

平面シェル要素を用いたシェル構造の弾塑性解析

ここでは、面内変形に対して 4 節点アイソパラメトリック要素を、面外変形に対して Mindlin-Reissner 理論にもとづく 4 節点アイソパラメトリック板曲げ要素を用いた平面シェル要素の導出法を示し、本要素による弾塑性解析を行う方法を説明する。

1 仮想仕事式

弾塑性問題においても、仮想仕事の原理は成り立つので、ここでは、仮想仕事の原理から剛性マトリックスを導く。

いま、仮想仕事の原理は次式のように表される。

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (1.1)$$

ここに、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は歪ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力ベクトル、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 \mathbf{b} は物体力ベクトル、 \mathbf{t} は表面力ベクトルである。3次元問題では、これらのベクトルは次のように表される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^T &= \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^T &= \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\} \\ \mathbf{u}^T &= \{u_x \quad u_y \quad u_z\} \\ \mathbf{b}^T &= \{b_x \quad b_y \quad b_z\} \\ \mathbf{t}^T &= \{t_x \quad t_y \quad t_z\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

ここで、線形ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は次のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right\} \quad (1.3)$$

2 有限要素法による離散化

節点変位を用いた多項式補間関数により、要素内の変位分布 \mathbf{u} を仮定する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U}^e \quad (2.1)$$

ここに、 \mathbf{N} は形状関数、 \mathbf{U}^e は要素の節点変位ベクトルである。このとき、(1.3)式のひずみベクトルは、次式のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{U}^e \quad (2.2)$$

(2.1)式と(2.2)式を(1.1)式に代入すると次式が得られる。

$$\int_{\Omega^e} (\mathbf{B} \delta \mathbf{U}^e)^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega^e} \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^e} \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (2.3)$$

3 増分型方程式

(2.3)式を、前ステップの既知量とその増分量で表すと次式のようなになる。

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T (\mathbf{b}_0 + \Delta \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T (\mathbf{t}_0 + \Delta \mathbf{t}) d\Gamma \quad (3.1)$$

ここに，下添字“0”は前ステップの既知量を表し， Δ はそこからの増分量を表す。(3.1)式は次のように整理できる。

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \Delta \mathbf{f}_b + \Delta \mathbf{f}_t + \mathbf{R}_0 \quad (3.2)$$

ここに， $\Delta \mathbf{f}_b, \Delta \mathbf{f}_t$ は，物体力と表面力による等価節点力， \mathbf{R}_0 は前ステップの不釣り合い力で，それぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}_b &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{b} d\Omega \\ \Delta \mathbf{f}_t &= \int_{\Gamma_f^e} \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{t} d\Gamma \\ \mathbf{R}_0 &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_0 d\Omega + \int_{\Gamma_f^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_0 d\Gamma - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.2)式の $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ は次式のように表される。

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}^e \quad (3.4)$$

ここに， \mathbf{D} は応力 - ひずみ関係マトリックス。(3.4)式を(3.2)式に代入すると，(3.2)式は次のように表せる。

$$\mathbf{k} \Delta \mathbf{U}^e = \Delta \mathbf{f}_b + \Delta \mathbf{f}_t + \mathbf{R}_0 \quad (3.5)$$

ここに，

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (3.6)$$

ここで， \mathbf{k} は要素剛性マトリックスである。

4 面内変形要素の剛性マトリックス

平面シェル要素の面内変形に対する要素として，図 4.1 に示すアイソパラメトリック要素を用いる。この場合，(2.1)式は次のように表される。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U}^e \quad (4.1)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= \{u_x \quad u_y\} \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{N}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{N}} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \\ \mathbf{U}^e &= \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_x^T &= \{u_{x1} \quad u_{x2} \quad u_{x3} \quad u_{x4}\} \\ \mathbf{u}_y^T &= \{u_{y1} \quad u_{y2} \quad u_{y3} \quad u_{y4}\} \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.2)$$

また，

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (4.3)$$

面内変形に対する増分ひずみ - 増分変位関係式は

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

であるから，上式に(4.1)式を代入すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}^e \quad (4.5)$$

