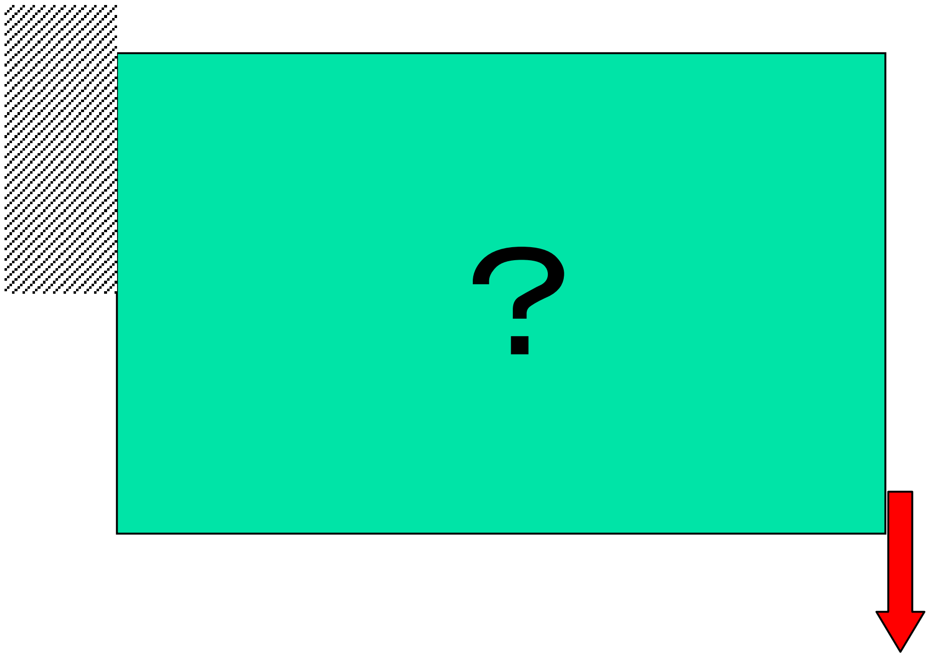
均質化設計法

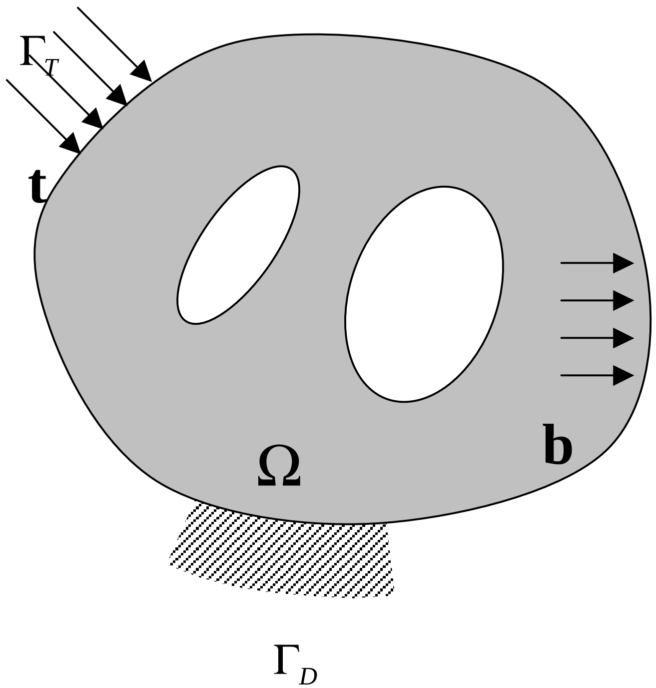
藤井大地
（東京大学）

位相最適化



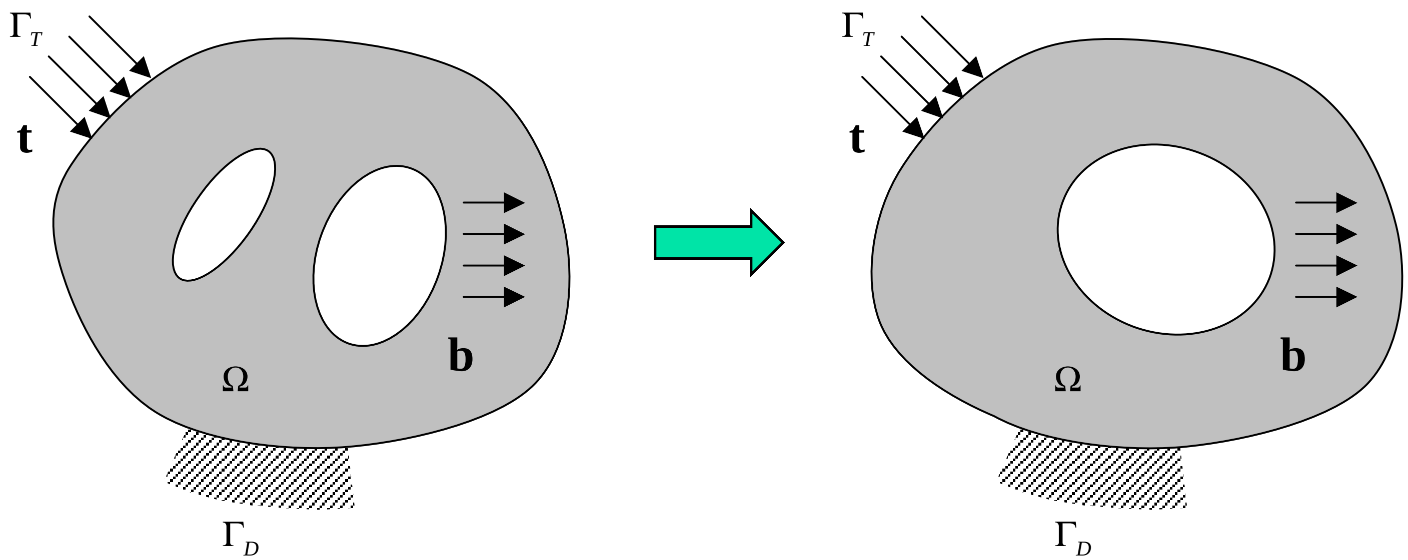
従来の考え方

- 境界形状を変化させて最適な形状・位相を求める。



境界形状を変化させる問題点

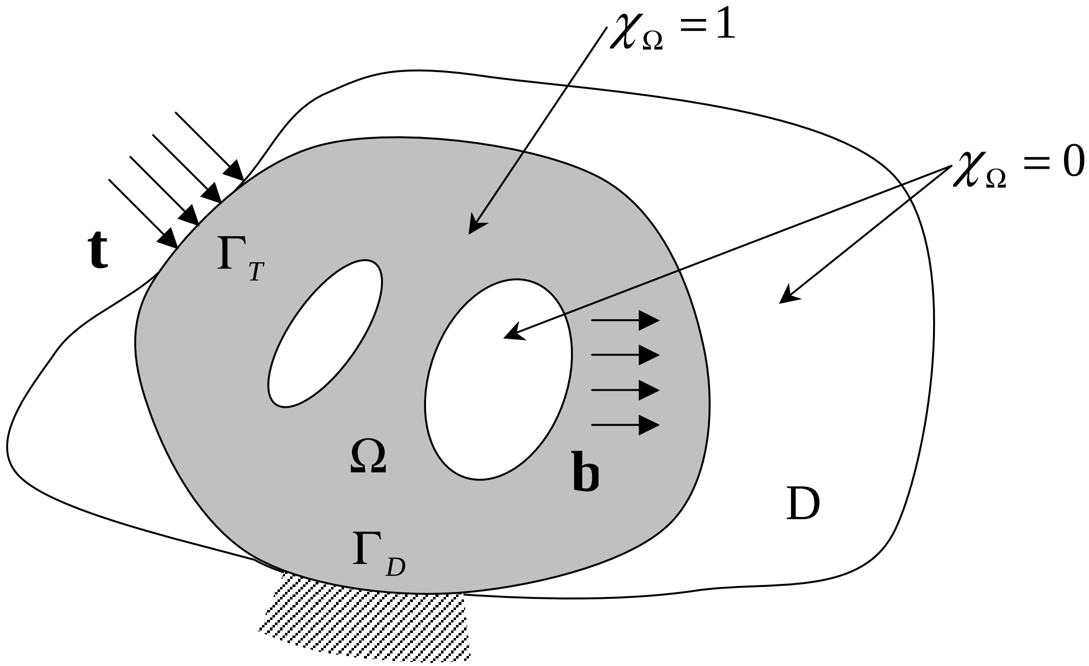
- 解析が進むにつれて，有限要素メッシュが異形になり，再メッシュが必要になる。
- 位相が変化する問題への適応が難しい。



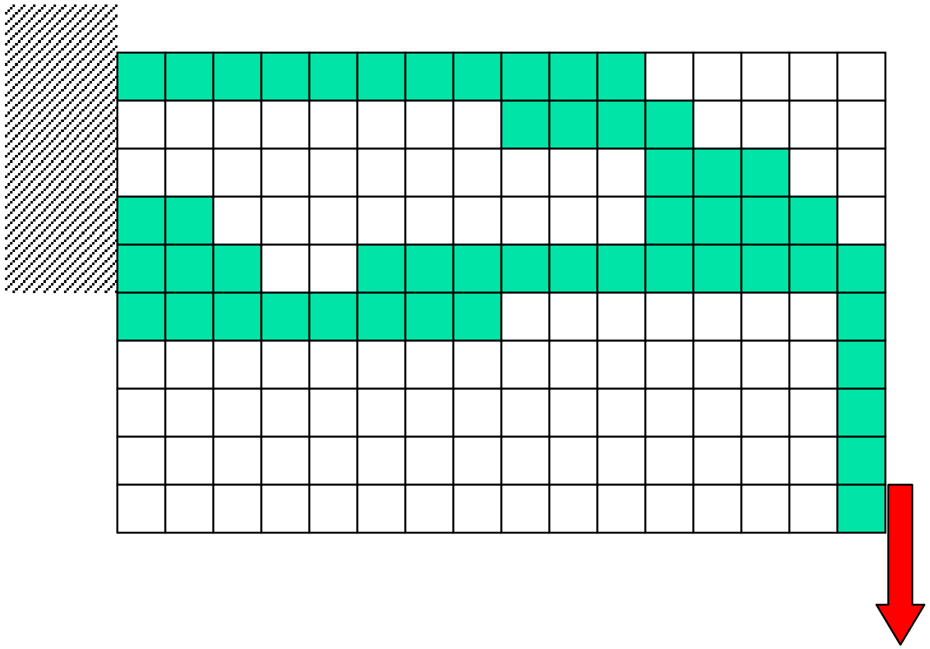
領域の拡張と特性関数の導入

$$\chi_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{if} \quad \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases}$$

