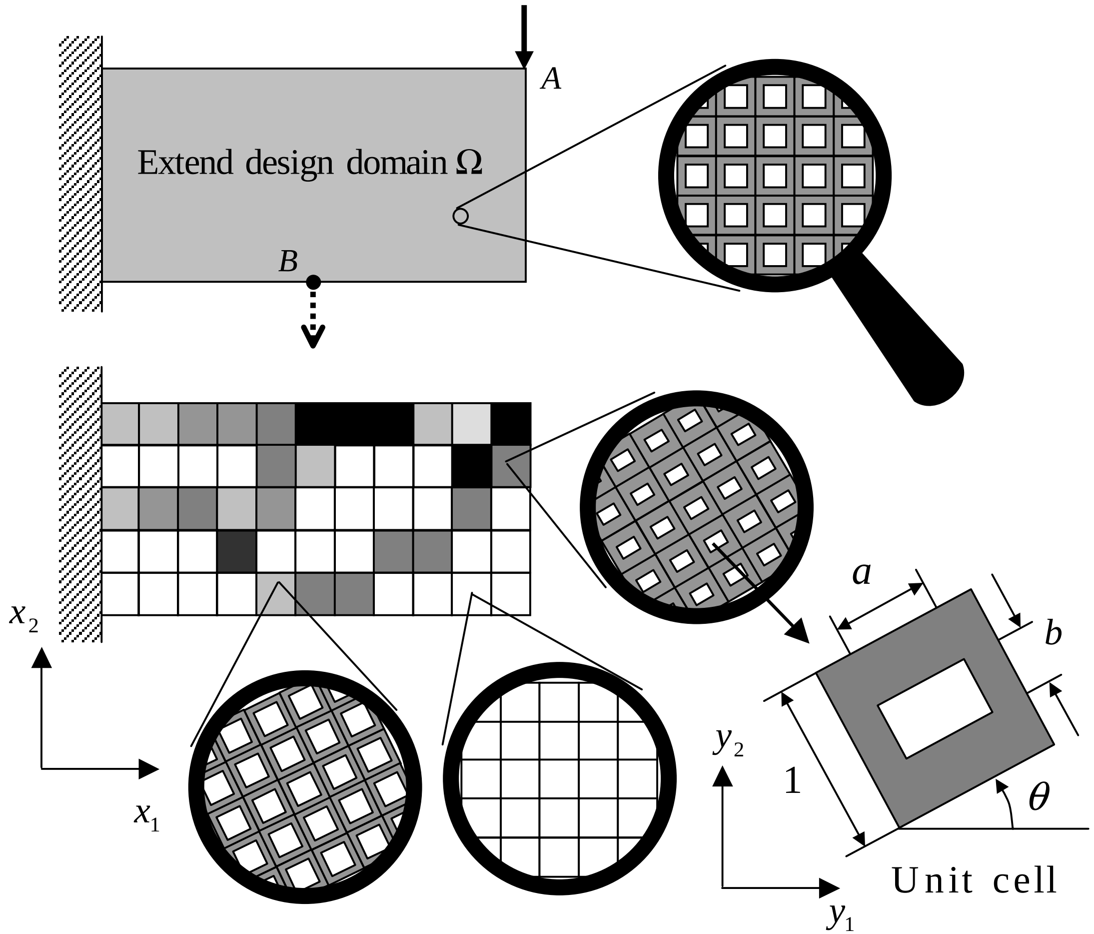
$$\underset{\mathbf{X}}{\text{Maxmize}}\, C(\mathbf{X}) = \left(\frac{L^2\left(\mathbf{u}^1(\mathbf{X})\right) - L^4\left(\mathbf{u}^4(\mathbf{X})\right)}{L^1\left(\mathbf{u}^1(\mathbf{X})\right) + L^3\left(\mathbf{u}^3(\mathbf{X})\right)} \right)$$

$$\mathbf{X} = \{a_1, \cdots, a_N, b_1, \cdots, b_N, \theta_1, \cdots, \theta_N\}$$

