建築設計におけるコンセプトデザインツールの開発

藤井大地

東京大学工学系研究科

〒113-8656　**東京都文京区本郷** 7-3-1

Tel & Fax (03)5841-6527

E-mail : dfujii@nasl.t.u-tokyo.ac.jp

1. はじめに

建築家になって，人々に感動を与えるような建築物を設計したいという夢は建築学科を目指してくる学生が共通に抱いている夢ではないだろうか。広島大学でも東京大学でも建築学科の人気は高く，優秀な学生が集まってくる。しかし，現実に建築家と呼ばれる設計者になれるのはほんのわずかであり，大半は途中で諦めて別の道に進んでいく。建築家になるには才能というものが不可欠なのである。学生時代の建築計画学の講義で 3 歳までに造形的なものに興味を抱かなかった人はまず建築家にはなれないという話を聞いてショックを受けたことがある。大学は教育の場であるにもかかわらず，建築家になるための教育はなされておらず，大半の学生は才能がないということで，建築家になる道を諦めざるをえないというのが現実ではないだろうか。

しかし，今から考えれば，国立大学にそれを求めるのは無理があった。なぜならば国立大学にはこれまで建築家と呼ばれる人がほとんどいなかったからである。ご存知のように建築学科の教授＝建築家ではない。むしろ大学の研究者は建築物を実際に設計した経験をもつ人すら希なのである。そういう現実が今の高校生に十分認識されているだろうか。十分認識された上で建築学科の人気が高いのなら建築学科も将来安泰である。たとえ独立法人化されても十分やって行けると思われる。しかし，他の学科が時代のニーズにアンテナを張ってどんどん新しいことをやりはじめている時に，建築学科が果たして安泰と言えるかどうか。安藤忠雄氏が東京大学の教授に採用されたのもそのような危機感の現れのように思われる（ただし，東大では以前から設計の教授は論文実績等とは無関係に採用しているそうである）。

筆者の限られた経験から言えば，建築デザインを学ぶことは，造形やデッサンの演習，製図の演習，歴史の勉強等であったように思う。しかし，そこでは，デザインを行うための基礎知識，方法論等はあまり語られていなかったように記憶している（ただし，筆者はろくに講義も受けなかった不真面目学生だったので正確かどうかはわからない)。また，筆者の学生時代には，力学的な考え方とデザインが一緒になったような講義は存在しなかった。力学はむしろ建物の安全性を実証することに結びついており，地震に対して壊れない建物を造るにはどうすればよいかということに主眼があった。しかし，このような現状からすれば，才能の乏しい学生が建築家になる道は閉ざされているに等しい。才能のないものは，はやく諦めさせた方が賢明だという考え方もあるが，構造設計が汎用ソフトで容易に行えるようになった現在，そういう学生をすべて構造や環境で受け持つには限界があると考えられる。

筆者も，計画系の先生方にデザインの才能のなさをとことん自覚させられて構造分野への方向転換を余儀なくされた一人であるが，いまだにデザインへの憧れがある。構造解析の研究を行いながらどこかでデザインの分野に切り込みたいという願望を持っていた。それが最近の計算力学分野の著しい発展により，もしかしたらそういうことが可能になるのではないかと希望を抱かせるような研究が次々と発表されてきた。筆者がそのような研究にはじめて触れたのは，1996 年にドイツのシュツットガルト大学で

開催された IASS 国際会議に参加した時である。この時のテーマは「Conceptual Design of Structure」というものであったが，この時の E. Ramm 教授の講演に非常に強いインパクトを受け，構造解析の技術を応用することで建築デザインが行える可能性を強く感じた。

そして，そこから形状デザインやトポロジーデザインというものに少しずつ興味を持ちはじめ，研究としても高層ビルの最適形状を求めるような研究を始めた。しかし，Ramm 先生が行っているような研究にはとても追いつけそうな状況になかった。それが，天の助けか，1997 年に中米のコスタリカで行われた ICES'97 でミシガン大学の菊池昇先生とたまたま出遇い，1998 年から１年間ミシガン大学の菊池先生のもとで研究をさせていただく幸運に恵まれた。恥ずかしながら筆者はコスタリカで菊池先生に出会うまで，菊池先生がどういう研究をされているのかまったく知らなかった。菊池先生が Ramm 先生らの研究のもとになっている位相最適化の考え方を生み出した一人であったことを知ったのは随分後になってからのことである。菊池先生に位相最適化や最近の欧米の研究動向を色々教えていただいたおかげで，Ramm 先生らが目指されていることもかなり把握できるようになった。そういうことがあって，日本でも位相最適化や形状最適化のツールを使って建築のデザインが行えないかということが筆者の具体的なテーマになってきた。

ところで，筆者が故半谷先生の訃報を知らされたのはミシガン大学に滞在中のことであった。半谷先生は，筆者の指導教官であった吉田先生の恩師でもあり，非常に残念な思いで一杯だった。その知らせは，ミシガン大学の講義で菊池先生が一般逆行列の話をされるのを聞いて，日本では半谷先生がよくやられていますよというような会話をしたすぐ後のことであった。帰国後，第１回のこのセミナーで菊池先生が講演されることになり，半谷先生が目指されていたことと，菊池先生が目指していることが非常に共通しているという話をされた。また，半谷先生が最後に編集された『構造形態の解析と創生』という著書の内容もまさに欧米で菊池先生や Ramm 先生らが目指している方向と同じであるように思われる。半谷先生の残された「構造形態解析」という言葉を旗印に，CAE（Computer Aided Engineering） の力を借りて，たとえ才能がなくても，設計が好きであれば品質の良い物を作ってゆける，そういう技術を確立したい。そして，大学の教育においてもそのような力学的な考え方にもとづくデザインというような分野を発展させたいと考えている。そうすれば，建築学科というものがもっと魅力的なものになるだろうし，力学やコンピュータに強い学生の中でデザインの才能に目覚める者も出てくる可能性がある。さらに，力学的な考え方にもとづく設計は，建築に限らず様々な分野に応用がきくので，幅広い技術者を育成できると考えられる。

以上のような動機にもとづいて行った最近の研究についてこの場を借りて紹介させていただきたい。なお，詳細な理論については，下記の論文に発表しているので，そちらを参考にしていただくこととして，ここでは読み物として，これまで行った研究の全体像がわかるような形で話しを進めて行きたい。

参考となる文献

[1] 藤井大地，菊池昇：SLP 法を用いたトポロジー最適化における数値的不安定の改善，日本建築学会構造系論文集，No.521，pp.65-72，1999

[2] 藤井大地，江島晋，菊池昇：均質化設計法を用いた弾性変形機構の位相最適化，日本建築学会構造系論文集，No.528，pp.99-105，2000

[3] 藤井大地，松本慎也，藤谷義信，菊池昇：グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化，日本建築学会構造工学論文集，Vol.46B，pp.1-8，2000

[4] 藤井大地，鈴木克幸，大坪英臣：ボクセル有限要素法を用いた構造物の位相最適化，日本計算工学会論文集，Vol.2，2000

[5] 藤井大地，菊池昇：均質化設計法を用いた複合材料の位相最適化，日本建築学会構造系論文集，No.535，2000.9

[6] 藤井大地分担執筆：「構造形態解析の応用」，Ⅰ-6 均質化設計法, Ⅲ-1.1 均質化設計法の応用, 日本建築学会，2000

２．設計の段階

Ramm ら [1]によると，構造最適化（Structural optimization）の観点から見れば，構造物の設計は図 1 に示すような４つの段階に分けることができる。まず，設計の第一段階では，柱や梁の本数を決め，これらを空間的にどのように配置するかを設計する。このように部材の空間的な配置を決定する問題は位相決定問題（topological problem of optimization）と呼ばれ，設計目的にかなった最適な位相を求める問題