1985 Muratら



材料のON/OFF問題



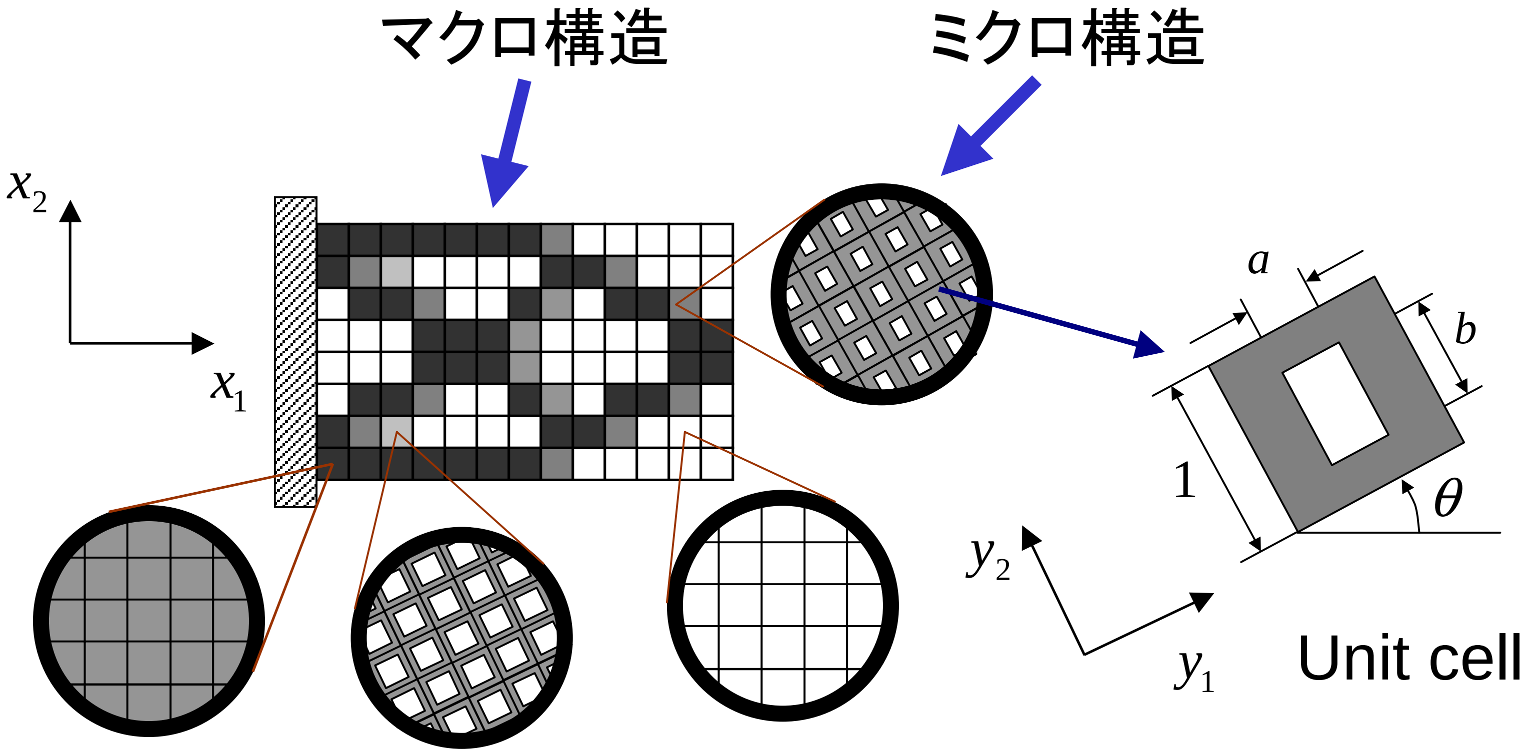
整数計画問題

微分不可能問題

位相最適化の手法

- 連続緩和法（整数条件の緩和）
  - 均質化設計法（ミクロ的な材料のON/OFF）
  - 密度法（材料定数が密度のべき乗に比例）
- 離散最適化問題として解く方法
  - 遺伝的アルゴリズムを利用した方法
  - セル・オートマトンを利用した方法
  - ESO法（Evolutionary Structural Optimization)

均質化設計法(HDM)



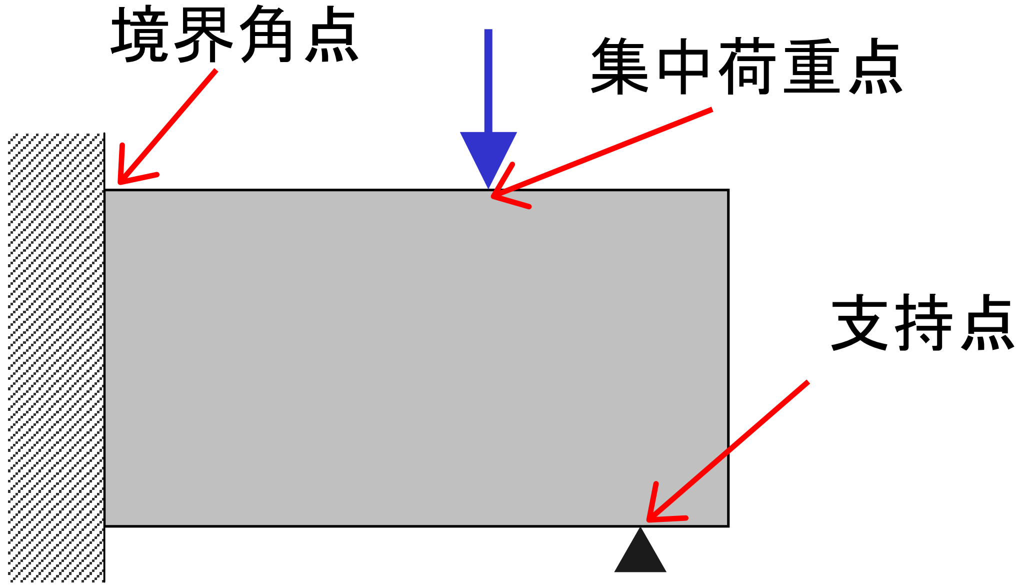
質量制約条件下で外力の仕事量の最小化

均質化設計法の目的関数

- 従来の最適化問題
  - 応力の制約条件の下での重量の最小化
- 均質化設計法
  - 重量制約条件の下でのコンプライアンス（外力の仕事量）の最小化
  - さらに一般的には，最小ポテンシャルエネルギーの最大化

なぜ応力の制約を用いない？

- 連続体ではいたるところで応力は発散！



なぜコンプライアンスの最小化？

- コンプライアンスを最小化することで構造物の剛性が最大化される。
- 応力は局所的に発散してもコンプライアンスは有限値となる。
- コンプライアンスと応力との間には関係があり，コンプライアンスが最小化されれば，最大応力も抑えられる 。
- 感度解析が非常に容易になる。

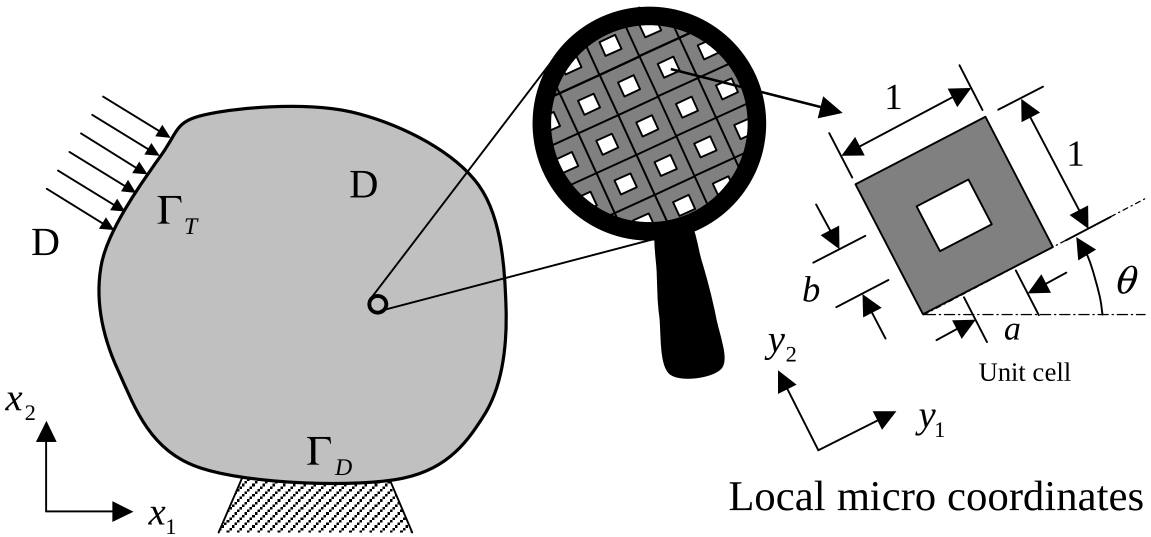
最小ポテンシャルエネルギーの最大化の方がより一般的

- 外力が与えられる問題では，コンプライアンスの最小化
- 変位が与えられる問題では，コンプライアンスの最大化
- 外力が与えられる問題も，変位が与えられる問題も，最小ポテンシャルエネルギーの最大化問題となる。

均質化設計法の最適化問題

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{L}}\left[\min_{\mathbf{v}_0\in\mathbf{K}}\left[\Pi(\mathbf{v}_0)=\frac{1}{2}\int_D(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_0)^T\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\alpha})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_0)\,dD-\int_{\Gamma_T}\mathbf{v}_0{}^T\mathbf{t}\,d\Gamma\right]\right]$$

$$\mathbf{L}=\left\{\boldsymbol{\alpha}\,\middle|\,0\le a\le 1,\ 0\le b\le 1,\ \int_D\rho dD\le m_S\right\},\quad \mathbf{K}=\left\{\mathbf{v}_0\,\middle|\,\mathbf{v}_0=\mathbf{g}\quad \text{on }\Gamma_D\right\}$$