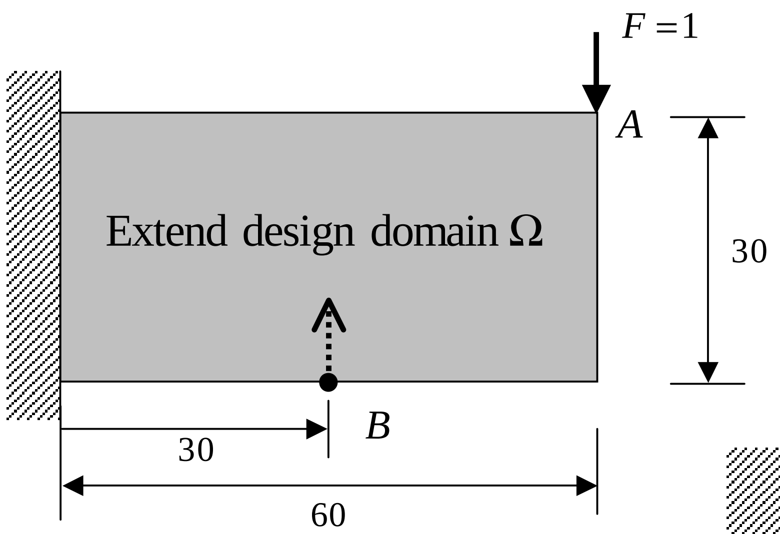
$$\text{subject to} \quad W(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N} (1 - a_i b_i) \le \overline{W}$$

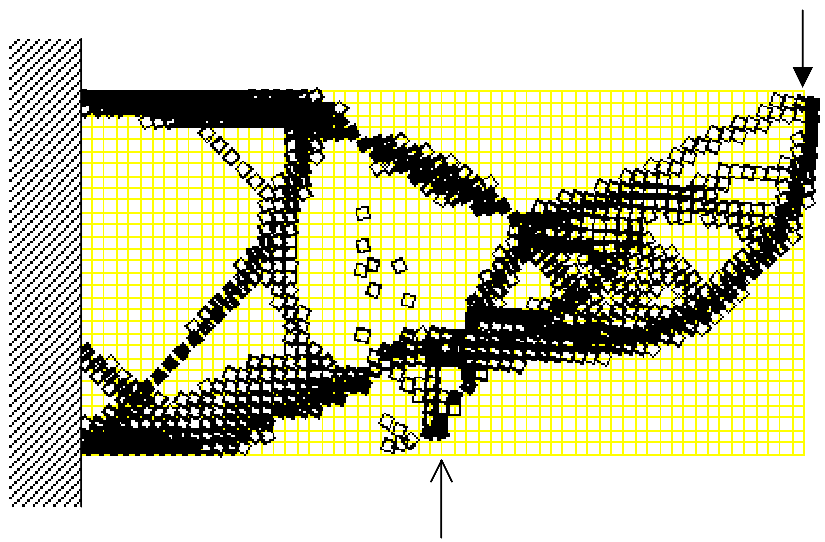
$$10^{-4} \le a_i \le 1 - 10^{-4}, \quad 10^{-4} \le b_i \le 1 - 10^{-4} \quad (i = 1, \cdots, N)$$

