

構造の近似について

1. 3次元弾性論

図 1.1 に示す 3 次元弾性体内の (x, y, z) 点の x, y, z 方向の変位を次のように表す。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{aligned} \tag{1.1}$$

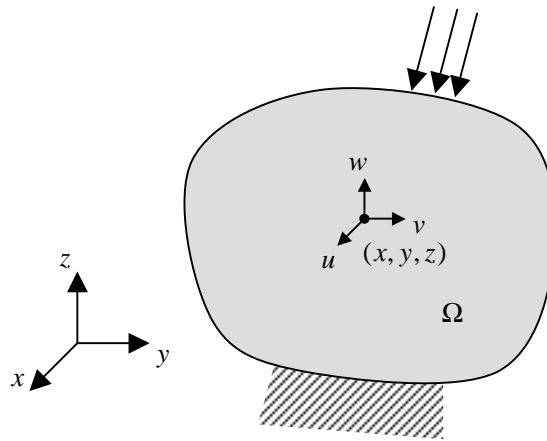


図 1.1 3次元弾性体の変位

(1.1)の変位より，歪みは次式のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.2}$$

ただし，ここでは $\partial u / \partial x$ などは微小として，これらの 2 乗および積の項を省略している（微小変形理論）。

均質等方弾性体を仮定すると，歪みと応力の関係式は次式で表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx} \end{aligned} \tag{1.3}$$

これから，応力 - 歪み関係式は次式のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.4}$$

ここに， $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ は応力，歪みベクトル

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T \end{aligned} \quad (1.5)$$

であり， \mathbf{D} は弾性マトリックス

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

である。

したがって，弾性体内の歪みエネルギーは次式で表される。

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (1.7)$$

2. 2次元平面問題

2次元平面問題では，(1.1)の変位を次式のように仮定する。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(z) \end{aligned} \quad (2.1)$$

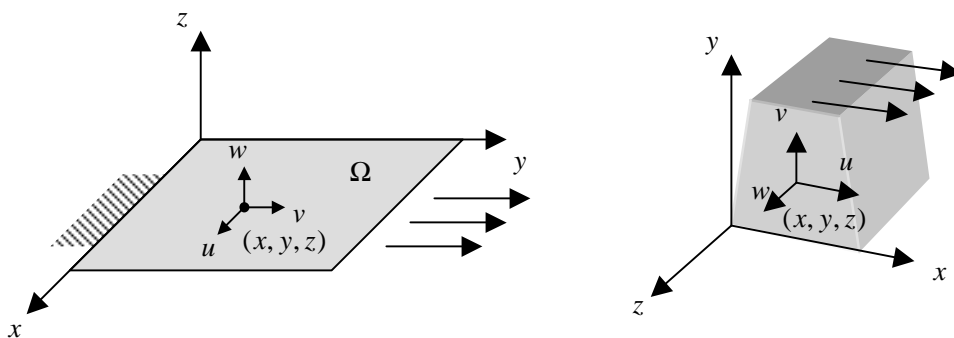


図 2.1 2次元平面の変位（平面応力仮定と平面歪み仮定）

(2.1)式を(1.2)式に代入すると，

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w_0}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (2.2)$$

また，均質等方性材料の応力成分は， $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ から $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ となるので，(1.3)式は，

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。この場合，面内（ xy 平面内）の歪み $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ に，面外（ z 方向）の応力 σ_z が関わっているため，このままでは2次元問題として解くことができない。そこで， $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ を2種の仮定によって， σ_x, σ_y のみで表す。

1つの仮定は，平面応力仮定であり，この場合は， $\sigma_z = 0$ を仮定する。この場合(2.3)式は，

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.5)$$

となる。(2.4)式を応力成分に関して解くと，

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6)$$

ここに，

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。この場合の歪みエネルギーは，

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_z \sigma_z d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (2.8)$$