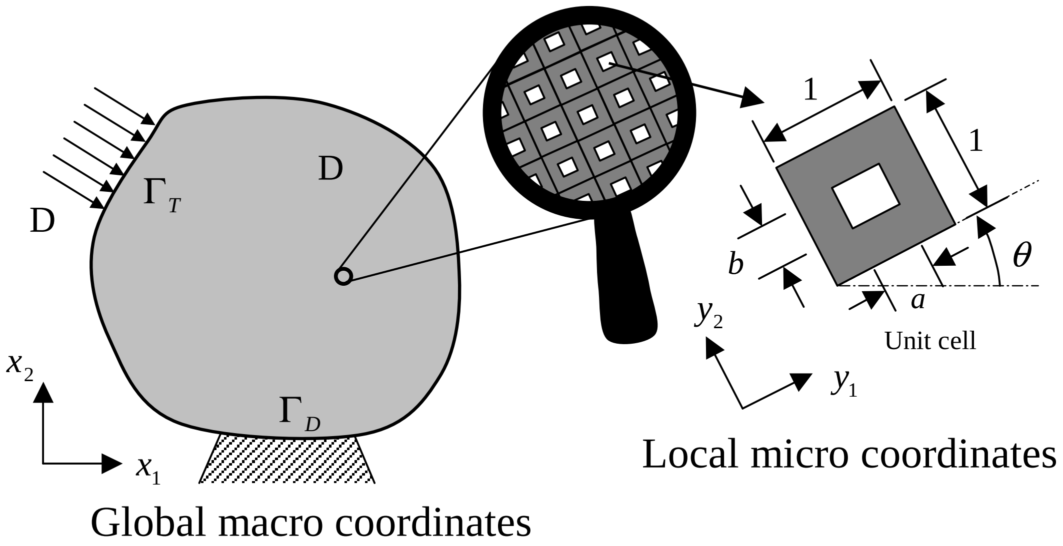
Global macro coordinates

Local micro coordinates

均質化された弾性マトリックス

$$\mathbf{D}^H(a,b,\theta) = \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{D}^H(a,b)\mathbf{R}(\theta)$$

$$\mathbf{D}^H(a,b) = \min_{\substack{\boldsymbol{\chi} \\ \text{periodic}}} \left[\int_Y (\mathbf{I} - \partial_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\chi})^T \mathbf{D}^E (\mathbf{I} - \partial_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\chi})\, dY \right]$$



$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

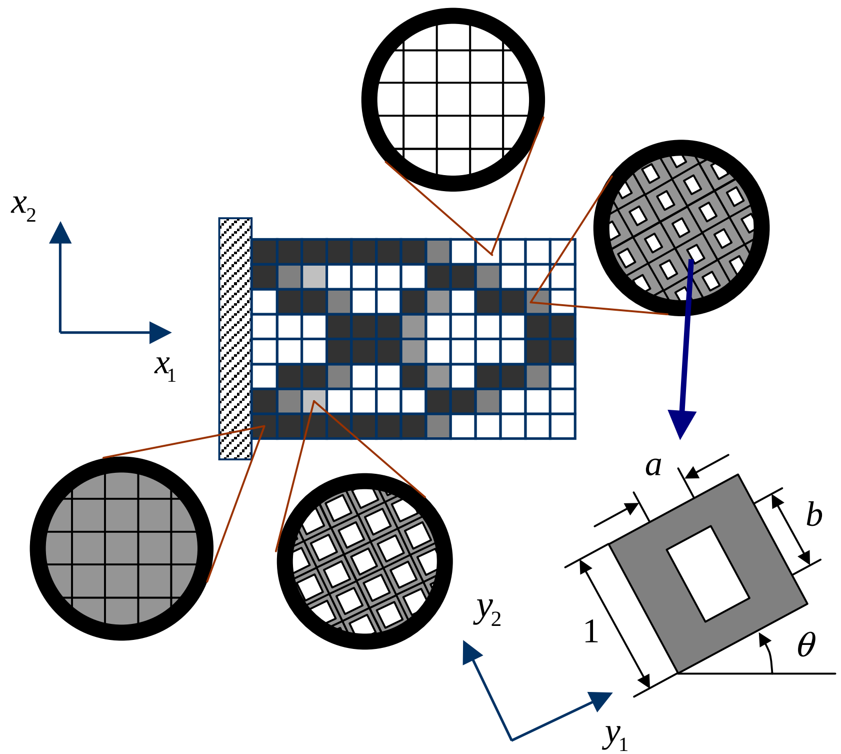
$\boldsymbol{\chi}$ ：ミクロ構造の特性変位関数

有限要素法による離散化

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{L}}\left[\mathbf{d}^T\mathbf{K}_0\mathbf{d}\right], \qquad \mathbf{L}=\left\{\boldsymbol{\alpha}\,\middle|\,0\le a\le 1,\ 0\le b\le 1,\ \int_D \rho\, dD\le m_S\right\}$$

要素剛性マトリックス

$$\mathbf{K}_{0e}=\mathbf{T}_e^{\ T}\int_{D_e}\mathbf{B}_0^{\ T}\mathbf{D}^H\mathbf{B}_0\,dD_e\mathbf{T}_e$$



均質化弾性マトリックスの離散化

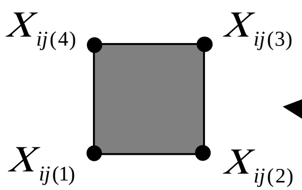
$$\boxed{\mathbf{D}^H = \int_Y \mathbf{D}\,dY - \mathbf{X}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{K}_{1e}\mathbf{X}_e = \mathbf{q}_e$$

$$\mathbf{K}_{1e} = \int_{Y_e} \mathbf{B}_1{}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1\, dY_e$$

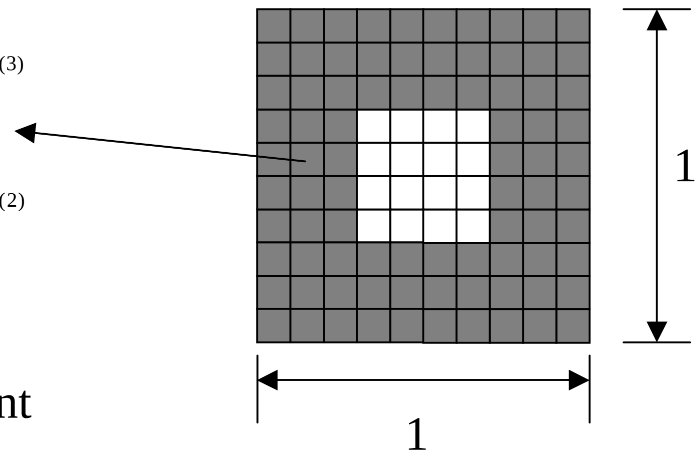
$$\mathbf{q}_e = \int_{Y_e} \mathbf{B}_1{}^T \mathbf{D}\, dY_e$$

$$\chi = \mathbf{N}_1 \mathbf{X}_e \qquad \partial_{\mathrm{y}}\chi = \mathbf{B}_1 \mathbf{X}_e$$



i=1,2
j=1,2,3

Finite element

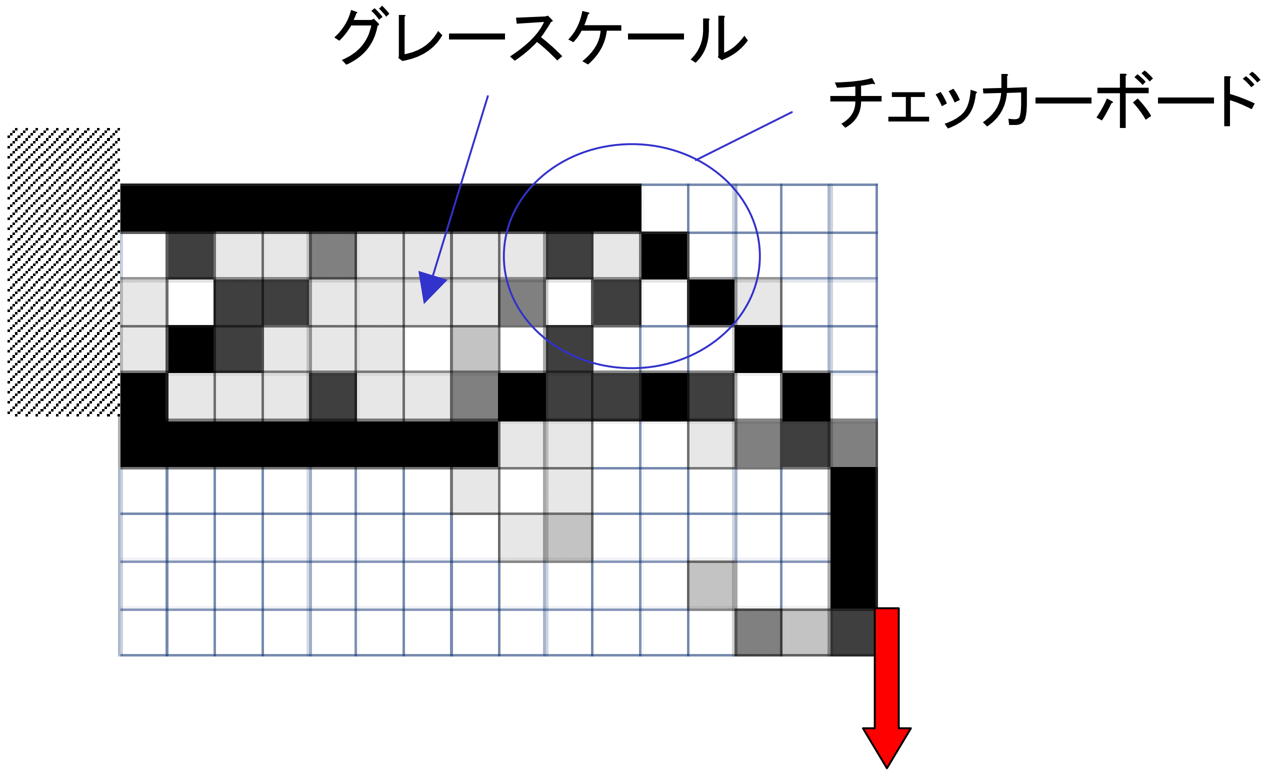


ユニットセル

計算の効率化

- 均質化弾性マトリックス$\mathbf{D}^H$のデータベース化
  - 穴の大きさa,bに関してデータベースを作成する。
  - データベースの値を利用して，その間の値は補間関数を用いて補間する。
- ユニットセルの角度θは，その要素の応力の主軸方向に一致させる。