を位相最適化（topology optimization）と呼んでいる。また，位相最適化は，単に部材の本数や配置だけでなく，壁をブレースにするか，コンクリート壁にするか，あるいは構造全体をトラス構造にするか膜構造にするかといったような選択にも関わってくる。このような構造物の位相が決定されれば，第二の段階として，柱間のスパン長や階高を設計することになる。このような問題を形状決定問題と呼び，最適な形状を求める問題を形状最適化問題（Shape optimization）と呼ぶ。そして，位相と形状が決定されれば，第三段階として各部材の断面の大きさや鉄筋の配置を設計する問題となる。これは通常断面設計と呼ばれ，欧米では Sizing 問題（寸法決定問題）と呼ばれている。そして，最近では，第四の段階として，使用される構造材料の内部構造を設計する研究が欧米で盛んに行われており，これを材料最適化問題（Material optimization）と呼んでいる。

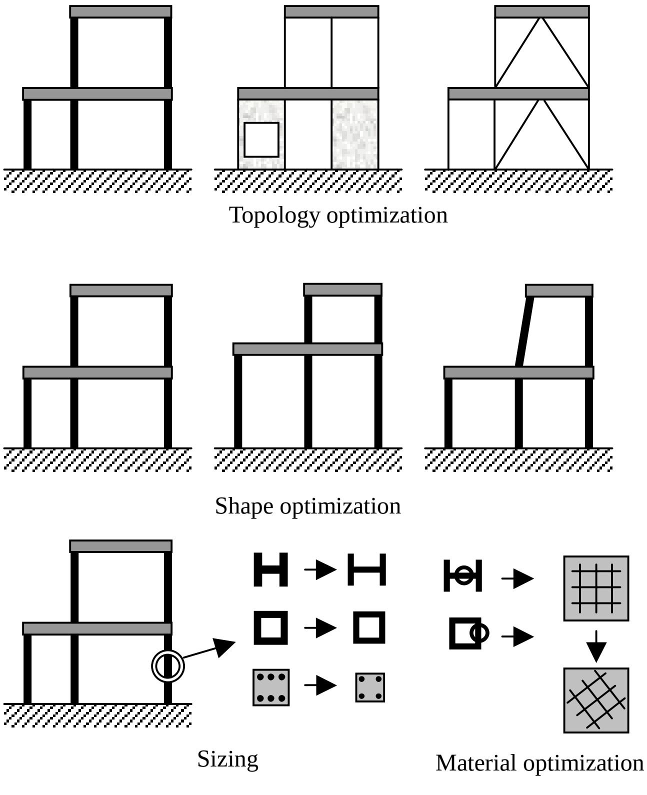


図１　構造物の設計段階

我が国の現状では，以上の設計段階の内，第 2 の段階までは計画系の設計者が行い，第 3 の段階を構造設計者が行っている。しかし, Ramm らの目的は，第一段階の位相設計を計算力学のツールを用いて行おうとするもので，もしそれが実現すれば構造設計者の仕事の範囲が広がり，またコンピュータソフトとして一般化されればデザイナーがこのようなツールを利用することでより力学的にかなった構造をデザインすることが可能になる。

３．骨組構造の位相最適化[3]

建築構造は，構造設計の段階では梁，柱，ブレースなどの 1 次元部材として扱われることが多い。したがって，位相決定問題もまず１次元部材からなる骨組構造の位相最適化が最もわかりやすいと思われる。そこで，まずここでは骨組構造の位相最適化問題について考える。

1 次元部材の位相最適化問題は，トラス構造のコート掛け問題に代表されるように古くから問題にされており, Michell トラスなどの理論解が求められている。しかし，問題が複雑になると解を得ることが困難になり，それ以上の発展があまり見られなかった。しかし，最近のコンピュータの性能の向上と，連続体の位相最適化手法の進歩に伴ってこの方法も見直され，欧米ではグランドストラクチャー法として実用化されつつある。

グランドストラクチャー法は，図 2(a)に示すように設計空間に適当に節点を配置し，図 2(b)に示すようにこの節点間を可能な限りの要素で連結する。このようにして作られた構造をグランドストラクチャーと呼ぶ。そして，このグランドストラクチャーの各部材の断面積を設計変数として，不必要な部材の断面積を０にしてゆくことで最適な位相を求める。

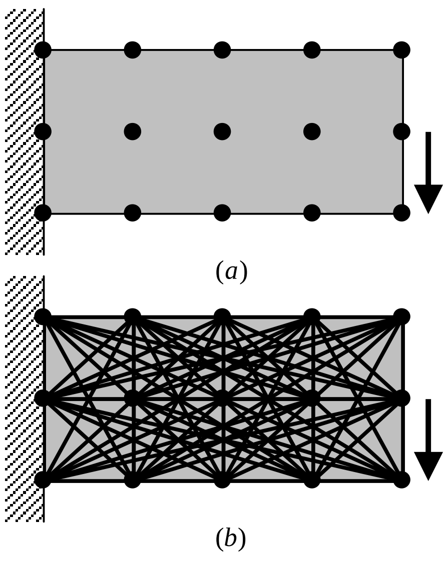


図２　グランドストラクチャー

このグランドストラクチャーの最適化問題を従来の応力制約下の最小重量設計問題として解く場合，大きく 2 つの問題点がある。1 つは設計領域として 3 次元空間を考える場合，問題によっては節点数が数千にも及び，それを可能なすべての要素で結ぶと数 100 万要素にも及ぶ膨大な要素数を扱うことになる。最適設計問題では各部材の断面積が設計変数になるため，数理計画法等で最適解を求める場合，数 100 万の設計変数に関する感度係数を計算する必要がある。このような問題では，従来の最大応力を制約条件とする最小重量設計では膨大な計算時間がかかる。以下にその理由を述べる。

部材の最大応力を制約条件とする場合，各要素の応力は節点変位の関数となるため，結局節点変位ベクトルに関する感度係数を求める必要がある。有限要素法で定式化した場合，静的な解析では次式の剛性方程式が成り立つ。

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \tag{1}$$

ここに，$\mathbf{K}$ は全体剛性マトリックス，$\mathbf{U}$ は節点変位ベクトル，$\mathbf{F}$ は節点力ベクトルである。ここで，要素の断面積を $(A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_N)$ と置くと，i 番目要素の断面積 A_i に関する感度係数は次のように計算できる。まず，(1)式の両辺を A_i で微分すると，

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial A_i} = \mathbf{0} \tag{2}$$

したがって，A_i に関する感度係数は，

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial A_i} = -\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U} \tag{3}$$

となる。(3)式の計算を数 100 万の設計変数に関して行うと，明らかに膨大な計算時間を要する。

もう一つの問題は，最大応力を制約条件とした場合，要素の断面積が 0 に近づくにしたがって応力が高くなるため，不必要な要素の断面積を 0 にできないことである。したがって，この場合，有限な断面積の要素が多く残ることになり，単純な位相を求めることが難しい。

以上の二つの問題は，目的関数を構造物の重量の最小化から，構造物の内部ひずみエネルギー（または外力のなす仕事量）の最小化に，制約条件を最大応力から構造物の重量に変更することにより同時に解決できる。この場合重量は体積の関数であるから，重量に関する断面積の感度係数は簡単に計算できる。またひずみエネルギーに対する感度係数は次のように計算できる。まず，ひずみエネルギー V は次のように書ける。

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{KU} \tag{4}$$

このとき，i 番目要素の断面積 A_i の感度係数は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial A_i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial A_i}\mathbf{KU} + \mathbf{U}^T\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial A_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^T\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U} + 2\mathbf{U}^T\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial A_i}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，(2)式の関係を用いると，

$$\frac{\partial V}{\partial A_i} = -\frac{1}{2}\mathbf{U}^T\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}\mathbf{U} \tag{6}$$

ところで，断面積 A_i は i 番目の要素剛性マトリックスのみに関係するので，結局(6)式は，

$$\frac{\partial V}{\partial A_i} = -\frac{1}{2}\mathbf{u}_i{}^T\frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial A_i}\mathbf{u}_i \tag{7}$$