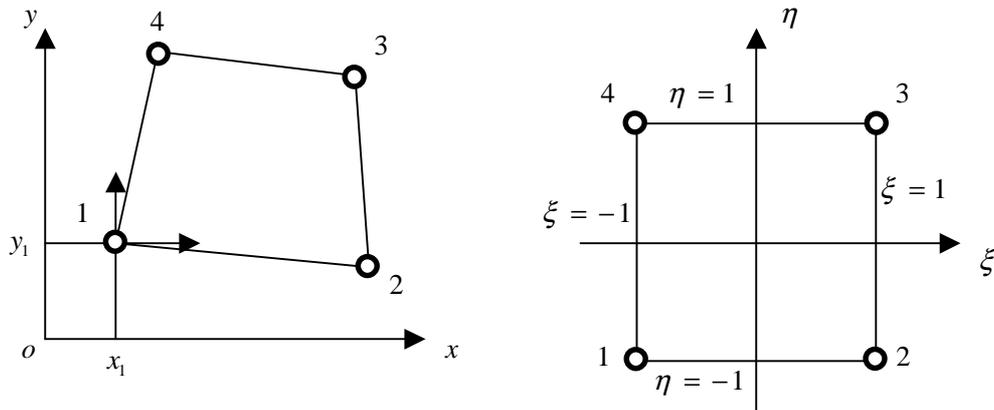


図 4.1 4 節点アイソパラメトリック平面要素

アイソパラメトリック要素では，要素内の座標も節点の座標値を用いて次式のように表される。

$$x = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{x}, \quad y = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{y} \quad (4.6)$$

ここに，

$$\mathbf{x}^T = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}, \quad \mathbf{y}^T = \{y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4\} \quad (4.7)$$

また， x, y に関する 1 階の偏微分次式から求められる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

(4.5)式より，ヤコビアンマトリックス \mathbf{J} および \mathbf{J}^{-1} は次式のように計算される。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \mathbf{x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \mathbf{y} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta} \mathbf{x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta} \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta} \mathbf{y} & -\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \mathbf{y} \\ -\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta} \mathbf{x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \mathbf{x} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta} \mathbf{y} - \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \mathbf{y} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta} \mathbf{x} \quad (4.11)$$

ここに， $|\mathbf{J}|$ は \mathbf{J} の行列式，また，(4.3)式より，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1+\eta) & -\frac{1}{4}(1+\eta) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\xi) & -\frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。したがって，

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

(3.6)式と(4.5)式より，要素剛性マトリックスは次式より求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \\ &= \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T & \mathbf{0} & \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T \\ \mathbf{0} & \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T & \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_{11} & \bar{\mathbf{k}}_{12} \\ \bar{\mathbf{k}}_{12}^T & \bar{\mathbf{k}}_{22} \end{bmatrix} d\Omega \end{aligned} \quad (4.14)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{11} &= D_{11} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + D_{13} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + D_{13} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{33} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ \bar{\mathbf{k}}_{12} &= D_{12} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{23} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{13} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + D_{33} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ \bar{\mathbf{k}}_{22} &= D_{22} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{23} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{23} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + D_{33} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.15)$$

なお，平面応力問題では，弾性マトリックス \mathbf{D} は次のようになる。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

(4.14)式を数値積分（ガウス積分）によって計算する場合次式となる。

$$\mathbf{k} = t \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \mathbf{B}(\xi_p, \eta_q)^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi_p, \eta_q) |\mathbf{J}| w_p w_q \quad (4.17)$$

ここに、 t は板厚、 n はガウス積分点数で、ここでは 2 でよい。 ξ_p, η_q は、ガウス積分の ξ, η 方向の選点の値、 w_p, w_q は重み係数値で、2 点積分の場合次のようになる。

$$\begin{aligned} \xi_1 = \eta_1 &= -0.57735026918963 \\ \xi_2 = \eta_2 &= 0.57735026918963 \\ w_1 = w_2 &= 1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