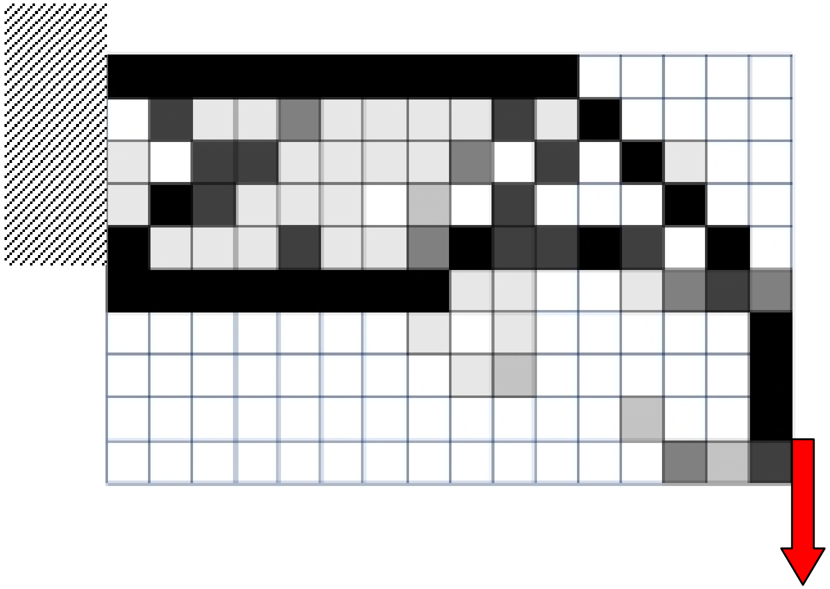
均質化設計法の解

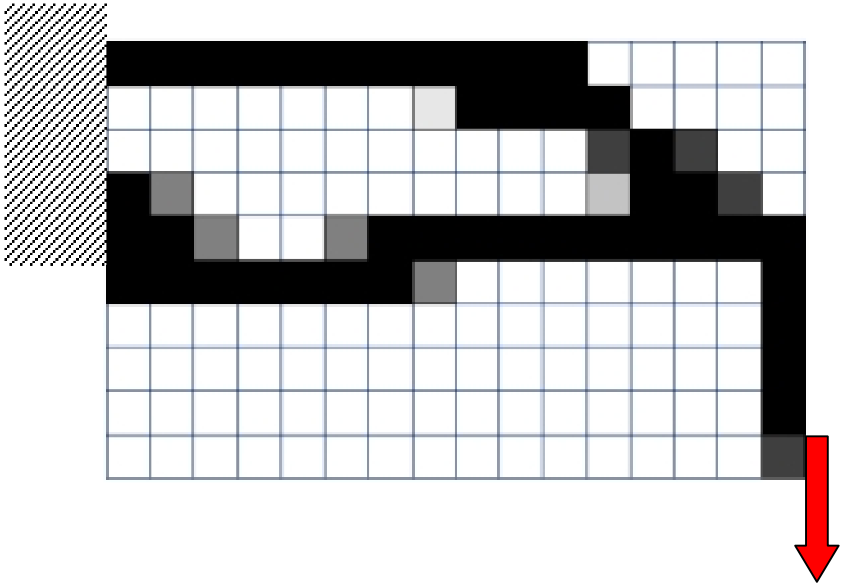


フィルタリング法

- 境界線長さの制約法（Perimeter control）
  - チェッカーボードを防ぎ，シンプルな位相形状を求めることができる。
  - グレースケールを防ぐ処理を付加する必要がある。
- 重力制御法（gravity control）
  - チェッカーボードもグレースケールも同時に防ぎ，シンプルな位相形状を求めることができる。

フィルタリングの効果

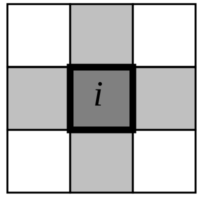




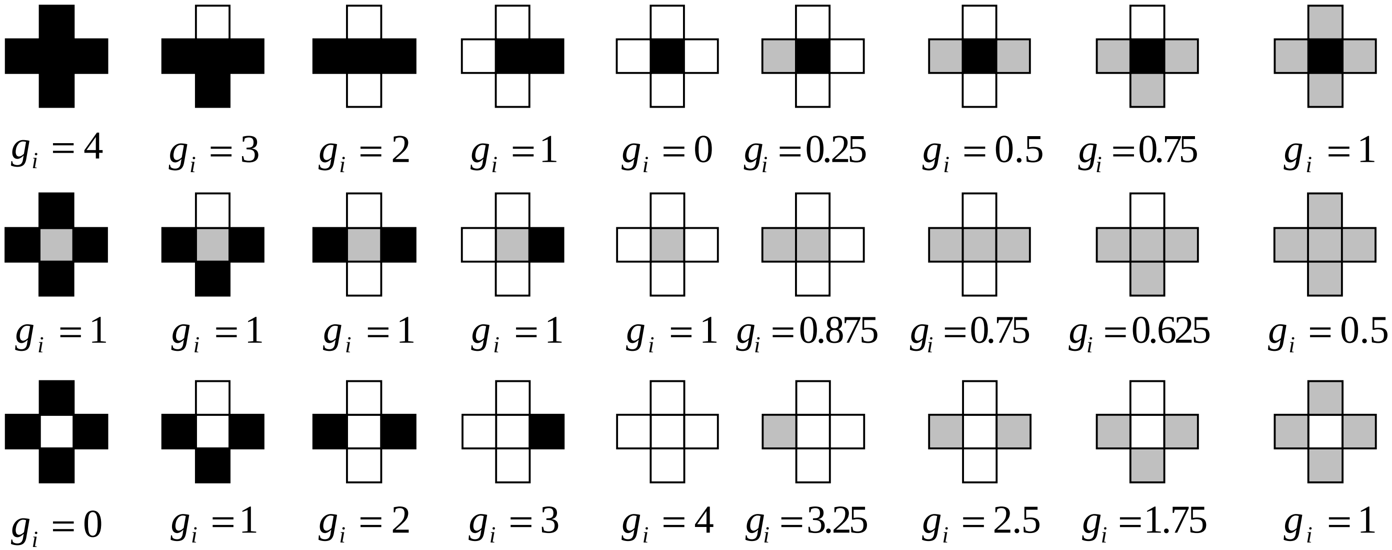
重力制御関数

$$G=\sum_{i=1}^{N} g_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\left(\rho_i\cdot\rho_j+\bar{\rho}_i\cdot\bar{\rho}_j\right)\Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\rho_i=1-a_i b_i,\quad \bar{\rho}_i=1-\rho_i,\quad 0<G\le 1$$



$m_i = 4$



要素密度が0, 0.5, 1の場合の*gravity control* 関数g_i値

フィルタリングの導入法

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}}\left[C(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}\right] \qquad \boldsymbol{\alpha}=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_N,b_1,b_2,\cdots,b_N\right\}$$

subject to :

$$W=\sum_{i=1}^{N}\left(1-a_i b_i\right)\le \overline{W}, \quad 0\le \alpha_i \le 1, \quad i=1,\cdots,2N$$

⇧ 制約条件として加える

$$G \ge \overline{G}$$

ただし，$G(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\left[\rho_i\rho_j+\left(1-\rho_i\right)\left(1-\rho_j\right)\right]\Big/\sum_{i=1}^{N} m_i$

最適化問題の解法

- 逐次線形計画法(SLP)
  - 制約条件の扱いが易しくロバスト性が高い
  - 対称問題を解いても対称な位相が求まらない
- 最適性規準法(OC)
  - 制約条件の数は限られるが収束が速い
  - 対称問題では対称な最適位相が得られる
- 凸線形化法(CONLIN)
  - 多数の制約条件を扱え，収束も速い
  - 対称問題では対称な最適位相が得られる。

最適性規準法による解法

<u>ラグラジアンの定義</u>

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \underline{C(\boldsymbol{\alpha})} - \Lambda \underline{\left(\sum_{i=1}^{N} (1 - a_i b_i) - \bar{W} \right)} - \Lambda_g \underline{\left(\bar{G} - G(\boldsymbol{\alpha}) \right)}$$

歪みエネルギーの2倍
（平均コンプライアンス）

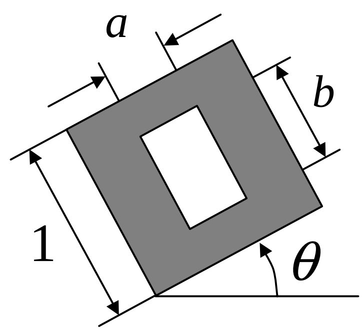
質量制約条件

重力制御関数
制約条件

$$\boldsymbol{\alpha} = \left\{ a_1, a_2, \cdots, a_N, b_1, b_2, \cdots, b_N \right\}$$

:各要素のミクロ構造ユニットセルの穴の大きさ

穴の角度 θ は要素中心の応力の主軸方向



最適性規準から得られる更新式

ラグラジアン最小化の条件

$$\delta L(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial C(\boldsymbol{\alpha})}{\partial a_i} + b_i\Lambda + \frac{\partial G(\boldsymbol{\alpha})}{\partial a_i}\Lambda_g\right)\delta a_i + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial C(\boldsymbol{\alpha})}{\partial b_i} + a_i\Lambda + \frac{\partial G(\boldsymbol{\alpha})}{\partial b_i}\Lambda_g\right)\delta b_i - \left(\sum_{i=1}^{N}(1-a_i b_i) - \bar{W}\right)\delta\Lambda - \left(\bar{G} - G(\boldsymbol{\alpha})\right)\delta\Lambda_g = 0$$

$$a_i^{(k+1)} = \left[-\frac{b_i^{(k)}\Lambda^{(k)} + \dfrac{\partial G\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i^{(k)}}\Lambda_g^{(k)}}{\dfrac{\partial C\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i^{(k)}}}\right]^{\beta} a_i^{(k)}$$

$$\Lambda^{(k+1)} = \left[\frac{1}{\bar{W}}\sum_{i=1}^{N}\left(1 - a_i^{(k)} b_i^{(k)}\right)\right]^{\beta}\Lambda^{(k)}$$

$$\Lambda_g^{(k+1)} = \left[\frac{\bar{G}}{G\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}\right]^{\beta}\Lambda_g^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = \left[-\frac{a_i^{(k)}\Lambda^{(k)} + \dfrac{\partial G\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial b_i^{(k)}}\Lambda_g^{(k)}}{\dfrac{\partial C\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial b_i^{(k)}}}\right]^{\beta} b_i^{(k)}$$

更新式の導出法

$$\boxed{\frac{\partial C(\boldsymbol{\alpha})}{\partial a_i} + b_i \Lambda + \frac{\partial G(\boldsymbol{\alpha})}{\partial a_i} \Lambda_g = 0}$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{b_i \Lambda + \dfrac{\partial G(\boldsymbol{\alpha})}{\partial a_i} \Lambda_g}{\dfrac{\partial C\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i{}^{(k)}}} \right] = 1 \quad \Rightarrow \left[-\frac{b_i \Lambda + \dfrac{\partial G(\boldsymbol{\alpha})}{\partial a_i} \Lambda_g}{\dfrac{\partial C\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i{}^{(k)}}} \right]^{\beta} = \frac{a_i}{a_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_i{}^{(k+1)} = \left[-\frac{b_i{}^{(k)} \Lambda^{(k)} + \dfrac{\partial G\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i{}^{(k)}} \Lambda_g{}^{(k)}}{\dfrac{\partial C\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i{}^{(k)}}} \right]^{\beta} a_i{}^{(k)}}$$

β : 更新幅を制御
するべき乗係数

変数制約条件の考慮

$$\boxed{0 \le a_i \le 1, \quad 0 \le b_i \le 1 \quad \left(i = 1, \cdots, N\right), \quad \Lambda \le 0, \quad \Lambda_g \le 0}$$

$$a_i^{(k+1)} = \min\left\{\max\left\{0,\ s_{ai}^{(k)}\right\},\ 1\right\}$$

$$b_i^{(k+1)} = \min\left\{\max\left\{0,\ s_{bi}^{(k)}\right\},\ 1\right\}$$

$$\Lambda^{(k+1)} = \min\left\{0,\ \left[\frac{1}{m_S}\sum_{i=1}^{N}\left(1 - a_i^{(k)} b_i^{(k)}\right)\right]^{\beta} \Lambda^{(k)}\right\}$$

$$\Lambda_g^{(k+1)} = \min\left\{0,\ \left[\frac{\bar{G}}{G\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}\right]^{\beta} \Lambda_g^{(k)}\right\}$$