となり， σ_z が0であるため(2.5)式の ε_z の寄与項は0となる。

もう1つの仮定は，平面歪み仮定であり，この場合は， $\varepsilon_z = 0$ を仮定する。この場合，(2.3)式より次のような関係式が得られる。

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.9)$$

この関係式を(2.3)式の $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ の式に代入し，応力成分について解くと次式の関係が得られる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.10}$$

ここに,

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T \end{aligned} \tag{2.11}$$

この場合の歪みエネルギーも $\varepsilon_z = 0$ を考慮すると次式となる。

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \tag{2.12}$$

したがって、2次元平面問題では、以下の近似が用いられている。

1. 面内の変位 u, v が x, y のみの関数 (u, v が z 方向で変化しない)
2. 面外の変位 w が x, y に独立な関数 (w が任意の (x, y) 点で同じ値)
3. 平面応力仮定では $\sigma_z = 0$
4. 平面歪み仮定では $\varepsilon_z = 0$

なお、1と2の仮定により、 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ となる。

3. 2次元板曲げ問題

板曲げ問題では、 z 方向のたわみ w と、 x, y 軸まわりの回転角を用いて3次元の変位を2次元化する。すなわち、(1.1)の変位を次式のように仮定する。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここに、 w_0 は z 軸方向のたわみを、 θ_x, θ_y は x, y 軸まわりの回転角を表す（右ねじ方向が正）。

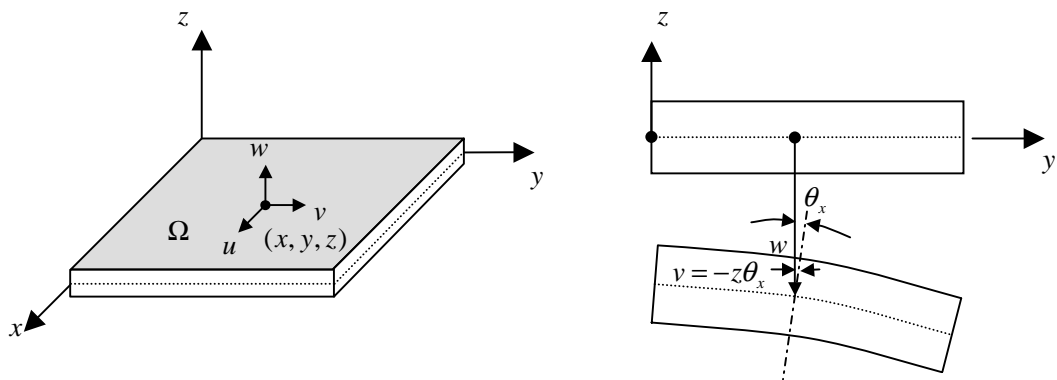


図 3.1 2次元板曲げにおける変位

(3.1)式を歪み変位関係式(1.3)に代入すると，

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

応力は，平面応力（ $\sigma_z = 0$ ）を仮定する。この場合，(1.3)式は次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y \\
 \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.3)式を応力成分について解き，面内と面外の応力に分けて表すと次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{D}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s \tag{3.4}$$

ここに，

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$$

$$\mathbf{D}^s = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s = \{\gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \{\tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T$$

(3.3)式，(3.4)式から作られる歪みエネルギーは次式となる。

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \frac{1}{2} \kappa \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{sT} \mathbf{D}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s d\Omega \tag{3.7}$$

ただし， κ は面外せん断応力を板厚方向に一定と仮定したことを補正する係数で，Reissnerによれば $\kappa = 5/6$ ，Mindlinによれば $\kappa = \pi^2/12$ である。

なお，古典的な薄板の板曲げ理論では面外のせん断変形は0と仮定される。すなわち，

$$\begin{aligned}
 \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x = 0 & \quad \Rightarrow \quad \theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 \gamma_{zx} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y = 0 & \quad \Rightarrow \quad \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.8)式を(3.1)式に代入すると，Kirchhoff の仮定にもとづく変位式，

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.9)$$

が得られる。この場合(3.2)式は，

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

したがって，歪みエネルギーは次式となる。

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (3.11)$$

この場合，(3.10)式の歪みが w の x, y に関する 2 階微分となるため，エネルギー原理が成り立つためには， w の x, y に関する 1 階微分が連続である必要がある。