また、応力の増分値は(3.4)式から求められる。すなわち、

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}^e \quad (4.19)$$

5 曲げ変形要素の剛性マトリックス

図 5.1 に示すような座標系のもとで、板中央面の z 軸方向変位を w とし、Mindlin-Reissner 理論の仮定が成り立つとすると、板曲げ問題における板の任意点の変位 u_x, u_y, u_z は次式のように仮定できる。

$$u_x = z\theta_y(x, y), \quad u_y = -z\theta_x(x, y), \quad u_z = w(x, y) \quad (5.1)$$

ここに、 w は z 軸方向のたわみを、 θ_x, θ_y は x, y 軸まわりの回転角を表す（右ねじ方向が正）。

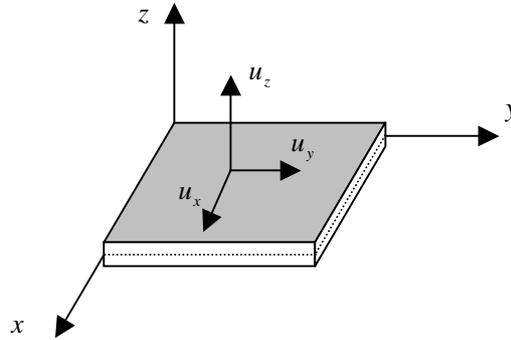


図 5.1 板の座標系と変位

上式を(1.3)式の歪 - 変位関係式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y
\end{aligned} \tag{5.2}$$

ここでは、図5.2に示すような4節点アイソパラメトリック要素を考える。正規化された座標系 ξ, η のもとで、要素内のたわみ w およびたわみ角 θ_x, θ_y を次式で仮定する。

$$w = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{w}, \quad \theta_x = \bar{\mathbf{N}}\theta_x, \quad \theta_y = \bar{\mathbf{N}}\theta_y \tag{5.3}$$

ここに、
ここに、

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{N}} &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \\
\mathbf{w}^T &= \{w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4\} \\
\theta_x^T &= \{\theta_{x1} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{x3} \quad \theta_{x4}\} \\
\theta_y^T &= \{\theta_{y1} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{y3} \quad \theta_{y4}\}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

ただし、

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{5.5}$$

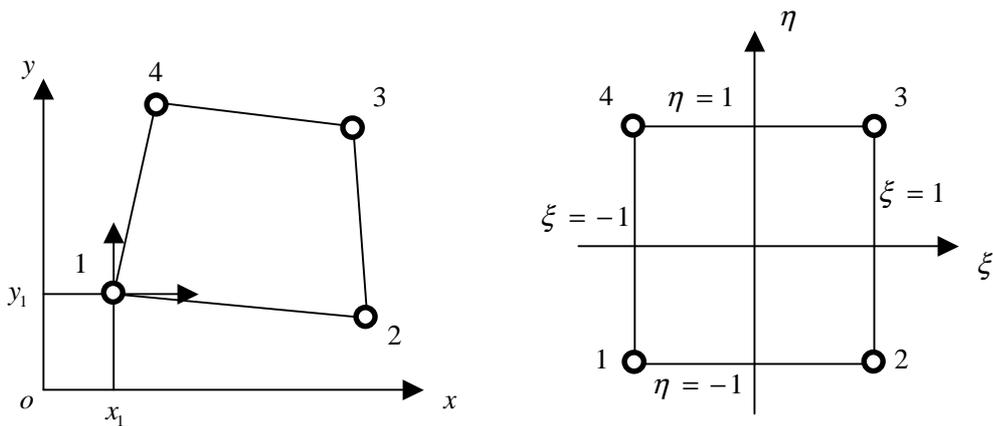


図 5.2 4 節点板曲げ要素

(5.3)式と同様に、要素の x, y 座標は、節点の座標値を用いて次式のように表す。

$$x = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{x}, \quad y = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{y} \tag{5.6}$$

ここに、

$$\mathbf{x}^T = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}, \quad \mathbf{y}^T = \{y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4\} \quad (5.7)$$

ただし,

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (5.8)$$

また, x, y に関する 1 階の偏微分次式から求められる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