ただし,

$$s_{ai}^{(k)} = \left[-\frac{b_i^{(k)} \Lambda^{(k)} + \dfrac{\partial G\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i} \Lambda_g^{(k)}}{\dfrac{\partial C\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i^{(k)}}} \right]^{\beta} a_i^{(k)}$$

$$s_{bi}^{(k)} = \left[-\frac{a_i^{(k)} \Lambda^{(k)} + \dfrac{\partial G\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial b_i^{(k)}} \Lambda_g^{(k)}}{\dfrac{\partial C\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial b_i^{(k)}}} \right]^{\beta} b_i^{(k)}$$

設計変数のムーブリミット

$$a_i^{(k+1)} = \begin{cases} \max\left\{(1-\zeta)a_i^{(k)}, 0\right\} & \text{if} \quad s_{ai}^{(k)} \le \max\left\{(1-\zeta)a_i^{(k)}, 0\right\} \\ s_{ai}^{(k)} & \text{if} \quad \max\left\{(1-\zeta)a_i^{(k)}, 0\right\} \le s_{ai}^{(k)} \le \min\left\{(1+\zeta)a_i^{(k)}, 1\right\} \\ \min\left\{(1+\zeta)a_i^{(k)}, 1\right\} & \text{if} \quad \min\left\{(1+\zeta)a_i^{(k)}, 1\right\} \le s_{ai}^{(k)} \end{cases}$$

$$b_i^{(k+1)} = \begin{cases} \max\left\{(1-\zeta)b_i^{(k)}, 0\right\} & \text{if} \quad s_{bi}^{(k)} \le \max\left\{(1-\zeta)b_i^{(k)}, 0\right\} \\ s_{bi}^{(k)} & \text{if} \quad \max\left\{(1-\zeta)b_i^{(k)}, 0\right\} \le s_{bi}^{(k)} \le \min\left\{(1+\zeta)b_i^{(k)}, 1\right\} \\ \min\left\{(1+\zeta)b_i^{(k)}, 1\right\} & \text{if} \quad \min\left\{(1+\zeta)b_i^{(k)}, 1\right\} \le s_{bi}^{(k)} \end{cases}$$

ζ :設計変数の変動幅を制約するムーブリミット

各ステップ内での更新

$$s_{ai}^{(k+1)} = \left[-\frac{b_i^{(k)} \underline{\Lambda^{(k+1)}} + \dfrac{\partial G\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i^{(k)}} \underline{\Lambda_g^{(k+1)}}}{\dfrac{\partial C\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial a_i^{(k)}}} \right]^{\beta} a_i^{(k)}$$

$$s_{bi}^{(k+1)} = \left[-\frac{a_i^{(k)} \underline{\Lambda^{(k+1)}} + \dfrac{\partial G\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial b_i^{(k)}} \underline{\Lambda_g^{(k+1)}}}{\dfrac{\partial C\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)}{\partial b_i^{(k)}}} \right]^{\beta} b_i^{(k)}$$

制約条件をアクティブにする。ただし，感度係数は更新しない

最適性規準法のパラメータ

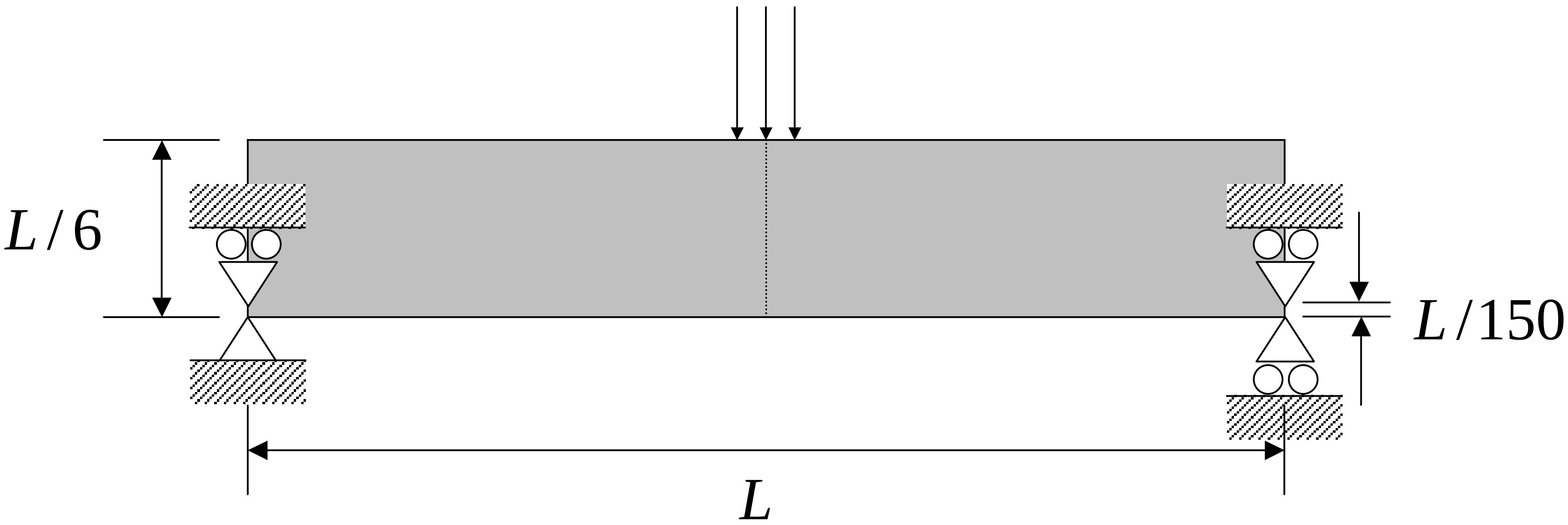
- 更新式のべき乗係数 β
- 設計変数のムーブリミット ζ
- 設計変数，ラグランジェ乗数の更新回数
  - 感度係数を更新する外側ループの繰返し数
  - 感度係数を更新しない内側ループの繰返し数

$\beta = 0.25, \quad \zeta = 0.1$ 外側ループの繰返し数 40回

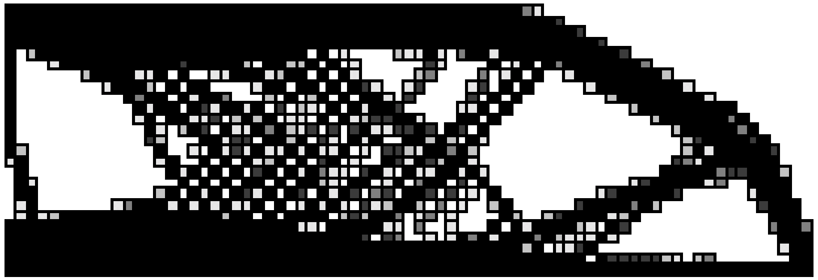
内側ループの繰返し数 Λ に関しては100回

Λ_g に関しては5回

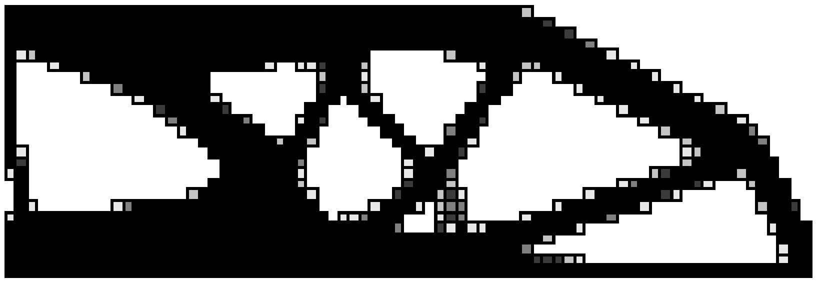
解析例（MBBはり）



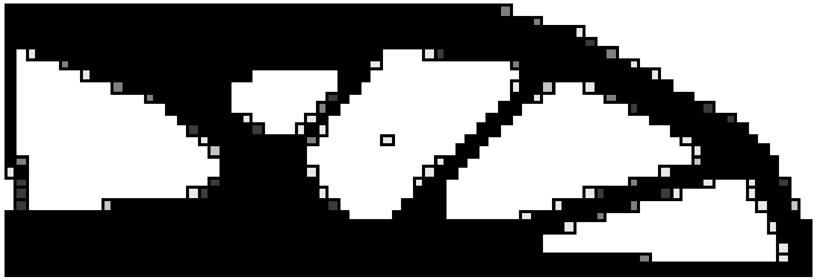
フィルタリングの効果



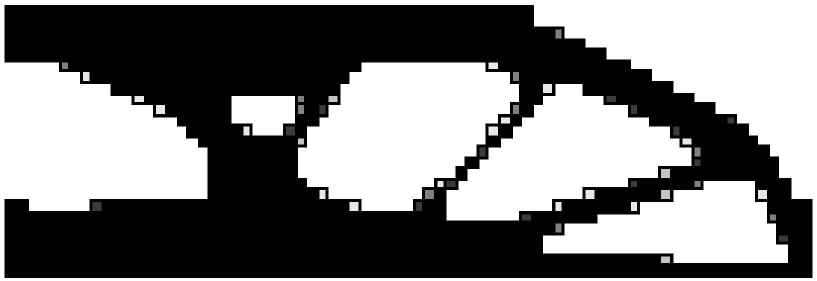
(a) $\bar{G} = 0, \quad G = 0.73$



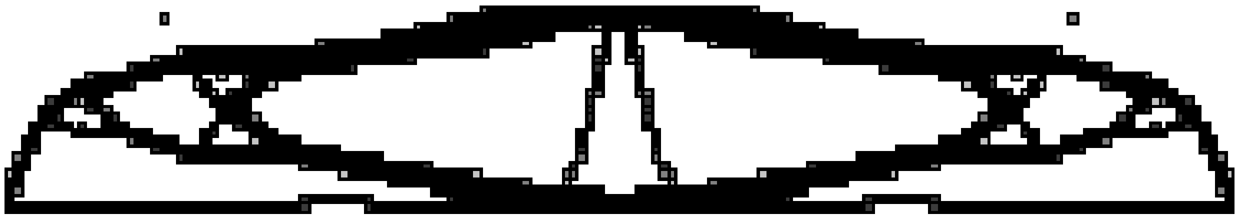
(b) $\bar{G} = 0.8, \quad G = 0.87, \quad C/C_0 = 1.02$