となる。ただし，$\mathbf{k}_i, \mathbf{u}_i$ は i 番目要素の剛性マトリックスと節点変位ベクトルである。(3)式に比較して(7)式は全体の剛性マトリックスの逆行列を計算する必要がなく非常に計算効率が良い。また，ひずみエネルギーは断面積が 0 に近づいても発散しないため，(1)式の剛性方程式が解ける範囲で断面積を小さくすることができる。

(4)式のひずみエネルギーを最小化することは，外力のなす仕事を最小化することであり，外力が一定の場合，変位の最小化，すなわち剛性の最大化となる。したがって，ひずみエネルギーの最小化は構造物全体の応力を下げることになり，構造全体としての合理的な位相を求めることができる。もちろん現行の構造設計では応力が制約条件となっており，設計の最終段階では応力制約下の最適設計を行う必要があると思われるが，位相最適化は設計の第一段階で用いられるものであるから位相最適化ではひずみエネルギーを目的関数にする方が合理的であると思われる。

したがって，この場合のグランドストラクチャー法の最適化問題は次式のように書ける。

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{\alpha}}\left[V(\boldsymbol{\alpha})\right] \\ &\text{subject to :} \\ &W = \sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)A_{\max}l_i \le \bar{W} \\ &0 \le \alpha_i \le 1, \qquad i = 1, \cdots, N\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_N\}$$
$$A_i = (1-\alpha_i)A_{\max}, \quad 0 \le \alpha_i \le 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{9}$$

ここに，V は(4)式のひずみエネルギー，W は構造物の重量（体積），$A_{\max}$ は最大断面積，l_i は要素長さ，N は要素数，$\bar{W}$ は重量（体積）の制約値である。なお，ここでは，設計変数が A_i ではなく α_i になっている。これは断面積の上限を設定するためと，連続体の位相最適化手法である密度法で行われているテクニックを利用するためである（後で説明する）。

(8)式の解法としては，数理計画法にもとづく方法（SLP,SQP）と，最適性規準法がよく用いられる。筆者はこれまで主に SLP 法を用いてきたが，SLP 法はどのような問題でも簡単にプログラムを作ることができるメリットがある反面，解を収束させるために設計変数の変動域を絞りこむテクニックが必要であり，一般に最適性規準法に比較して収束までの再計算回数が多い。したがって，制約条件が１つである本問題に関しては最適性規準法の方が適していると思われる。そこで，ここでは最適性規準法による解法を示す。

最適性規準法では，次式の Lagrangian を定義する。

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = V(\boldsymbol{\alpha}) - \Lambda\left(\sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)A_{\max}l_i - \bar{W}\right) \tag{10}$$

ここに，Λ はラグランジェ乗数で，$\Lambda \le 0$ となる。

次に，(10)式を設計変数に関して変分をとることにより，最適性規準を求める。この場合次式となる。

$$\delta L(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} + A_{\max}l_i\Lambda\right)\delta\alpha_i - \left(\sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)A_{\max}l_i - \bar{W}\right)\delta\Lambda \tag{11}$$

(11)式の $\delta\alpha_i\,(i=1,\cdots,N)$，$\delta\Lambda$ の任意性から次式が成り立つ。

$$-\frac{1}{A_{\max}l_i\Lambda}\frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} = 1 \qquad (i=1,\cdots,N) \tag{12}$$

$$\frac{1}{\bar{W}}\sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)A_{\max}l_i = 1 \tag{13}$$

(12)式より次式の関係を作ることができる。

$$\left[-\frac{1}{A_{\max}l_i\Lambda}\frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}\right]^{\beta} = 1$$
$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{A_{\max}l_i\Lambda}\frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}\right]^{\beta} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i} \tag{14}$$
$$\Rightarrow \alpha_i^{(k+1)} = \left[-\frac{1}{A_{\max}l_i\Lambda^{(k)}}\frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha}^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}}\right]^{\beta}\alpha_i^{(k)}$$

ここに，β はべき乗係数で，0.85 が良いとされている。同様に，

$$\Lambda^{(k+1)} = \left[\frac{1}{\bar{W}}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\alpha_i^{(k)}\right)A_{\max}l_i\right]^{\beta}\Lambda^{(k)} \tag{15}$$

ただし，α_i, Λ には次式の制約条件があるので，

$$0 \le \alpha_i \le 1 \quad (i=1,\cdots,N), \qquad \Lambda \le 0 \tag{16}$$

(14),(15),(16)式より，次式の最適性条件が得られる。

$$\alpha_i^{(k+1)} = \min\left\{\max\left\{0,\ s_i^{(k)}\right\},\ 1\right\} \tag{17}$$

$$\Lambda^{(k+1)} = \min\left\{0,\ \left[\frac{1}{\bar{W}}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\alpha_i^{(k)}\right)A_{\max}l_i\right]^{\beta}\Lambda^{(k)}\right\} \tag{18}$$

ただし，

$$s_i^{(k)} = \left[-\frac{1}{A_{\max}l_i\Lambda^{(k)}}\frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha}^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}}\right]^{\beta}\alpha_i^{(k)} \tag{19}$$

(17)式には, さらに設計変数の変動幅の制約（move limit）を課す。この変動幅の制約は次のように書ける。

$$\alpha_i^{(k+1)} = \begin{cases} \max\left\{(1-\zeta)\alpha_i^{(k)}, 0\right\} & \text{if} \quad s_i^{(k)} \le \max\left\{(1-\zeta)\alpha_i^{(k)}, 0\right\} \\ s_i^{(k)} & \text{if} \quad \max\left\{(1-\zeta)\alpha_i^{(k)}, 0\right\} \le s_i^{(k)} \\ & \qquad \le \min\left\{(1+\zeta)\alpha_i^{(k)}, 1\right\} \\ \min\left\{(1+\zeta)\alpha_i^{(k)}, 1\right\} & \text{if} \quad \min\left\{(1+\zeta)\alpha_i^{(k)}, 1\right\} \le s_i^{(k)} \end{cases} \tag{20}$$

ここに，ζ は変動幅の制約値（move limit）である。

(20)式と(18)式の計算を繰り返し行う。最適性規準法の場合 20 回程度の繰り返し計算によって収束するので，収束判定は行わず，20 回から 30 回程度の繰り返し計算回数を与えればよい。なお，文献 2)では，(18)式は(20)式の繰り返し計算の各ステップ内で収束計算を行っており，筆者もそれにしたがった。

以上の方法で，最適解を求めることができるが，

問題によっては最適位相に断面積の小さい要素が多く残る場合がある。設計のコンセプトを練る段階では位相はできるだけシンプルな方が良いので，断面積の小さい要素が残らないようにすることが望ましい。そこで，ここでは密度法による連続体の位相最適化手法で用いられている方法を利用する。この方法では，(4)式のひずみエネルギーの計算に用いる断面積を次式で評価する。

$$A_i = (1-\alpha_i)^p A_{\max}, \quad 0 \le \alpha_i \le 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \quad (21)$$

ここに，p はべき乗であり，p が 1 以上になると中間的太さの部材剛性がより低く評価される。

また，筆者の経験からすれば，重量の制約値 $\bar{W}$ の与え方は意外に難しい。なぜならグランドストラクチャーは配置される節点数が増えれば，それに伴って重量が非比例的に増える。したがって，節点数が少ない場合と多い場合で同様の位相を求めようとすると，適切な $\bar{W}$ を試行錯誤でさがす必要がある。そこで，ここでは制約条件として重量を直接与えるのではなく，断面積 $A_{\max}$ の部材総長さを基準に与えるようにする。この場合，$\bar{W}$ は次式で与えられる。

$$\bar{W} = \sum_{i=1}^{N} \left(1-\alpha^0\right) A_{\max} l_i \quad (22)$$

ただし，

$$\alpha^0 = 1 - \left(L \Big/ \sum_{i=1}^{N} l_i \right) \cdot r \quad (23)$$

ここに，l_i は i 番目要素の長さ，L は解析領域の x, y, z 方向の辺長の和であり，r は倍率である。この場合，最適位相の部材断面積がすべて $A_{\max}$ だとすると，最適位相の部材総長さは $L \cdot r$ となる。したがって，最適位相を領域長さと比較してどの程度の長さにするかという指標で r を与えれば，節点数が変化してもほぼ同様の位相を求めることができる。なお，α_0 は設計変数の初期値としても利用する。