(5.7)式より, ヤコビアンマトリックス \mathbf{J} および \mathbf{J}^{-1} は次式のように計算される。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \mathbf{x} & \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \mathbf{x} & \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} & -\frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} \\ -\frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \mathbf{x} & \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \mathbf{x} \cdot \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} - \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} \cdot \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \mathbf{x} \quad (5.12)$$

ここに, $|\mathbf{J}|$ は \mathbf{J} の行列式, また, (5.8)式より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1+\eta) & -\frac{1}{4}(1+\eta) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\xi) & -\frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.13)$$

となる。したがって,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

(5.3)式を歪 - 変位関係式(5.2)に代入すると, ひずみ増分と変位増分の関係は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \bar{N}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \bar{N}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{w} \\ \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^b \Delta \mathbf{U}^e, \quad \begin{Bmatrix} \Delta \gamma_{yz} \\ \Delta \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} & -\bar{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \bar{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{w} \\ \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^s \Delta \mathbf{U}^e \quad (5.15)$$

曲げ変形とせん断変形が連成しないとすると, (3.8)式の要素剛性マトリックスは次式から求めら

れる。

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{D}^b \mathbf{B}^b d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{sT} \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s d\Omega = \mathbf{k}^b + \mathbf{k}^s \quad (5.16)$$

ここに，

$$\mathbf{k}^b = \int_{\Omega^e} z^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T & -\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T & \mathbf{0} & \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^b & D_{12}^b & D_{13}^b \\ D_{12}^b & D_{22}^b & D_{23}^b \\ D_{13}^b & D_{23}^b & D_{33}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega^e} z^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}}_{22}^b & \bar{\mathbf{k}}_{23}^b \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}}_{23}^{bT} & \bar{\mathbf{k}}_{33}^b \end{bmatrix} d\Omega \quad (5.17)$$

$$\mathbf{k}^s = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T & \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \\ -\bar{\mathbf{N}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{N}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^s & 0 \\ 0 & D_{22}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & -\bar{\mathbf{N}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{N}} \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_{11}^s & \bar{\mathbf{k}}_{12}^s & \bar{\mathbf{k}}_{13}^s \\ \bar{\mathbf{k}}_{12}^{sT} & \bar{\mathbf{k}}_{22}^s & \bar{\mathbf{k}}_{23}^s \\ \bar{\mathbf{k}}_{13}^{sT} & \bar{\mathbf{k}}_{23}^{sT} & \bar{\mathbf{k}}_{33}^s \end{bmatrix} d\Omega \quad (5.18)$$

ただし，

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{22}^b &= D_{22}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{23}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{23}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + D_{33}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ \bar{\mathbf{k}}_{23}^b &= -D_{12}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} - D_{13}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} - D_{23}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} - D_{33}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ \bar{\mathbf{k}}_{33}^b &= D_{11}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + D_{13}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + D_{13}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{33}^b \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ \bar{\mathbf{k}}_{11}^s &= D_{11}^s \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{22}^s \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ \bar{\mathbf{k}}_{12}^s &= -D_{11}^s \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right)^T \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{k}}_{13}^s &= D_{22}^s \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\right)^T \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{k}}_{22}^s &= D_{11}^s \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{k}}_{23}^s &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{k}}_{33}^s &= D_{22}^s \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

また， $\mathbf{D}^b, \mathbf{D}^s$ は弾性平面応力状態では次式で表される。

$$\mathbf{D}^b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^s = \kappa G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

ただし， κ は面外せん断応力を板厚方向に一定と仮定したことを補正する係数で，Reissner によれば $\kappa = 5/6$ ，Mindlin によれば $\kappa = \pi^2/12$ である。

本要素では、板厚が薄くなると shear locking 現象が生じるため面外せん断変形に関する剛性マトリックスは低減積分を行う。まず、曲げ成分 \mathbf{k}^b に関しては、板厚を t とし、 $[-t/2, t/2]$ の区間で z 方向の積分を解析的に行い、 x, y 方向に関しては、ガウスの 2 点積分を行うと、

$$\mathbf{k}^b = \frac{t^3}{12} \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \mathbf{B}^b(\xi_p, \eta_q)^T \mathbf{D}^b \mathbf{B}^b(\xi_p, \eta_q) |\mathbf{J}| w_p w_q \quad (5.22)$$