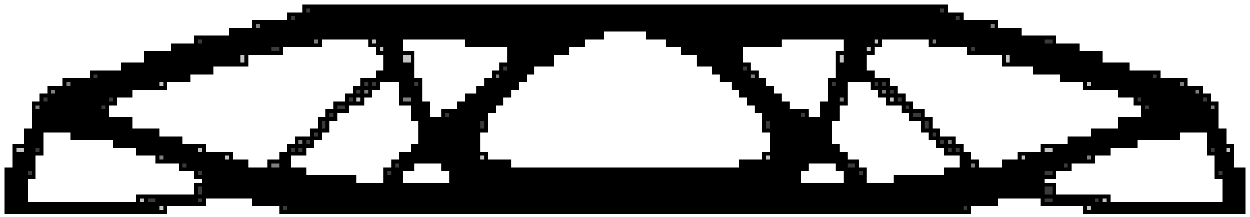
(c) $\bar{G} = 0.85, \quad G = 0.89, \quad C/C_0 = 1.08$



(d) $\bar{G} = 0.90, \quad G = 0.90, \quad C/C_0 = 1.18$

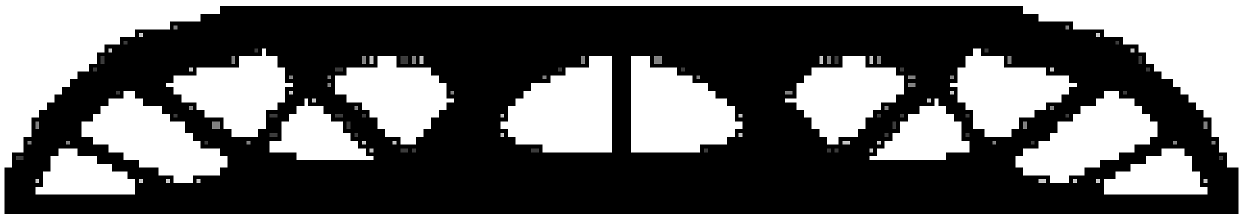


(a) $\overline{m}_S = 0.3$, $\overline{G} = 0.85$, $G = 0.85$, $C/C_0 = 1.05$



(b) $\overline{m}_S = 0.4$, $\overline{G} = 0.85$, $G = 0.87$, $C/C_0 = 1.08$

(c) $\overline{m}_S = 0.5$, $\overline{G} = 0.85$, $G = 0.89$, $C/C_0 = 1.08$

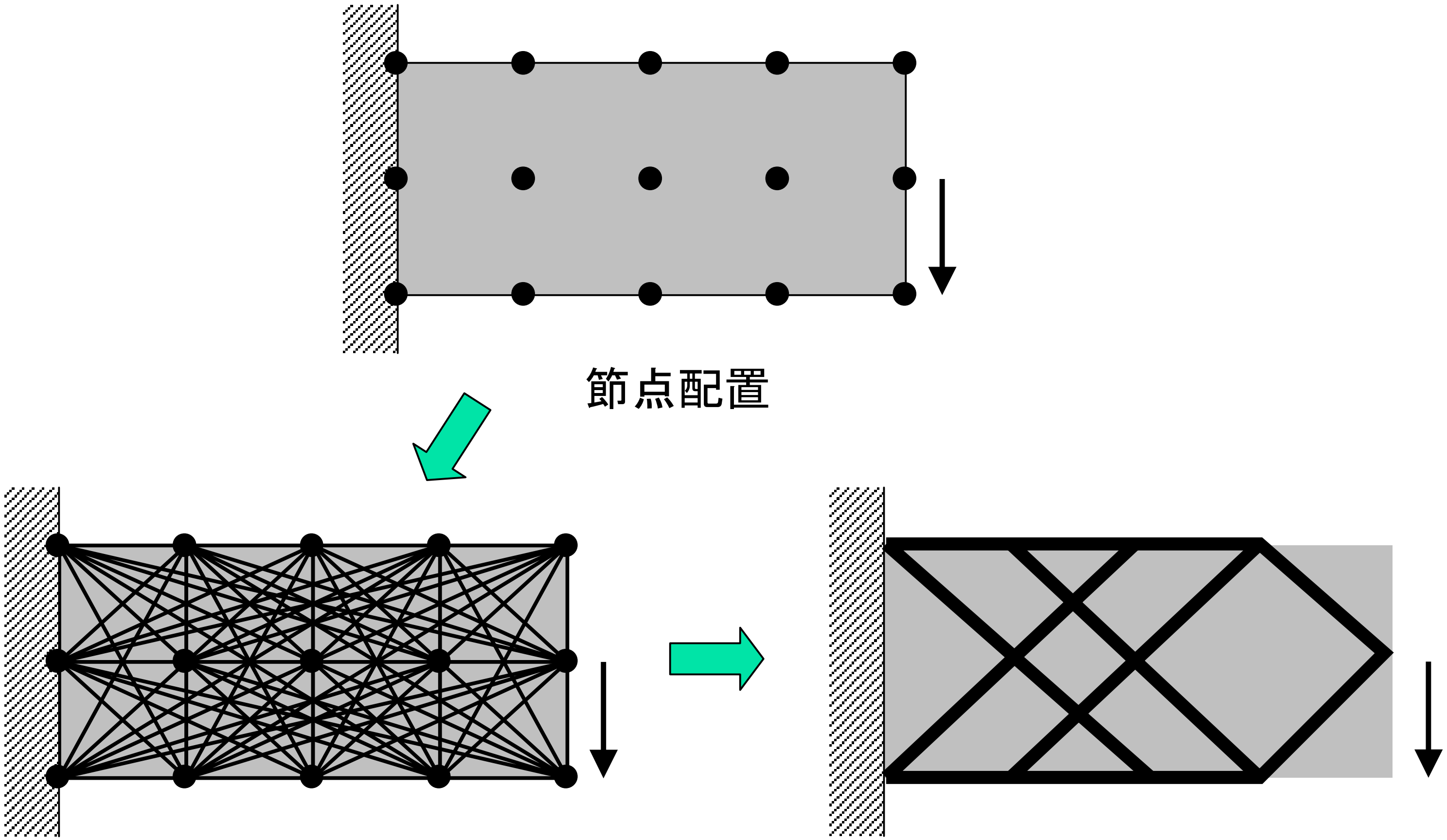


(d) $\overline{m}_S = 0.6$, $\overline{G} = 0.8$, $G = 0.89$, $C/C_0 = 1.03$

無償公開ソフト（連続緩和法3兄弟）

- 骨組構造の位相最適化ソフト（Otto）
  - グランドストラクチャー法
- 2次元連続体の位相最適化ソフト（Isler）
  - 均質化設計法
- 3次元連続体の位相最適化ソフト（Gaudi）
  - 密度法