その他の詳細な理論に関しては，文献[3]を参照していただきたい。以上述べた方法にしたがって，プログラムを作成し，これにプリ・ポスト処理プログラムを加えたOttoという位相最適化ソフトを開発した。このソフトはセミナーの CD に入れさせていただいているので，色々な人に使ってもらってこのような位相最適化手法の利用の可能性を探っていただきたい。また，フォルダー内には，マニュアル，サンプルデータ等も収めてあるので参考にしていただきたい。

以下に Otto による解析例をいくつか示す。図 3 はシェル構造のグランドストラクチャーを示しており，斜め材はピンまたは半剛接合，直交部材は剛接合としている。境界条件は周辺固定支持，解析は対称条件を利用して 1/4 領域で行っている。図 4 は頂部に鉛直荷重を加えた場合の結果である。図 5 は 4 点に集中荷重を加えた場合の結果である。図 6 は鉛直等分布荷重を加えた場合の結果である。

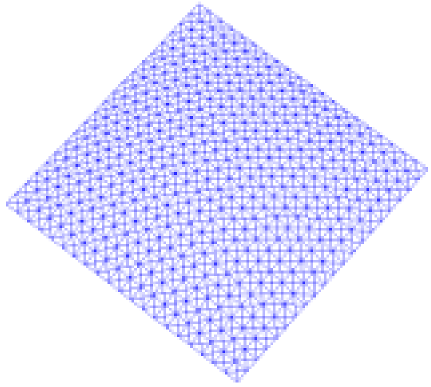


図 3　シェル構造のグランドストラクチャー

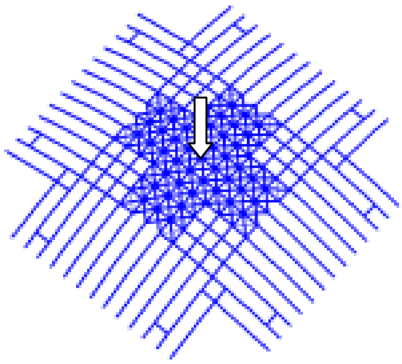


図 4　最適位相（１点集中荷重，斜材ピン接）

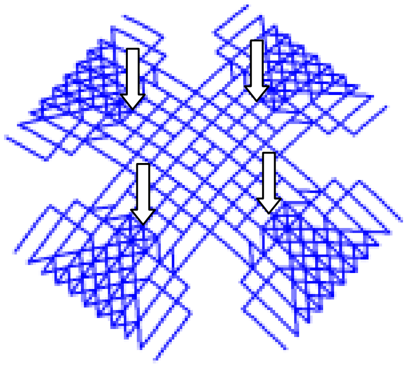


図 5　最適位相（４点集中荷重，斜材ピン接）

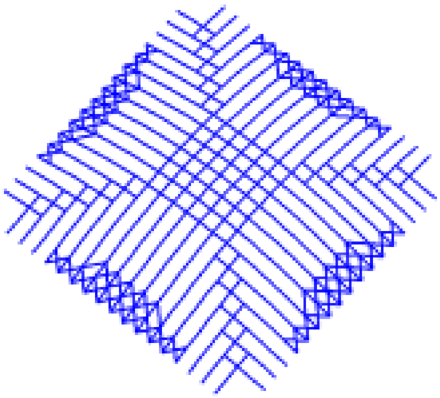


図 6　最適位相（等分布荷重，斜材ピン接）

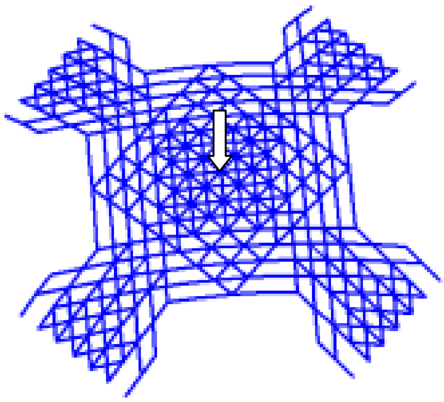


図 7　最適位相（1 点集中荷重，斜材半剛接）

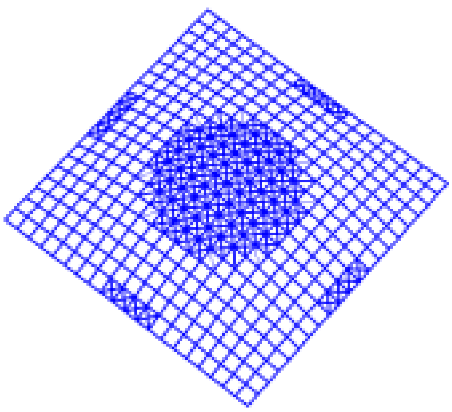


図 8　最適位相（等分布荷重，斜材ピン接）

図 7 は，図 4 と同じ条件で斜材の接合剛性を半剛接合とした場合の結果である。図 8 は斜材のみを設計変数とした場合の結果である。以上の例題から明らかなように，荷重条件を変化させることで様々な位相を作ることができ，設計のコンセプトを考える上で利用できるのではないかと思われる。なお，図 3 の例題ではすべての可能な要素で連結したグランドストラクチャーではなく，実際に利用しない要素をあらかじめ除いたものを用いている。このように最初からある程度シンプルなグランドストラクチャーから解析をはじめることも計算効率を改善する上で有効である。Otto では，要素の最大長を与えることで，様々なグランドストラクチャーを自動生成できる。また，図 8 に示すように設計を固定したい部材も指定することができ，ブレースの最適配置等にも利用できると考えられる。

４．２次元連続体の位相最適化[1],[2],[6]

３章に示したグランドストラクチャー法の位相最適化は非常に計算効率もよく，骨組構造の位相を求めるには適している。しかし，芸術的な作品を作ろうとする場合は，直線だけではもの足りず，質感のある位相や曲線美がほしい場合がある。このような場合は１次元部材の最適化では限界があり，２次元または３次元連続体の位相最適化を行う必要がある。筆者がミシガン大学で取り組んだ研究もこのような連続体の位相最適化である。

連続体の位相最適化は，従来非常に難しいものとされていた。例えば，図 9 に示すように，最適化の過程で，最初 1 つだった内部の穴が２つになり，また３つになるというような位相が変化する問題を有限要素法で解こうとすると，メッシュは常に切り直す必要があるし，また，穴の数が変わった場合の感度係数の計算が困難である。このような位相の最適化を，従来とまったく異なる発想で行おうとしたのが，数学者の Murat and Tartar らであり，その考え方を工学の世界に橋渡ししたのが Bendsøe and Kikuchi[3)]である。

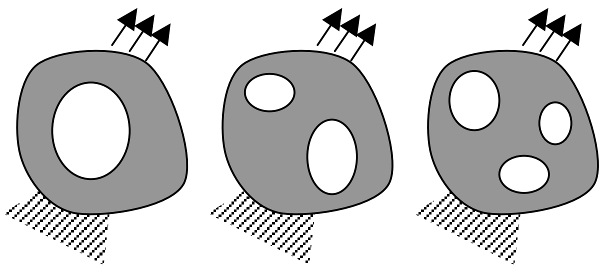


図 9　連続体構造物の位相最適化

菊池らの考え方を端的に言うと，従来の形状・位相の最適化は，境界の形状を変化させるものであったが，新しい考え方は，設計対象を包含する領域を考え，その領域内の材料の有無を設計変数とするも

のである。すなわち，そこに材料があれば 1，なければ 0 というような関数を導入して最適化を行えば，図 8 のように穴の数がいくら増えても容易に解くことができる。しかし，一般に材料の有無（0 と 1）を定める離散的な問題は，微分不可能問題となり，従来の感度係数を利用する最適化手法を用いることができない。そこで導入されたのが均質化法の考え方である。すなわち，材料が 0 の状態をミクロ的に穴が大きく空いた多孔質材料と考え，また，材料が 1 の状態をミクロ的に穴が詰まった状態と考えて，複合材料の解析分野で発展してきた均質化法の理論を適用すれば，材料の有る無し問題を微分可能問題に変換することができる。