となる。次に、面外せん断変形成分に関しては低減積分を行うが、単に 1 点積分で低減すると 0 エネルギーモードの影響で解が不安定になる場合があるため、ここでは、 γ_{yz} に関する積分と γ_{zx} に関する積分を分離し、 γ_{yz} に関する積分に関しては、 y 方向に 1 点積分、 x 方向に 2 点積分し、 γ_{zx} に関する積分に関しては、 x 方向に 1 点積分、 y 方向に 2 点積分する。具体的には、まず、 \mathbf{k}^s を y 方向のせん断剛性成分と、 x 方向のせん断剛性成分に分離する。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^s &= \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} D_{11}^s \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & -D_{11}^s \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right)^T \bar{\mathbf{N}} & \mathbf{0} \\ -D_{11}^s \bar{\mathbf{N}}^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \right) & D_{11}^s \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} D_{22}^s \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} & D_{22}^s \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right)^T \bar{\mathbf{N}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D_{22}^s \bar{\mathbf{N}}^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \right) & \mathbf{0} & D_{22}^s \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} \end{bmatrix} d\Omega \\ &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{k}}^{sy} d\Omega + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{k}}^{sx} d\Omega \end{aligned} \quad (5.23)$$

そして、次式のような低減積分を行う。

$$\mathbf{k}^s = t \sum_{p=1}^1 \sum_{q=1}^2 \bar{\mathbf{k}}^{sx}(\xi_p, \eta_q) |\mathbf{J}| w_p w_q + t \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^1 \bar{\mathbf{k}}^{sy}(\xi_p, \eta_q) |\mathbf{J}| w_p w_q \quad (5.24)$$

ただし、(5.22)、(5.24)式の 2 点積分点と重みは次の通りである。

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1 = -0.57735026918963 \\ \xi_2 &= \eta_2 = 0.57735026918963 \\ w_1 &= w_2 = 1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

また、1 点積分の積分点と重みは、 $\xi_1 = \eta_1 = 0$ 、 $w_1 = 2$ である。

応力の増分値は次式から求められる。

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^b = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{bmatrix} D_{11}^b & D_{12}^b & D_{13}^b \\ D_{12}^b & D_{22}^b & D_{23}^b \\ D_{13}^b & D_{23}^b & D_{33}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{w} \\ \Delta \boldsymbol{\theta}_x \\ \Delta \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^b \mathbf{B}^b \Delta \mathbf{U}^e \quad (5.26)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^s = \begin{Bmatrix} \Delta \tau_{yz} \\ \Delta \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^s & 0 \\ 0 & D_{22}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & -\bar{\mathbf{N}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{N}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{w} \\ \Delta \boldsymbol{\theta}_x \\ \Delta \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s \Delta \mathbf{U}^e \quad (5.27)$$

6 平面シェル要素の剛性マトリックス

弾性および弾塑性問題では,要素剛性マトリックスは面内変形と板曲げ変形で連成しないので,それぞれ(4.17)式および(5.22),(5.24)式で求められた要素剛性マトリックスを以下の自由度に対応するように組み合わせる。

$$\mathbf{U}^{eT} = \{u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1} \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ u_{y3} \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2} \ u_{x3} \ u_{y3} \ u_{z3} \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ \theta_{z3} \ u_{x4} \ u_{y4} \ u_{z4} \ \theta_{x4} \ \theta_{y4} \ \theta_{z4}\}$$

また, z 軸まわりのねじり変形に対しては, Zienkiewicz らが提案している次式の仮想剛性を付加する。

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \\ M_{z4} \end{Bmatrix} = \alpha EtA \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} = \mathbf{k}' \boldsymbol{\theta}_z \quad (6.1)$$

以上のようにして, 24×24 の線形の要素剛性マトリックス \mathbf{k} を作ることができる。

7 座標変換

図 7.1 に示すように, 全体座標系を $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, 局所座標系を x, y, z とする。各辺の中心を結ぶ 2 つの線の交点を局所座標系の原点にとり, 辺 14 の中点から辺 23 の中点に向かう方向を x 軸とする。要素面内で x 軸と垂直に y 軸を定め, x, y 軸と右手系をなすように z 軸を定める。