Ottoの位相最適化手法
－グランドストラクチャー法－

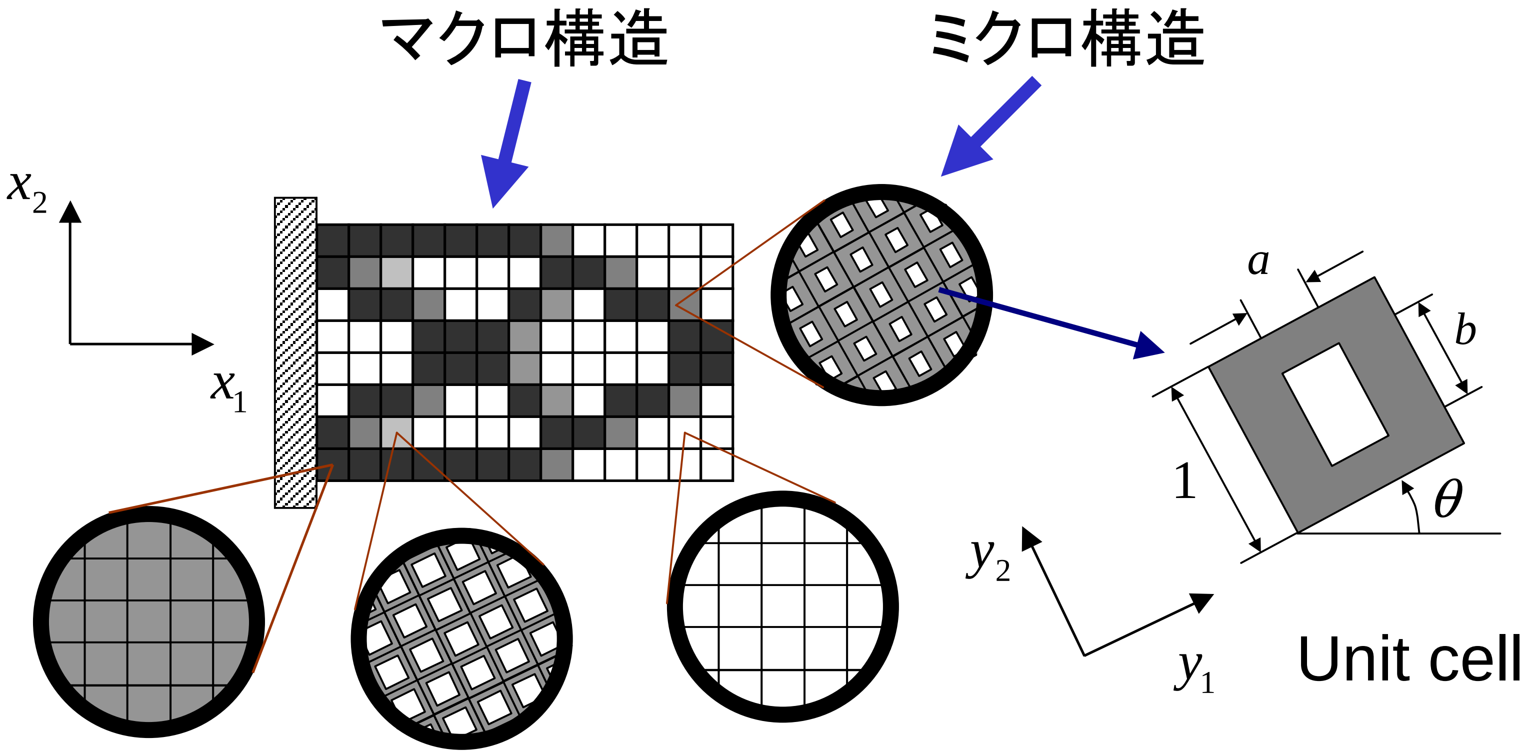


節点配置

グランドストラクチャー

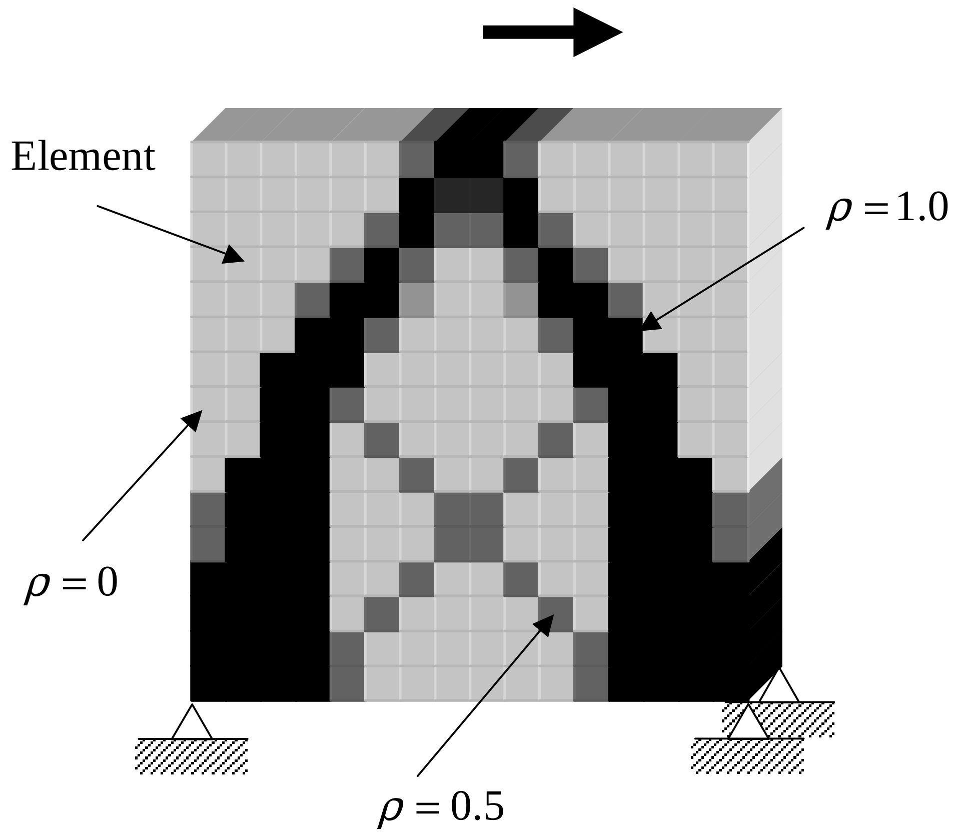
最適位相

Islerの位相最適化手法
－均質化設計法－

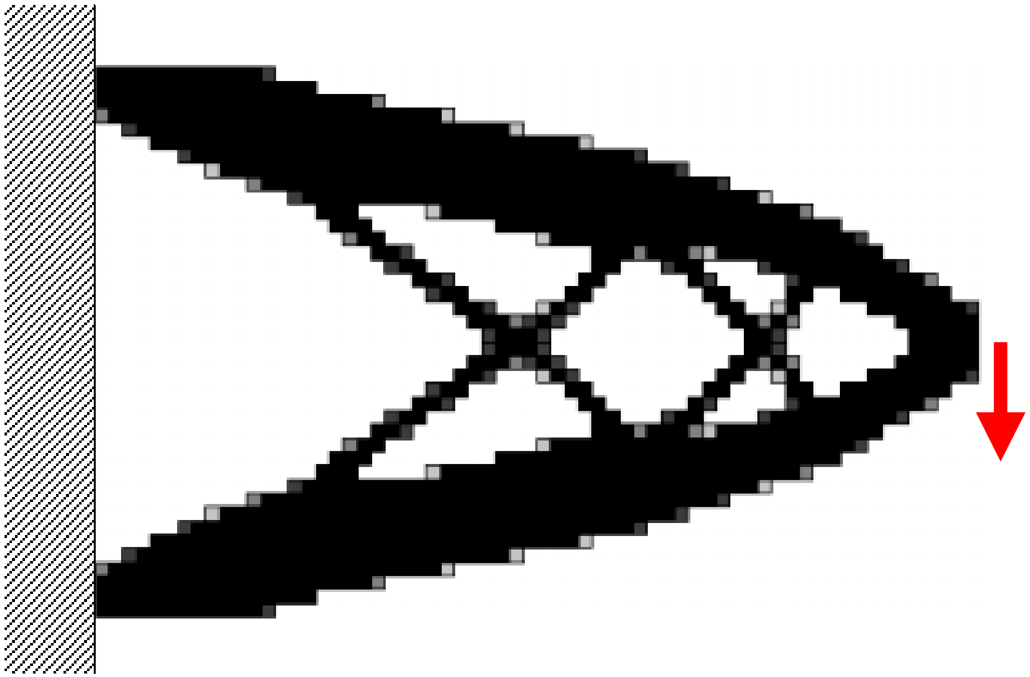


Gaudiの位相最適化手法

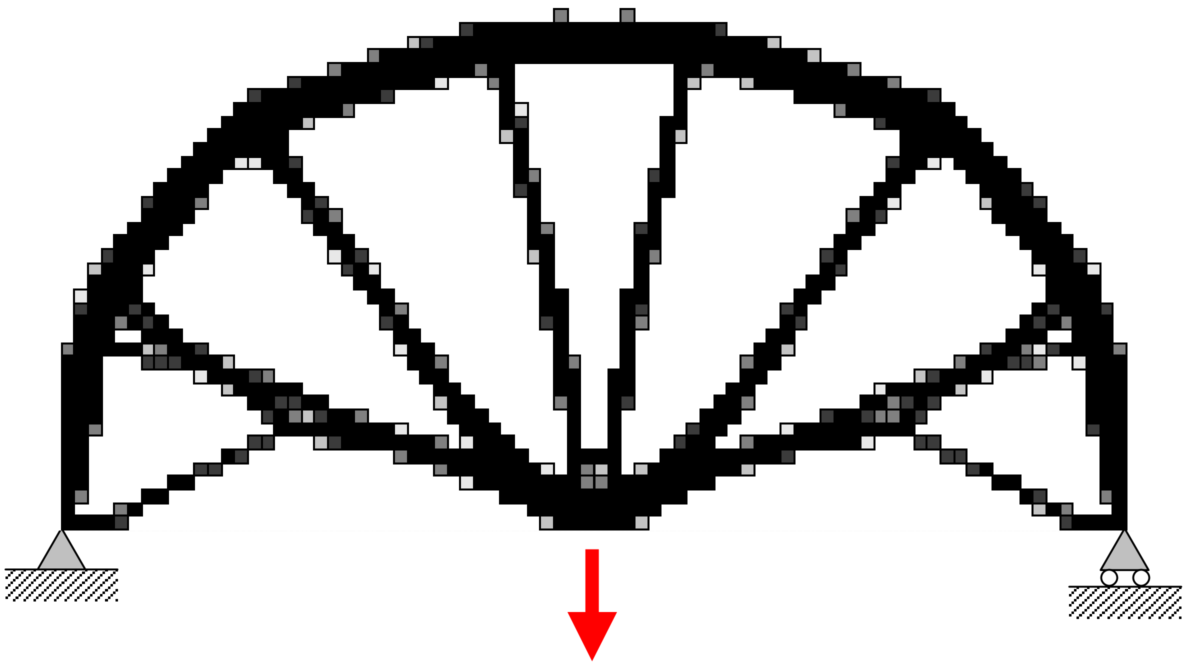
ー密度法ー



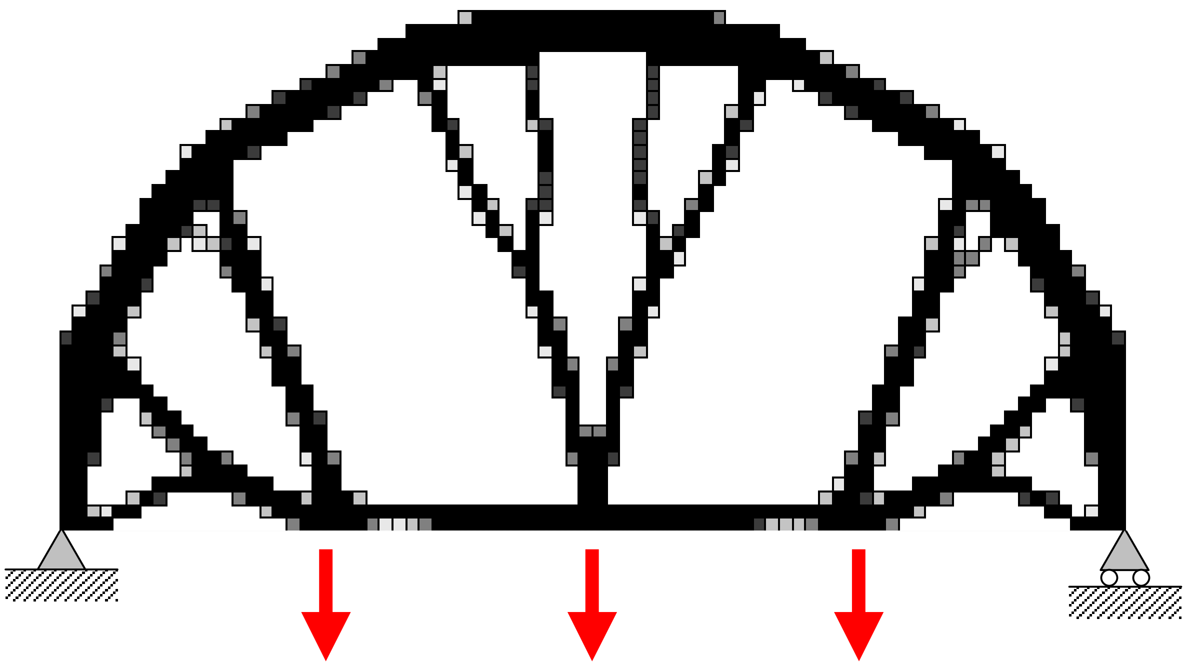
Islerの解析例（Single load）



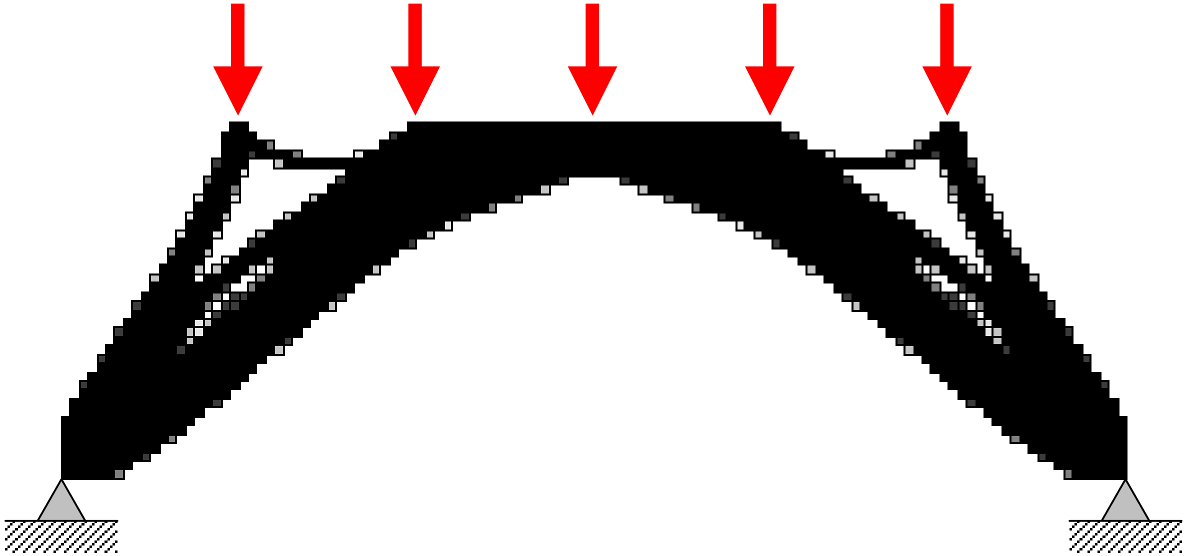
Islerの解析例(Single Load)