菊池らは, 図 10 に示すような長方形の穴を有する多孔質材料を考え，この穴の大きさと角度を設計変数とする最適化問題を定式化し，これによって連続体構造物の最適な形状と位相を同時に求める方法を提案した。この方法は均質化設計法（Homogenization Design Method, HDM）と呼ばれ, 機械系の分野では, すでに機械部品等の形状・位相設計に実際に用いられている。

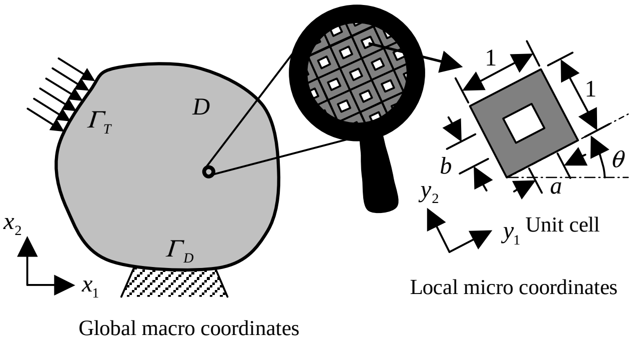


図 10　均質化設計法による位相最適化

筆者もミシガン大学滞在中に 2 次元問題について均質化設計法のプログラムを作成し，文献 2)に示される図 11 のような例題の解析を行ってみた。しかしながら, なかなか図 12 に示されるような綺麗な位相が得られなかった。文献 2)との違いは，最適化の手法として，最適性規準法の代わりに SLP 法を用いていることぐらいであったが，材料密度が 0 と 1 の要素が交互にならぶチェッカーボード状の位相が得られたり，ひずみエネルギーはほぼ同等の値であるにもかかわらず, 様々に異なる位相が得られたりした。随分そこで悪戦苦闘したあげく，やっと SLP 法でも文献 2)と同等の位相が得られるようになった。この苦闘の成果が文献[1]である。

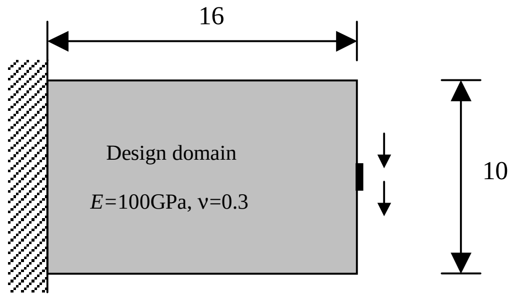


図 11　位相最適化問題の設計領域[1]

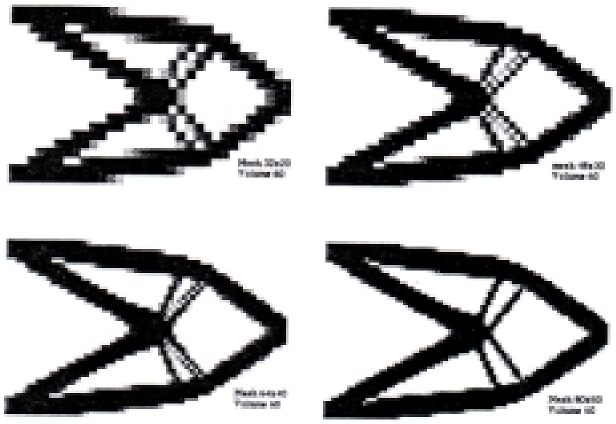


図 12　文献 2)に示される最適位相

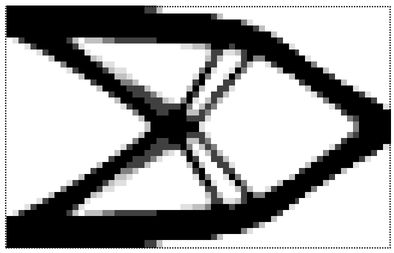


図 13　文献[1]の手法による最適位相

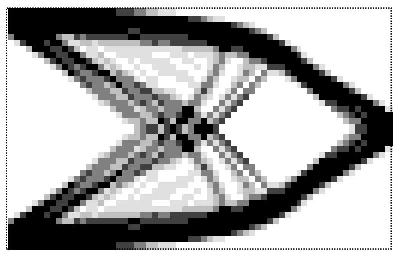


図 14　境界線長さ制約法を用いた場合の最適位相

なぜそこまで SLP 法にこだわったかと言うと，その頃ミシガン大学では単一目的の問題はほぼ片づいており，多目的問題の解析が主に行われていた。文献[2]の研究はその一つであるが，単一目的の問題には最適性規準法は有効であるが，多目的問題になるとその適用が難しくなる。したがって，その時の研究室の学生も最適化手法としては主に SLP 法を用いていた。そういうこともあって，SLP 法でも精度の良い解が得られることが重要で，これを解決することが筆者の課題となった。また，このような数値的不安定性の問題は，位相最適化を行っている欧米の研究者の間でも共通の課題となっており，これを解決する手法も色々提案されていた。筆者も 2,3 の有望と思われる手法を適用してみたが，なかなか安定した解が得られなかった。そして，最後にたどりついたのが，文献[1]に示している重力制御フィルタリング法である。これは菊池先生からいただいたアイデアを改良したものであるが，要は重力の考え方を用いて密度を集中させればシンプルで綺麗な位相が求まるのではないかという発想にもとづいている。しかし，実際にはこれもなかなかうまく行かず，結局は，文献[5]の複合材料の解析をやり始めた時に，２種の複合材料では白黒に分かれる位相の内，白の方も一方の材料であることから黒だけでなく白も集中させる必要があるという考えに至って改良を行ったところやっと安定した解が得られるフィルタリング法が完成した。できあがって見ると，他の研究者によって提案されていた境界線長さ制約法（Perimeter control method）と非常に似通っていることに気づいた。境界線長さ制約法は，チェッカーボード状の密度分布は境界線の長さが長くなるので，位相全体の白黒の境界線長さを制約してやれば，チェッカーボード状の密度分布の無いシンプルな位相が得られるという方法である。重力制御法との違いは，境界線長さ制約法では境界内部の中間的な密度（グレースケール）を許容するのに対し，重力制御法は重力の効果により白黒をはっきりつけるという点である。設計の第一段階で利用する位相最適化では，“形”が現れなければコンセプトを作りにくい。したがって，より形が明確になる重力制御法は有効なフィルタリング法であると思われる。なお, 図 13, 14 は，それぞれのフィルタリング法を用いた結果である。ただし，境界線長さ制約法でも，文献では綺麗な位相が得られている。文献によれば，最初境界線長さを制約し，外形ができたらその制約をはずして，内部の位相を明確にするというようなテクニックを用いているようである。

図 12 に示される鈴木と菊池の論文 2)の結果は，メッシュ依存性もなく非常に綺麗な位相が得られている。実はこれには論文に書かれていないフィルタリング法が使われていて，最適性規準法とこのフィルタリング法を組み合わせると文献 2)の結果が得られるというわけである。このフィルタリング法に関しては長い間企業秘密（?）であったようだが，筆者が悪戦苦闘している時に，ついに菊池先生から鈴木先生が考えたフィルタリング法を教えてもらった。幸いにも（?）この方法は SLP 法との相性は悪いようで決定的な方法とならなかったため，重力制御法が生まれることになったのであるが，剛性最大化問題に関しては，いまだに計算効率と安定性の面で最適性規準法の方に軍配があがる。