均質化設計法の適用

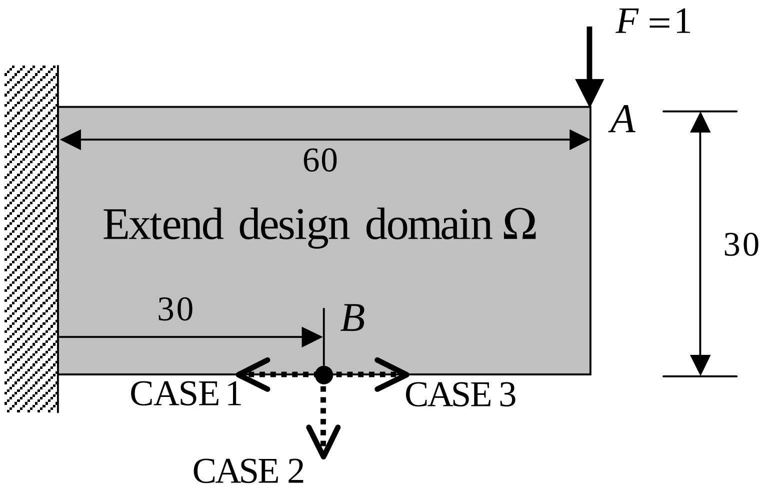


解析例1

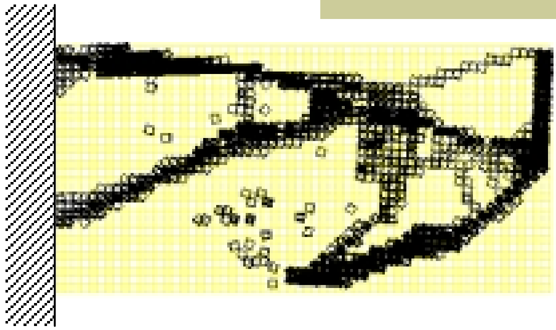




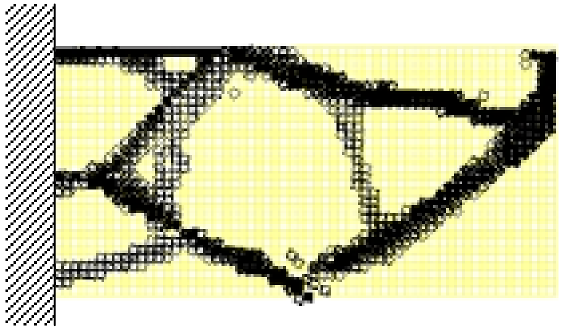
解析例2



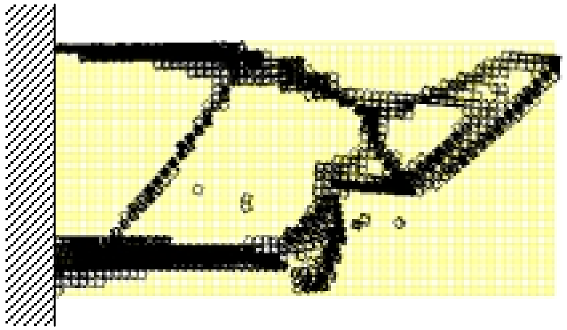
Case1



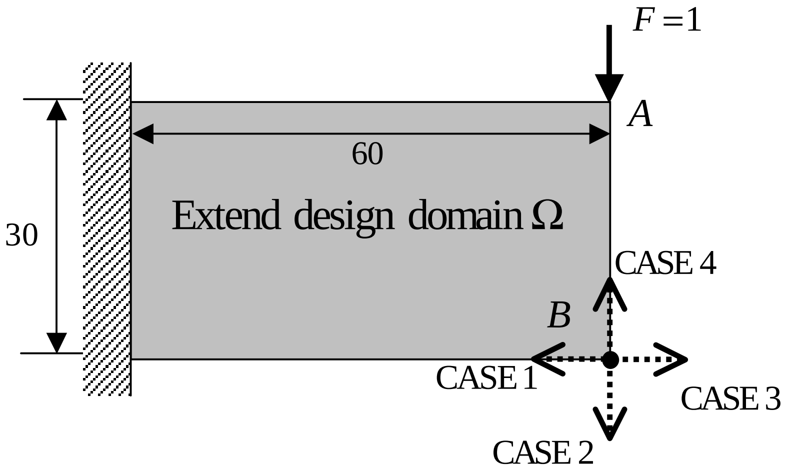
Case2