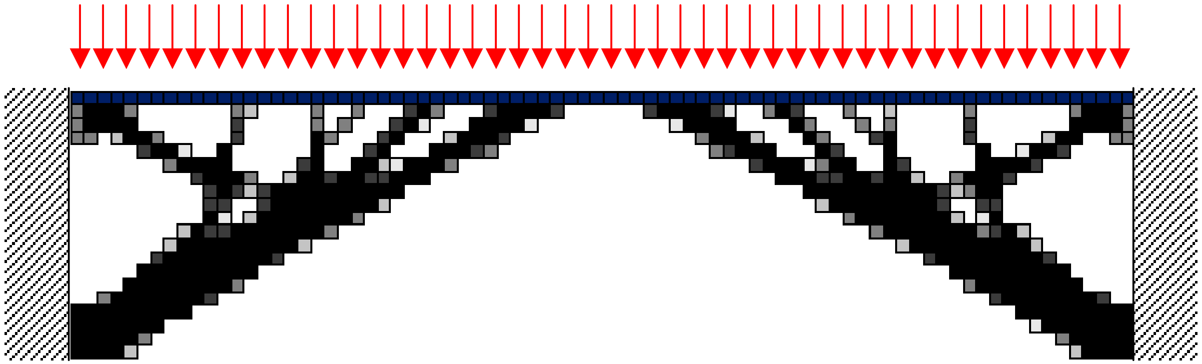
Islerの解析例（Multi Load）



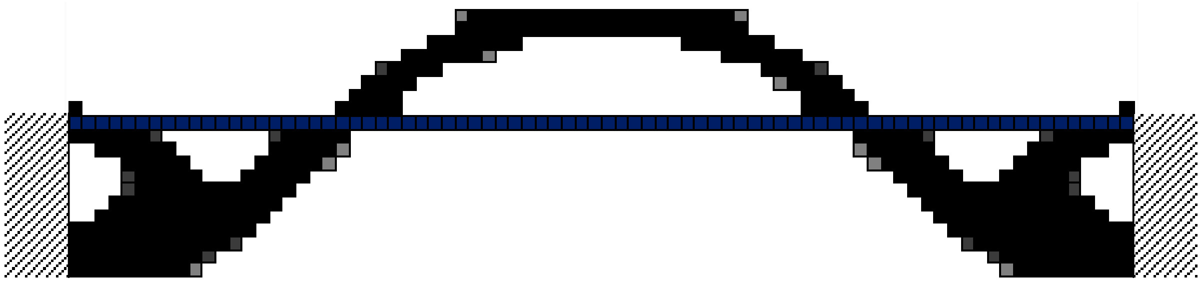
Islerの解析例（Multi Load）



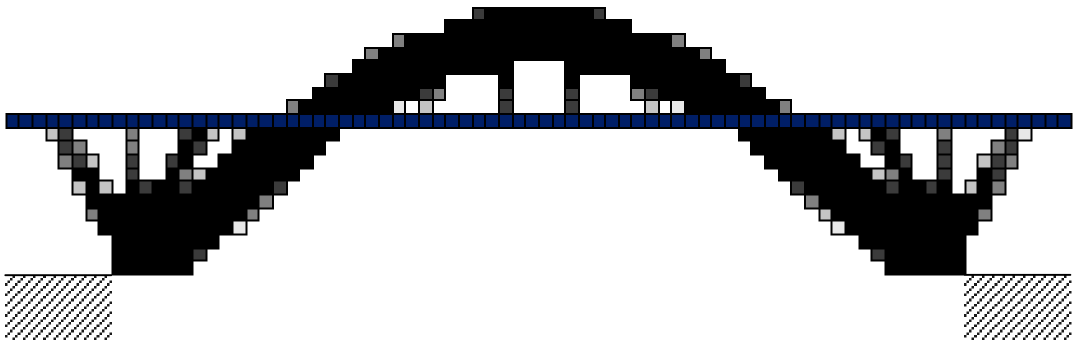
Islerの解析例（Distributed load）



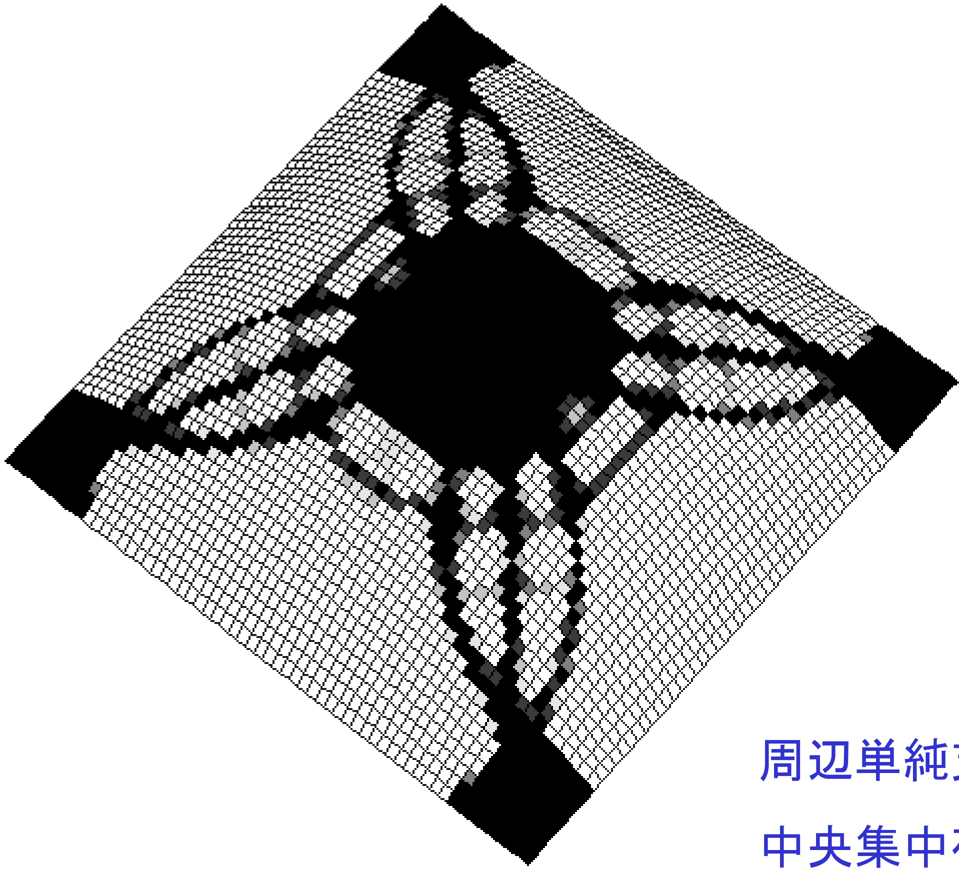
Islerの解析例（Distributed load）



Islerの解析例（Distributed load）



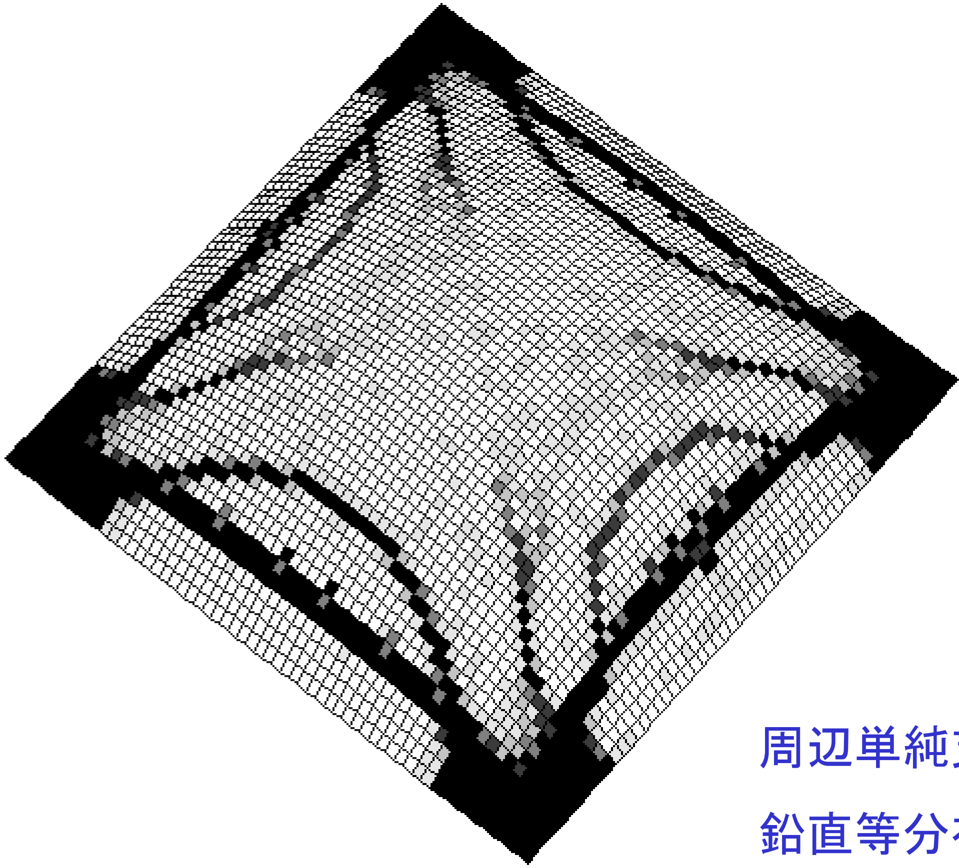
Islerの解析例（Single load）



周辺単純支持

中央集中荷重

Islerの解析例(Distributed load)



周辺単純支持

鉛直等分布荷重

まとめ

- 公開ソフトは，下記のホームページからダウンロード可能。

http://www.nasl.t.u-tokyo.ac.jp/~dfujii/homepage.htm

- 実務での利用を考えておられる方は下記ソフトをご購入下さい。
  - MSC Nastran Opti-shape
  - Altea Opti-struct