以上の定義にしたがい座標変換マトリックスを導出する。全体座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ の単位ベクトル

$\bar{\mathbf{e}} = \{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}^T$ と, 局所座標系 (x, y, z) の単位ベクトル $\mathbf{e} = \{e_x, e_y, e_z\}^T$ の関係は次式で表される。

$$\mathbf{e} = \mathbf{L} \bar{\mathbf{e}} \quad (7.1)$$

ここに,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{x\bar{x}} & l_{x\bar{y}} & l_{x\bar{z}} \\ l_{y\bar{x}} & l_{y\bar{y}} & l_{y\bar{z}} \\ l_{z\bar{x}} & l_{z\bar{y}} & l_{z\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x^T \\ \mathbf{L}_y^T \\ \mathbf{L}_z^T \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

\mathbf{L} は, 座標変換マトリックスと呼ばれ, $(l_{x\bar{x}}, l_{x\bar{y}}, l_{x\bar{z}})$ は局所 x 座標の全体 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 座標への方向余弦である。 $(l_{y\bar{x}}, l_{y\bar{y}}, l_{y\bar{z}}), (l_{z\bar{x}}, l_{z\bar{y}}, l_{z\bar{z}})$ も同様であり, (7.2)式は次式のようにも書ける。

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos(e_x, \bar{e}_x) & \cos(e_x, \bar{e}_y) & \cos(e_x, \bar{e}_z) \\ \cos(e_y, \bar{e}_x) & \cos(e_y, \bar{e}_y) & \cos(e_y, \bar{e}_z) \\ \cos(e_z, \bar{e}_x) & \cos(e_z, \bar{e}_y) & \cos(e_z, \bar{e}_z) \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

ここに, (e_i, \bar{e}_j) は, ベクトル e_i とベクトル \bar{e}_j の間の角度を表す。

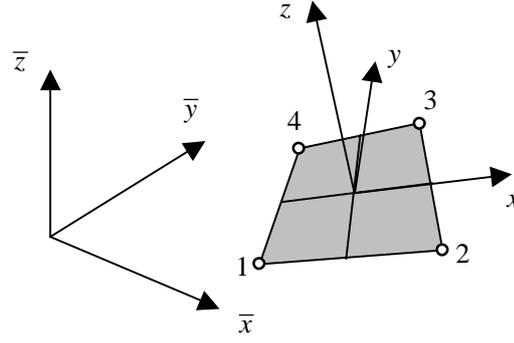


図 7.1 平面シェル要素の局所座標系と全体座標系

要素各辺の中点の座標は次式から求められる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_{12}^c \\ \bar{y}_{12}^c \\ \bar{z}_{12}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{x}_{23}^c \\ \bar{y}_{23}^c \\ \bar{z}_{23}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) \\ \frac{1}{2}(\bar{y}_2 + \bar{y}_3) \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{x}_{43}^c \\ \bar{y}_{43}^c \\ \bar{z}_{43}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\bar{x}_3 + \bar{x}_4) \\ \frac{1}{2}(\bar{y}_3 + \bar{y}_4) \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_3 + \bar{z}_4) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{x}_{14}^c \\ \bar{y}_{14}^c \\ \bar{z}_{14}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_4) \\ \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_4) \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_1 + \bar{z}_4) \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

辺 14 と辺 23 の中点を結ぶ方向に定義される x 軸の方向余弦ベクトル \mathbf{L}_x は次式から求められる。

$$\mathbf{L}_x = \mathbf{A} / |\mathbf{A}| \quad (7.5)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \{(\bar{x}_{23}^c - \bar{x}_{14}^c) \quad (\bar{y}_{23}^c - \bar{y}_{14}^c) \quad (\bar{z}_{23}^c - \bar{z}_{14}^c)\} \\ |\mathbf{A}| &= \sqrt{(\bar{x}_{23}^c - \bar{x}_{14}^c)^2 + (\bar{y}_{23}^c - \bar{y}_{14}^c)^2 + (\bar{z}_{23}^c - \bar{z}_{14}^c)^2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