しかしながら最適性規準法では図 10 に示すミクロ構造のセルの角度を設計変数にすると解が求まらない。したがって，この角度は応力の主軸方向に向けることで設計変数からははずされている。計算効率上はこの方が有利なのであるが，角度が応力の主軸方向に向かない問題もある。文献[2]で扱ったのは剛性を最大化する位相ではなく，柔軟性を実現する位相を求める問題であり（図 15,16 参照），この問題ではセルの角度が応力の主軸方向に向くことは保証されない。また，この問題は剛性の最大化と相対変位の最大化を同時に目的とする多目的問題であり，最適性規準法の適用しにくい問題である。筆者らは，SLP 法の利点を生かし，セルの角度も設計変数に入れてこのような弾性変形機構の位相を求める方法を提案している。なお，弾性変形機構の位相最適化の研究は現トヨタ中央研究所の西脇氏のミシガン大学での Ph.D のテーマであり, 理論に関しては西脇氏に教えていただいた。

少し話が横道にそれた感があるが，連続体の位相最適化では，コンセプト設計に利用できるような形を出すことが問題によってはなかなか容易ではないということである。このような形を出すということに関しては，Ramm and Maute ら 4),5)が行っているアダプティブアプローチが優れていると思われる。これは均質化設計法的なやり方で位相を求め，それをもとに有限要素メッシュを切り，さらにその形状における位相を求めるということを数回繰り返すやり方で，最終的に得られた位相は非常に綺麗なものである（図 17 参照）。Ramm and Maute ら 6)はこの方法

で材料非線形問題まで解いているが，筆者だけの力ではなかなかそこまで追いつけない。しかし, 菊池，鈴木，大坪らが行っているピクセル・ボクセル有限要素法の考え方によれば，コンピュータ画像のピクセル程度まで有限要素を細かくしてやれば均質化設計法単独でも綺麗な曲線を創生できると考えられる。そこで，筆者はその方向で現在大次元の有限要素解析法に関する研究に取り組んでいる。

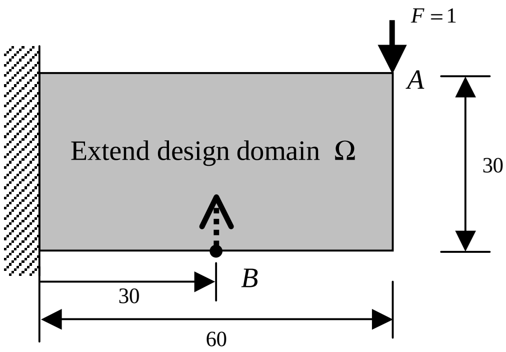


図 15　A 点の荷重方向の変位に比較して B 点の矢印方向の変位が大きくなる位相を求める問題

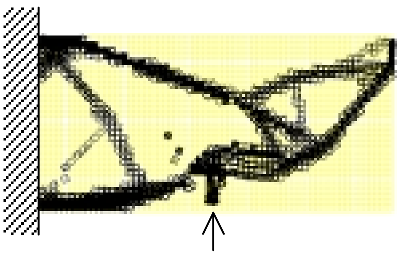


図 16　文献[2]による最適位相のその変形

2 次元連続体の位相最適化に関しても，教育目的にプリ・ポスト付きの位相最適化ソフト Isler を開発中であり，いずれホームページの方で公開する予定である。開発中のソフトの解析例をいくつか紹介する。図 18 は４隅を単純支持したシェルモデルであり，図 19,20,21 は鉛直等分布荷重，頂部集中荷重，および４点の集中荷重を与えた場合の最適位相を示している。なお，解析は対称性を利用して 1/4 領域で行っている。また，図 23,24,25 は，図 22 に示すようにシェルの曲面をスプライン関数で近似し，シェルの曲面形状と位相を同時に最適化した場合の結果である。

以上の結果から連続体では骨組とは趣の異なる位相が得られ，コンセプトデザインツールとして連続体のツールも必要であることがわかる。ただし，もう少し要素数が多くないと境界の曲線が綺麗に出ない。またシェル構造では要素がゆがんでくると精度が悪化し綺麗な位相が得られないという問題もあり，解決すべき問題は少なくない。現在，そのような問題に取り組んでおり，非線形問題への拡張も行いたいと考えている。

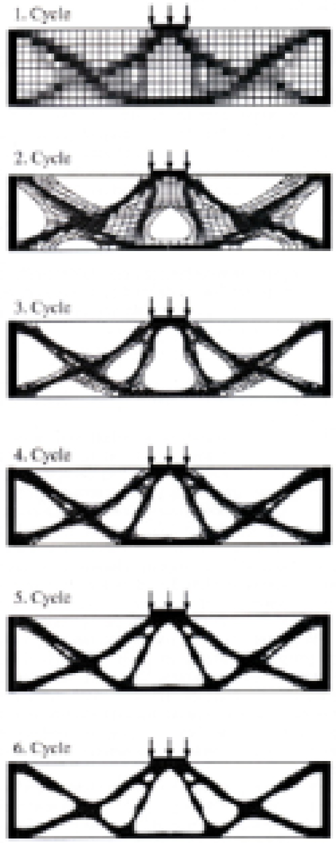


図 17　Ramm and Maute らによるアダプティブ位相最適化 [1)]