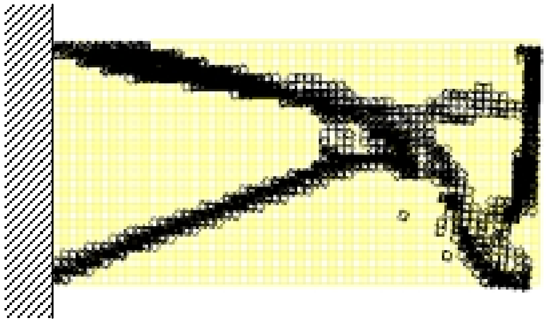


Case3



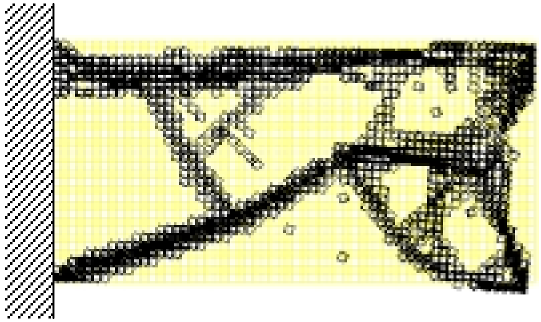
解析例3



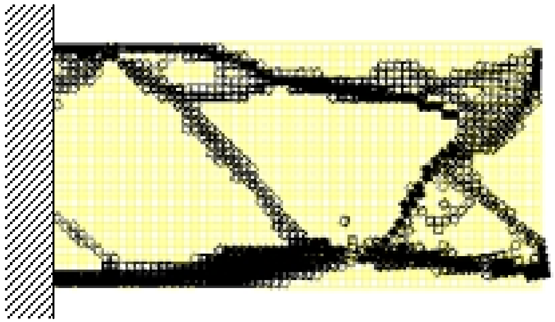


Case1

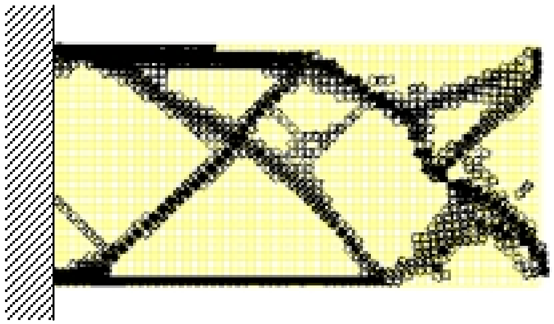
Case2



Case3



Case4

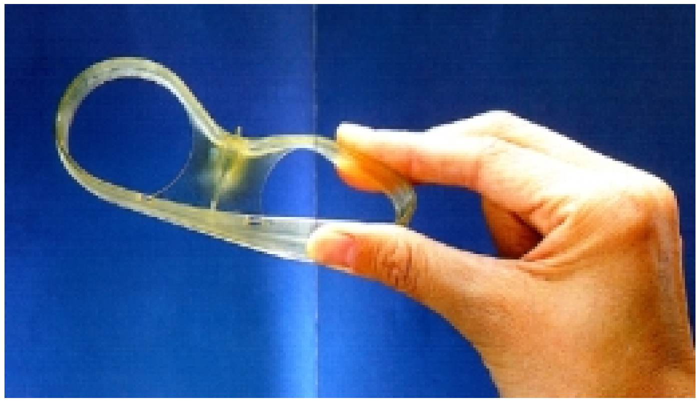