つぎに, z 軸の方向余弦ベクトル \mathbf{L}_z は次式から求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_z &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} / 2S_1 \\ &= \{(A_2 \cdot B_3 - B_2 \cdot A_3) \quad (A_3 \cdot B_1 - B_3 \cdot A_1) \quad (A_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot A_2)\}^T / 2S_1 \end{aligned} \quad (7.7)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T &= \{(\bar{x}_{43}^c - \bar{x}_{12}^c) \quad (\bar{y}_{43}^c - \bar{y}_{12}^c) \quad (\bar{z}_{43}^c - \bar{z}_{12}^c)\} \\ 2S_1 &= \sqrt{(A_2 \cdot B_3 - B_2 \cdot A_3)^2 + (A_3 \cdot B_1 - B_3 \cdot A_1)^2 + (A_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot A_2)^2} \end{aligned} \quad (7.8)$$

ただし, A_1, A_2, A_3 および B_1, B_2, B_3 は, ベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} の成分である。

最後に, y 軸の方向余弦ベクトル \mathbf{L}_y は次式から求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_y &= \mathbf{L}_z \times \mathbf{L}_x \\ &= \{(L_{z2} \cdot L_{x3} - L_{x2} \cdot L_{z3}) \quad (L_{z3} \cdot L_{x1} - L_{x3} \cdot L_{z1}) \quad (L_{z1} \cdot L_{x2} - L_{x1} \cdot L_{z2})\}^T \end{aligned} \quad (7.9)$$

(7.1)式の座標変換マトリックス \mathbf{L} を用いて, 節点の要素座標は次式によって求められる。

みマトリックス \mathbf{D}^{ep} は次式で定義される。

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \mathbf{D}^p \quad (8.3)$$

ここに、 \mathbf{D}^e は弾性成分、 \mathbf{D}^p は塑性成分であり、平面応力問題の場合それぞれ次式で表される。

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & & \text{SYM.} \\ \nu & 1 & \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^p = \begin{bmatrix} \frac{S_1^2}{S} & & \text{SYM.} \\ \frac{S_1 S_2}{S} & \frac{S_2^2}{S} & \\ \frac{S_1 S_6}{S} & \frac{S_2 S_6}{S} & \frac{S_6^2}{S} \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

ただし、

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'_x + \nu \sigma'_y), \quad S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \sigma'_x + \sigma'_y), \quad S_6 = \frac{E}{1+\nu} \tau_{xy} = 2G\tau_{xy} \quad (8.5)$$

$$\sigma'_x = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}, \quad \sigma'_y = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3} \quad (8.6)$$

ここに、 E はヤング係数、 ν はポアソン比、 G はせん断弾性係数である。

したがって、プログラムの際には、荷重を除々に増加して行って、各要素で(8.2)式の相当応力を計算し、この値が c を超えたならば応力 - ひずみ関係式を \mathbf{D}^e から \mathbf{D}^{ep} に置き換えればよい。ただし、荷重増分幅が一定の場合 $f = c$ は厳密には成り立たないので、荷重増分のやり方には大きく、 r_{\min} 法、換算弾性係数法、Newton-Raphson 反復解法の3種の方法が提案されている。ここでは、より一般的な解法である Newton-Raphson 反復解法を採用する。

プログラムのアルゴリズムは次のとおりである。まず、荷重増分ベクトル $\Delta \mathbf{F}$ を以下のように定める。

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta \lambda \mathbf{F} \quad (8.7)$$

ここに、 $\Delta \lambda$ は荷重増分倍率で $1/100 \sim 1/1000$ 程度に設定する。

第1ステップでは次式の接線剛性方程式を解く。

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}_1 = \Delta \mathbf{F} \quad (8.8)$$