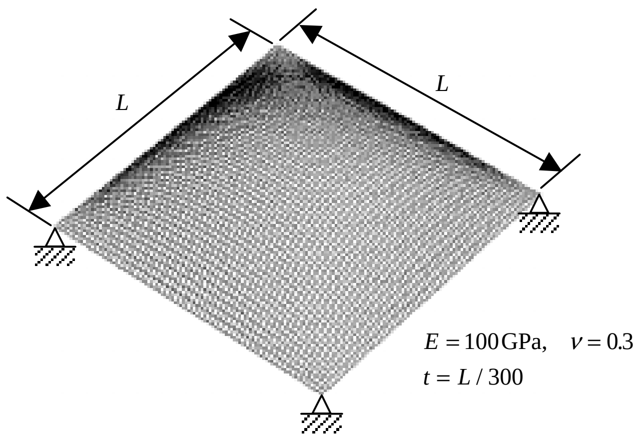


図 18　シェル構造の拡張された解析領域と諸条件

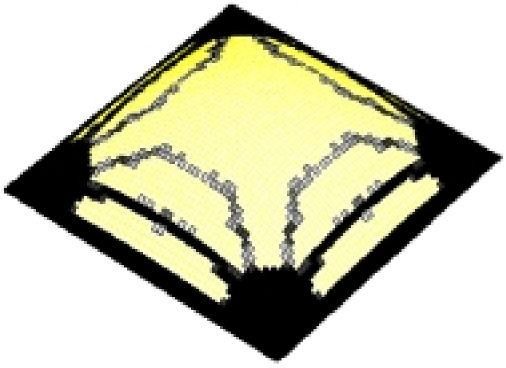


図 19　最適位相（等分布荷重）

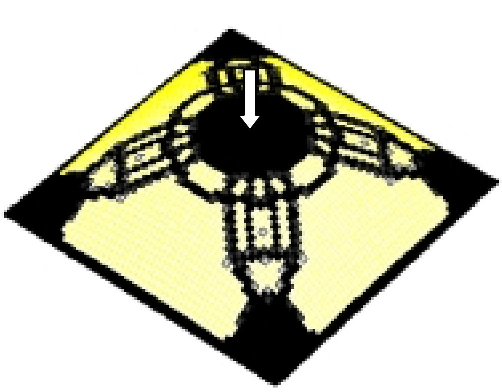


図 20　最適位相（1 点集中荷重）

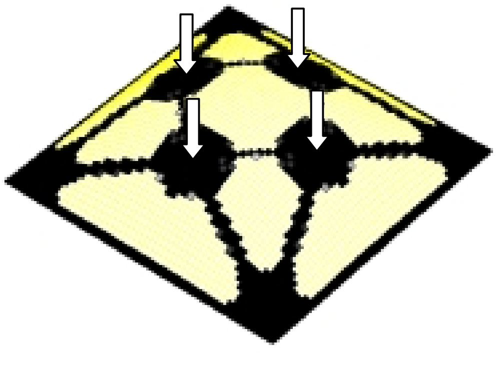


図 21　最適位相（4 点集中荷重）

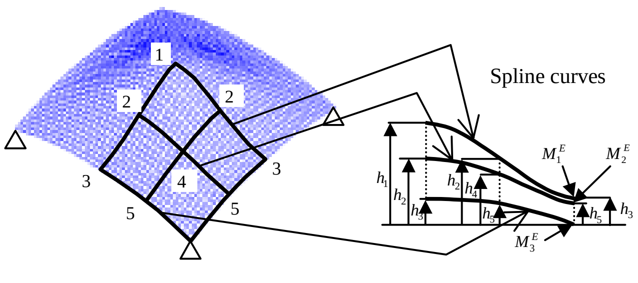


図 22　曲面形状のスプライン近似

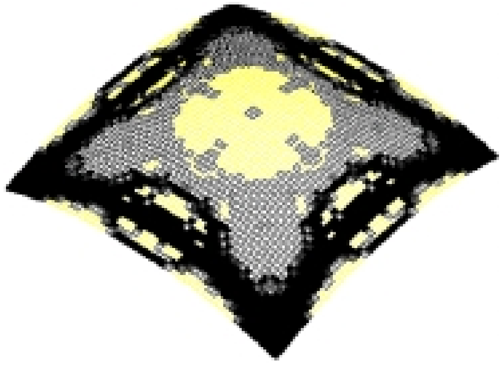


図 23　最適位相（等分布荷重）

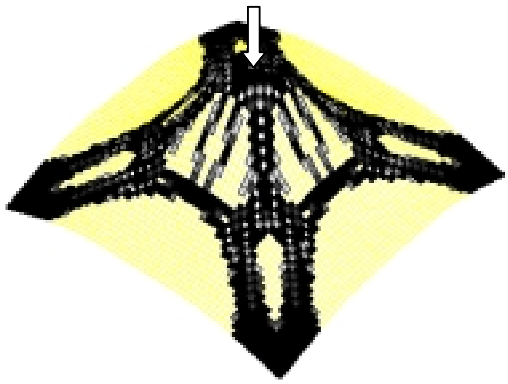


図 24　最適位相（1 点集中荷重）

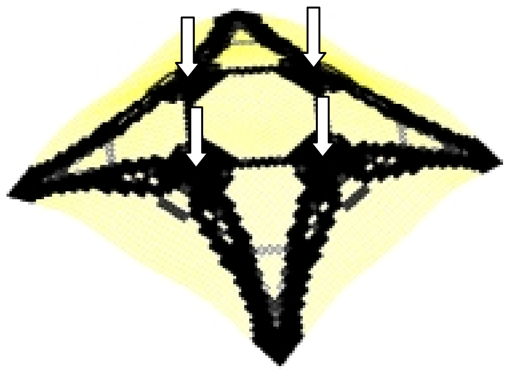


図 25　最適位相（4 点集中荷重）

５．３次元連続体の位相最適化[4]

柱や梁などの 1 次元部材も，1 本 1 本は 3 次元部材である。また，図 26 に示すような構造物の位相がもし得られるとするならば３次元連続体の位相最適化である。しかし，３次元連続体の位相最適化では膨大な要素数の問題を繰り返し解く必要があり，コンピュータの性能が著しく発達した現在でも容易には解けない。

そこで筆者らは，3 次元構造物の位相最適化を目

的として，菊池らによって提案されたボクセル有限要素法の考え方にもとづき，計算効率を飛躍的に改善した位相最適化手法の開発を行った[4]。ボクセル有限要素法は有限要素をコンピュータの画面上のピクセルと同程度の要素とし，すべて同形状の要素を用いてあらゆる構造体のメッシュ分割を可能にする方法で，コンピュータの性能の向上に伴い注目されてきた。ボクセル有限要素法では，物体の境界は材料の有無で定義される。すなわちこの方法の発想は以上上に説明してきた位相最適化手法にもとづいているのである。

図 26　アントニオ・ガウディー（グエル公園内の立体道路）

ボクセル有限要素法の計算効率上の利点としては，同形状の有限要素を用いるため要素剛性マトリックスの計算は１度行って保存しておくことが可能である点と，要素が規則正しく配置されているため各要素の節点番号情報を記憶する必要がない点などが挙げられる。また，本方法では，大規模連立一次方程式を解くために前処理付き共役勾配法などの反復解法が用いられ，Element-by-Element 手法により，全体剛性マトリックスを組み立てることなく解が求められる。この方法により，構造物の位相最適化を行う場合，前章に説明した均質化設計法では，最適化の各ステップで要素剛性マトリックスの再計算を行う必要がありこの方法の利点が失われてしまう。これに対して，要素の密度のみを設計変数とする密度法（図 27）では，最適化の過程で要素剛性マトリックスに係数として掛けられた密度関数が変化するだけであるため，要素剛性マトリックスを再計算する必要がない。なお，密度法は均質化設計法の多孔質体の穴を正方形とし角度を 0 とした場合に対応する。したがって，筆者らは３次元連続体の位相最適化手法としては密度法を採用した。しかし，密度法を用いる場合，最適解にチェッカーボード状の密度分布が顕著に現れる。この問題に対しては２次元問題で提案した重力制御フィルタリング法を適用した。また，最適化の手法としては，計算効率を優先して最適性規準法を採用した。

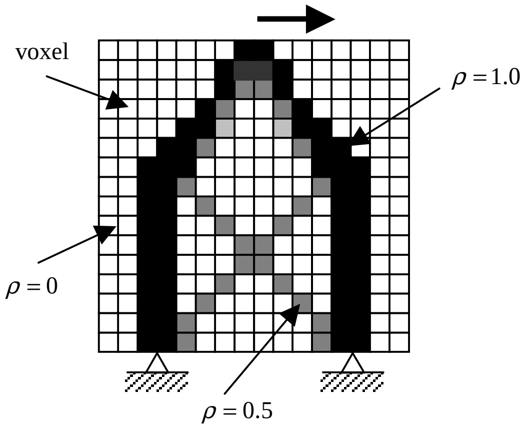


図 27　密度法による位相最適化（ρ ：密度）

手法の詳細については文献[4]を参照していただきたい。現在，この方法に関してもプリ・ポストを開発中であり，近々Gaudi という名前で教育向けに公開したいと考えている。現在 100 万要素程度なら，通常のパソコンの 256Mbyte のメモリー内で解くことができる。しかし，計算時間は１週間以上覚悟しなければならない。10 万要素程度であれば 1 日で解ける。ポストプロセッサは OpenGL を利用したものを学生に作ってもらった。OpenGL は非常にすぐれたライブラリーであり，短期間ですばらしいプログラムを作成してきたのには驚いた。

図 28,29 は，1/4 領域で，144000 要素の要素密度を設計変数とした解析モデルと解析結果を示している。体積は初期体積の 5%に制約している。本解析の計算時間は，CPU が Intel Celeron 466MHz の通常のパソコンで約 37 時間であった。この他にも，文献[4]には重力制御法が非常に効果的であることを片持平板および MBB はりモデルを３次元モデルとして解析した例題によって示している。

まだ，建築的な例題を解くまでに至っていないが，図 29 の結果を見る限り，荷重条件や境界条件の与え方によって，面白い形態を創生することも可能ではないかと考えられる。