材料の内部構造の位相最適化ツール

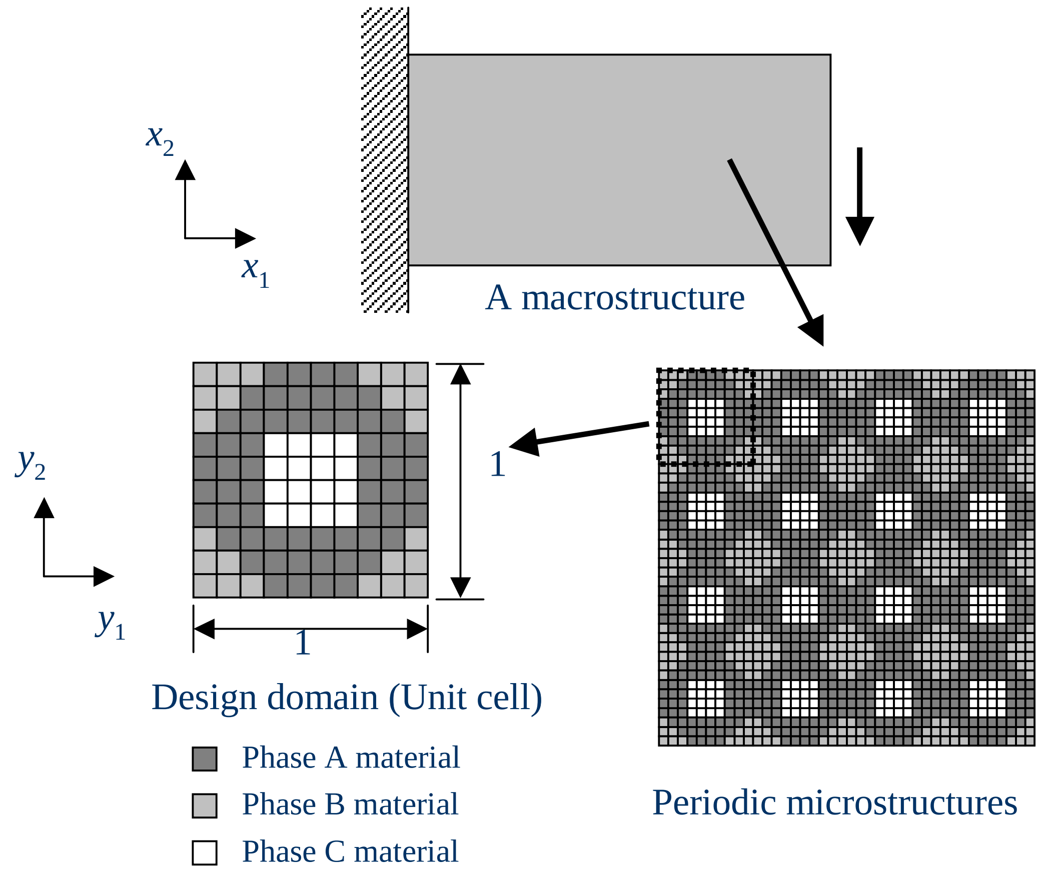
研究の背景

- 光造形法等により製造技術の革命的進歩が起こっている。
- 将来このような製造技術を用いて様々な新しい複合材料を開発できる可能性がある。

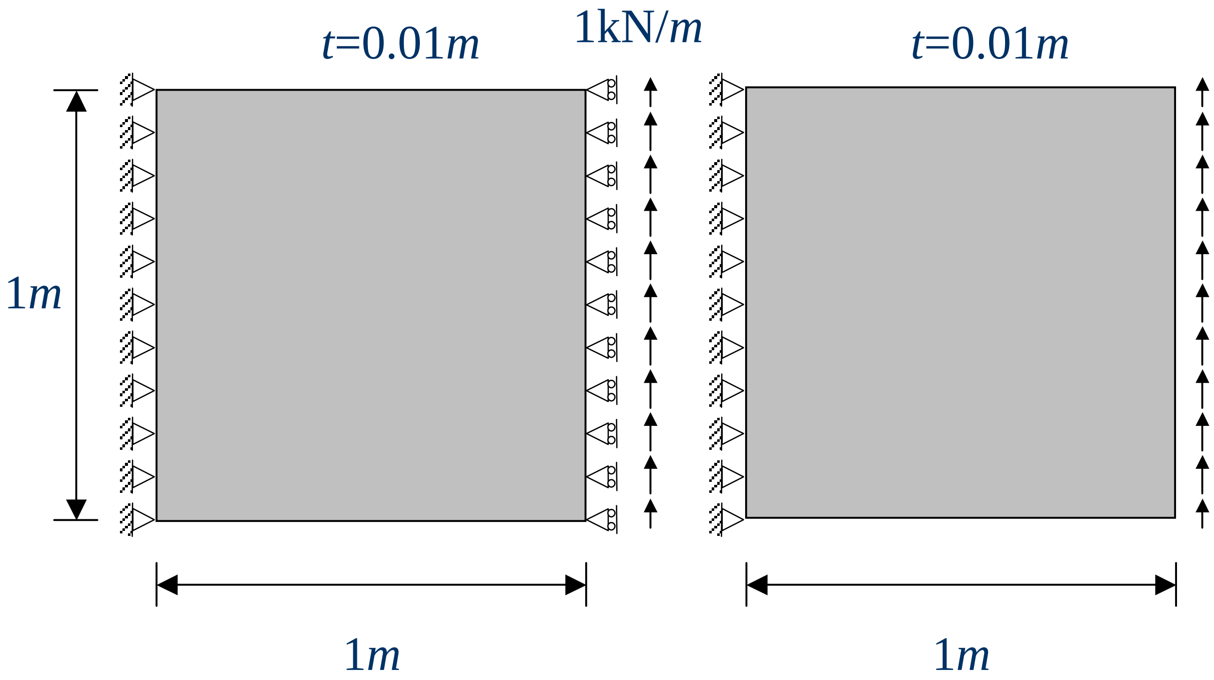
光造形システム



複合材板のミクロ構造の設計

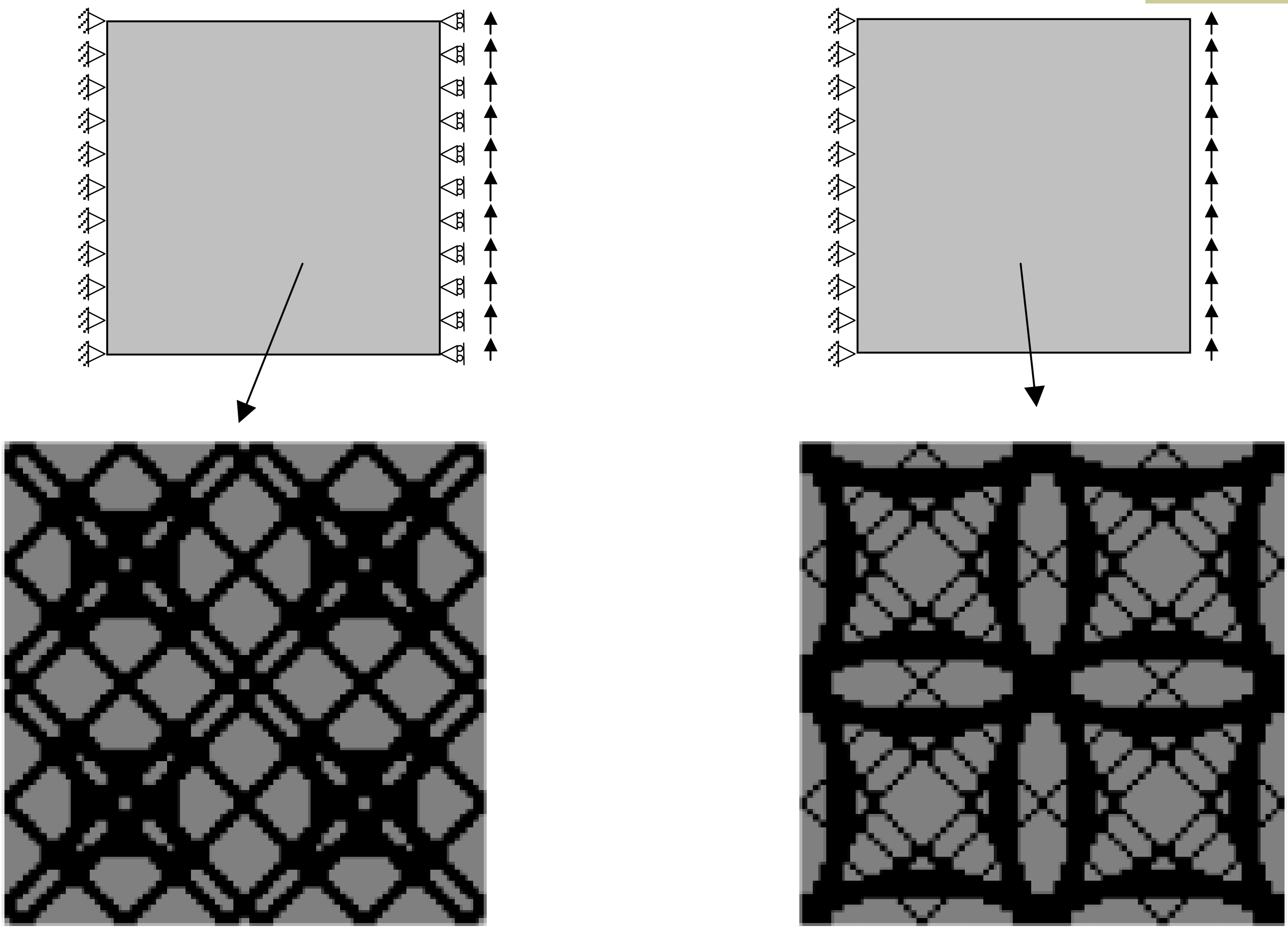


複合材板の材料最適設計