ここに、 \mathbf{K} は弾性剛性マトリックス、 $\Delta \mathbf{U}_1$ は変位増分ベクトルである。

(8.8)式から得られた $\Delta \mathbf{U}_1$ により、各要素のガウス積分点における応力増分 $\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy}$ を計算し、これらを(8.2)式に代入することにより $\bar{\sigma}$ を計算する。そして、すべての要素のガウス積分点で最大の $\bar{\sigma} (= \bar{\sigma}_{\max})$ から弾性限の荷重倍率 λ_L を次式により算出する。

$$\lambda_L = \frac{c}{\bar{\sigma}_{\max}} \quad (8.9)$$

この λ_L を用いて弾性限の荷重倍率、変位、応力ベクトルが次式のように求められる。

$$\lambda_1 = \lambda_L \Delta \lambda, \quad \mathbf{U}_1 = \lambda_L \Delta \mathbf{U}_1, \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \lambda_L \Delta \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (8.10)$$

次のステップでは、

$$\mathbf{K}_2^{ep(0)} \Delta \mathbf{U}_2^{(0)} = \Delta \mathbf{F} \quad (8.11)$$

を解く。ここに、 \mathbf{K}^{ep} は、降伏した要素積分点の応力 - ひずみマトリックスを(1.3)式に入れ換えて計算した弾塑性剛性マトリックスである。また、 $\mathbf{K}_2^{ep}, \Delta \mathbf{U}_2$ の上添字は Newton-Raphson 法の繰り

返し回数を示す。(8.11)式から得られた $\Delta U_2^{(0)}$ から各要素のガウス積分点の応力増分を計算する。この時の応力 - ひずみマトリックスは(1.11)式の \mathbf{K}^{ep} の計算に用いているものと同じである。これらの応力増分から次式により各要素の応力を求める。

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(0)} \quad (8.12)$$

(8.12)式から不釣り合い力

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(0)} = (\lambda_1 + \Delta\lambda)\mathbf{F} - \sum \int \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(0)} d\Omega \quad (8.13)$$

を計算すると $\tilde{\mathbf{R}}^{(0)} = \mathbf{0}$ となる。ただし、 \mathbf{B} はひずみ - 変位マトリックスである。これは、(8.11)式の \mathbf{D}^{ep} と応力増分の計算に用いられた \mathbf{D}^{ep} が同じものであるからである。したがって、不釣り合い力は、再度(8.12)式により(8.3)式を計算し、これと $\Delta U_2^{(0)}$ から各要素積分点の応力増分 $\Delta\boldsymbol{\sigma}_2^{(0)}$ を計算する。そして、これから求まった

$$\boldsymbol{\sigma}_2^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_2^{(0)} \quad (8.14)$$

により求める。すなわち、

$$\mathbf{R}^{(0)} = (\lambda_1 + \Delta\lambda)\mathbf{F} - \sum \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_2^{(0)} d\Omega \quad (8.15)$$

となる。そして、この不釣り合い力 $\mathbf{R}^{(0)}$ を Newton-Raphson 法により 0 に収束させる。Newton-Raphson 法では次式の方程式を解く。

$$\mathbf{K}_2^{ep(1)} \Delta U_2^{(1)} = \mathbf{R}^{(0)} \quad (8.16)$$

(8.16)式から計算された $\Delta U_2^{(1)}$ から各要素の応力増分ベクトルを計算し、それから各要素の応力を求め、再度その応力から \mathbf{D}^{ep} を計算し、不釣り合い力を計算するための応力増分を求める。同様の計算を \mathbf{R} のノルムが与えられた値以下になるまで繰り返す。以上の繰り返し数を n とすると、第2ステップの収束した変位増分、応力増分、変位、応力ベクトルは次式で表される。

$$\Delta U_2 = \sum_{k=0}^n \Delta U_2^{(k)}, \quad \Delta\boldsymbol{\sigma}_2 = \sum_{k=0}^n \Delta\boldsymbol{\sigma}_2^{(k)}, \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 + \Delta\mathbf{U}_2, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_2 \quad (8.17)$$

(8.11)から(8.17)式の計算を i ステップの荷重増分率 λ_i が1を超えるか、または(8.11)式が不安定になるまで、すなわち構造物の崩壊まで繰り返す。

なお、崩壊の判定は、指定した Newton-Raphson 法の繰り返しで、指定した許容誤差の10倍～100倍を超えた時点で崩壊と見なせばよい。