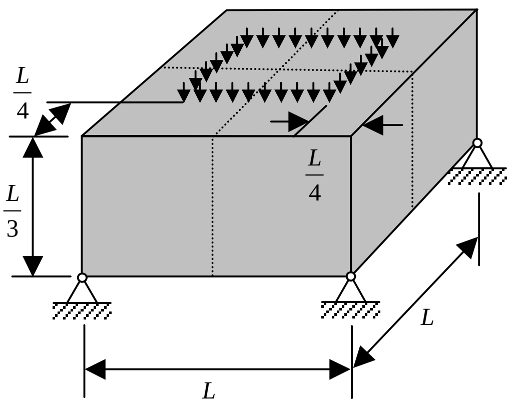


図 28　3 次元位相最適化解析モデル

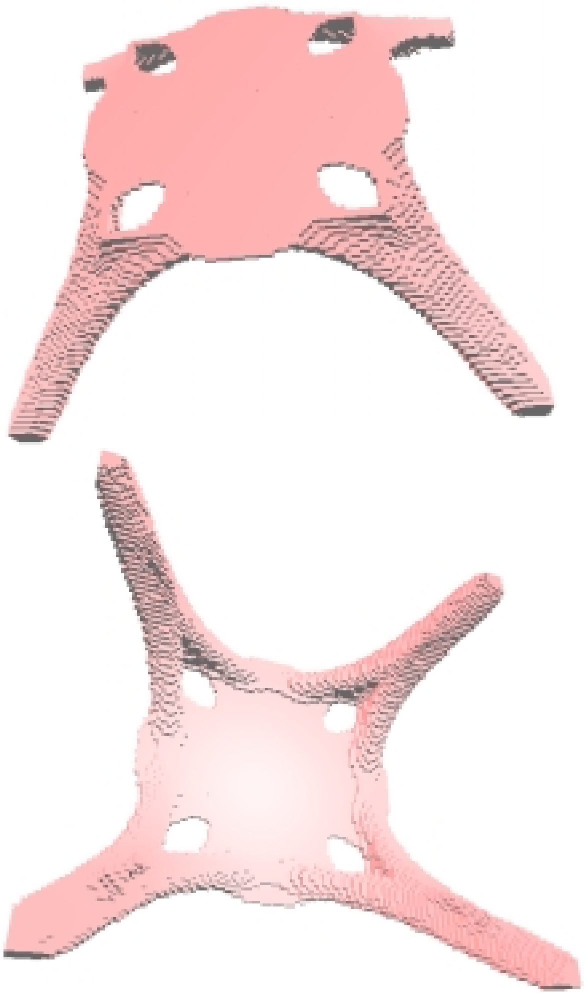


図 29　最適位相（上方および下方から見た場合）

６．複合材料のミクロ構造の設計[5]

最後に材料の設計について少し触れておく。建築や土木の世界では，材料のミクロ構造を設計するというレベルには達していないが，機械分野では光造形等の技術を使って，これまでになかったような材料を製造しようという動きが活発である。菊池らは，材料のミクロ構造を設計することでポアソン比が負になる材料や熱膨張係数が０や負になる材料を人工的に作り出すことが可能であるという研究を発表している。このように複合材料のミクロ構造の設計はこれからの分野であり，最近の製造技術の著しい進歩により，建築や土木分野においても環境に優しい新材料等の開発が望まれる。筆者はミシガン大学において，均質化法を利用してこのような材料のミクロ構造の位相を最適化する研究も行い，その成果を文献[5]にまとめている。例えば，図 30 は 2 種の境界条件のもとでせん断力を受ける複合材板のミクロ構造の位相最適化を行ったものである。この場合の目的関数は板のマクロ的な剛性の最大化である。表１に使用している材料の特性を示している。図 31，図 32 はそれぞれの場合のミクロ構造の位相最適化の結果を示している。この場合，板全体に一様にこの位相が分布していると考えればよい。また，ミクロ構造のスケールは理論的には無限小であるが均質化理論の適用範囲からすれば，マクロ構造のスケールの 1/100 以下程度と考えればよい。この場合は 1cm 以下である。図 31 の方は 2 種の材料の設計であり，図 32 の方は 3 種の材料の設計である。3 種材料の設計では空隙を入れているが，例えばこのようなところに，リサイクル不可能材料等を吸収できれば剛性をあまり落とさずに環境に優しい材料を作ることができる。

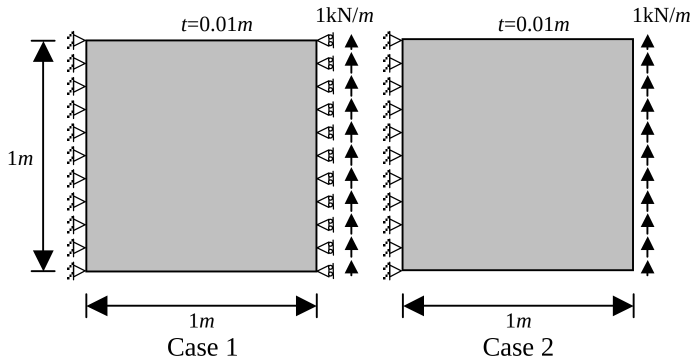
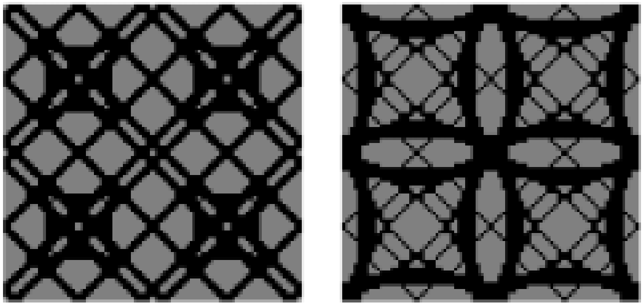


図 30　せん断力を受ける薄板の解析例

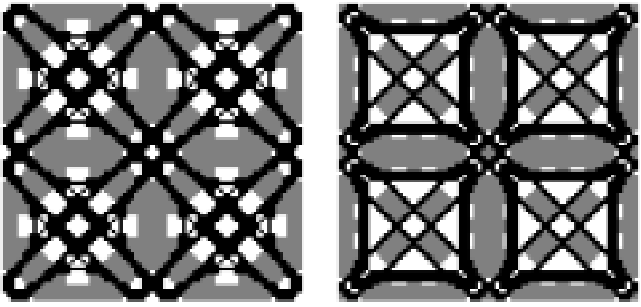
表 1　材料特性

		E (GPa)	ν
Gray Material	Cast Epoxy resin	3.0	0.25
Black Material	E-Glass Fiber	72.4	0.15
White Material	Void	10^{-7}	0.25



Case 1　　　Case 2

図 31　ミクロ構造の最適位相解（2 種材料の場合）



Case 1　　　Case 2

図 32　ミクロ構造の最適位相解（3 種材料の場合）

７．まとめ

以上，筆者の最近の研究についてまとめてみた。現時点では，ツールの開発に終始しており，このようなツールで，実際に建築家が設計するような形態を創生できるかどうかを検証するまでには至っていない。しかし，このような構造解析の手法により，建築物の形態の創生ができることには非常に魅力があり，これまでの建築学科になかった新しい分野になることを期待している。

なお，本レポートは，通常の論文形式をとらず，筆者の苦労話のような形になってしまったことをお詫びする。筆者にとっては，故半谷先生に最近の研究を報告するつもりで書かせていただいた。また，参考文献の引用も不十分であるが，最近まとめた 6 編の文献にそれぞれ引用してあるのでそちらを参考にしていただきたい。

最後に，本研究を遂行するにあたり，鋼材倶楽部鋼構造研究助成金および能村膜構造技術振興財団の助成金の補助を頂いた。また，東京大学工学系研究科学生の小玉浩平君には Gaudi のポストプロセス部分を作成していただいた。ここに記して深く感謝いたします。また，このようなセミナーで発表する機会を与えていただいた川口健一助教授に深く感謝いたします。

参考文献

1) Ramm, E. Maute, K. and Schwarz, S. : Conceptual design by structural optimization, In: de Borst, R.; Bicanic, N.; Mang, H.; Meschke, G. (eds) Conference Proceedings of EURO-C 1998, March 31-April 3, 1998, Badgastein, Austria, pp.879-896, Balkema, Rotterdam.

2) Suzuki, K. and Kikuchi, N. : A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.93, pp.291-318, 1991

3) Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N. : Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **71**, pp.197-224, 1988

4) Maute, K. and Ramm, E. : Adaptive topology optimization, Structural Optimization, **10**, pp.100-112, 1995

5) Maute, K. and Ramm, E. : Adaptive Topology Optimization of Shell Structures, AIAA Journal, **35**(11), pp.1767-1773, 1997

6) Maute, K., Schwarz, S. and Ramm, E. : Adaptive topology optimization of elastoplastic structures, Structural Optimization, 15, pp.81-91, 1998