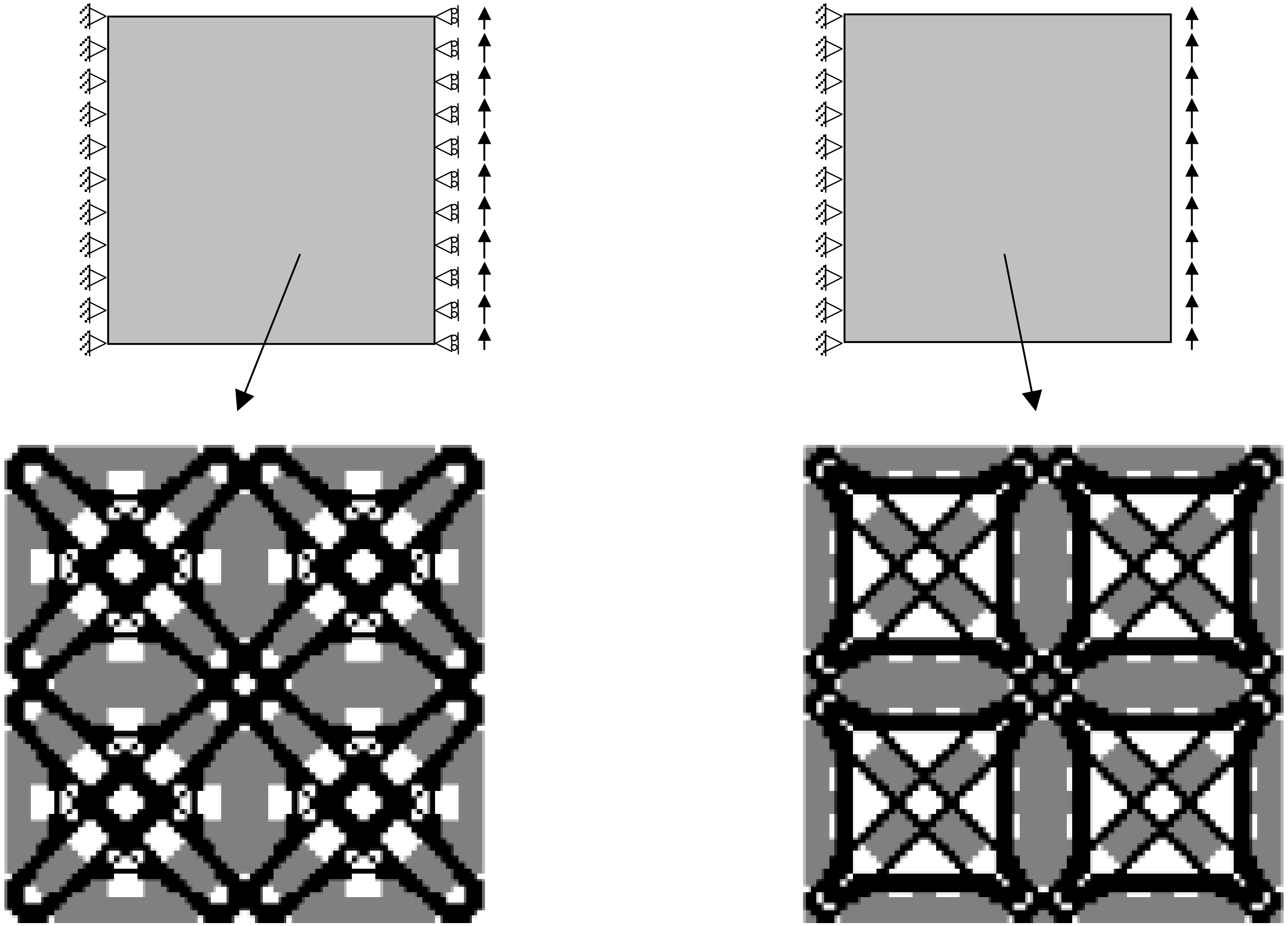


		E (GPa)	ν
Gray Material	Cast Epoxy resin	3.0	0.25
Black Material	E-Glass Fiber	72.4	0.15
White Material	Void	10^{-7}	0.25

2種材料の最適位相



3種材料の最適位相



応用の可能性

- 環境に優しい材料の開発
  - 剛性を落とさずにリサイクル不可能材を吸収
- 熱による変形が生じない材料

まとめと展望

- コンセプトデザインツールとして，骨組，2次元，3次元連続体の位相最適化ツールを開発した。また，建築分野への普及を目的として教育用ソフトとして整備した。
- 計算力学手法により，建築物の形態の創生が行えることには非常に魅力があり，これまでの建築学科になかった新しい分野になることが期待できる。
- 光造形法等の装置と組み合わせることで，設計，CAD，プロトタイプ（模型）の作成，実験というようなプロジェクトベースの教育プログラムを作ることができる可能性がある。

ご静聴ありがとうございました。

サグラダ・ファミリア
完成図