以上に示したように，2次元板曲げ問題では，以下の近似が用いられている。

1. 面内の変位 u, v が x, y 軸まわりの回転角と板の中立軸を 0 とする座標 z との積で表される。また，古典理論では， u, v が x, y 軸まわりのたわみ角 (w の y, x 方向の微分) と板の中立軸を 0 とする座標 z との積で表される。
2. たわみ変位 w が x, y のみの関数 (w が z 方向で変化しない $\Rightarrow \varepsilon_z = 0$)
3. 平面応力仮定 ($\sigma_z = 0$)

なお，1 と 2 の仮定により， $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ は z 方向 (板厚方向) で一定が仮定されたことになる。

4. 平面シェル問題

(2.1)式と(3.1)式を両方考慮すると平面シェルの変位仮定となる。ただし，(2.1)式の $w(z)$ は(3.1)式のたわみ $w(x, y)$ と比較して無視できるものとする。この場合，

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

上式を(1.2)式の歪み変位関係式に代入すると，

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \varepsilon_x^p + \varepsilon_x^b & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \varepsilon_y^p + \varepsilon_y^b & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) = \gamma_{xy}^p + \gamma_{xy}^b
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

また，平面応力を仮定した場合，応力 - 関係式は次式となる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{D}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s \tag{4.3}$$

ここに，

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$$

$$\mathbf{D}^s = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s = \{\gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^b = \{\tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T$$

中立面が板の要素中央にあることを仮定すると，

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z dz = 0 \tag{4.6}$$

となるので，歪みエネルギーは次式から計算される。

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{pT} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{bT} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^b d\Omega + \frac{1}{2} \kappa \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{sT} \mathbf{D}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s d\Omega \tag{4.7}$$

ここに，

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \{\varepsilon_x^p \quad \varepsilon_y^p \quad \gamma_{xy}^p\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^b = \{\varepsilon_x^b \quad \varepsilon_y^b \quad \gamma_{xy}^b\}^T \tag{4.8}$$

(4.6)式からわかるように，平面シェルでは面内変形による歪みエネルギーと曲げ変形による歪みエネルギーは分離できる。したがって，平面シェルの近似は平面問題と板曲げ問題の近似と等価である。

5. 1次元問題

1次元問題では，断面不変（断面剛）の仮定と，変形前に材軸に直交していた断面は，曲げ変形後も変形した材軸に直交しているという Bernoulli-Euler の仮定にもとづいて次式のように3次元変位が1次元化される。

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x) - y \frac{dv_0(x)}{dx} - z \frac{dw_0(x)}{dx} + \omega(y, z)\alpha \\
 v(x, y, z) &= v_0(x) - z\theta_x(x) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x) + y\theta_x(x)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

ただし， u_0, v_0, w_0 は，断面の図心軸上の軸方向変位と y, z 軸方向のたわみである。また， θ_x は x 軸まわりの回転角，すなわちねじり角である。また， ω はゆがみ関数と呼ばれるものであり，断面

形状によって定まる係数である。 α は、一般的には $\alpha = d\theta_x/dx$ であるが、サンプナンねじりが仮定される場合は、 α は一定となる（骨組解析の場合は一般的にサンプナンねじりが仮定される）。

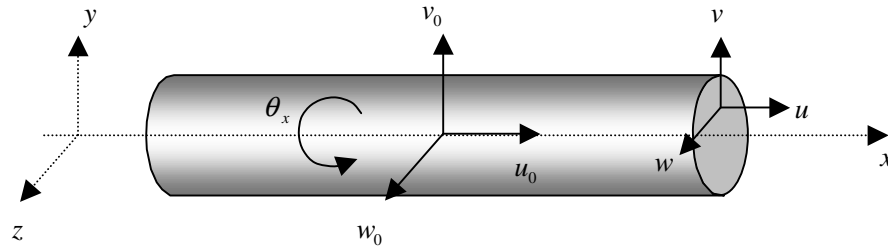


図 5.1 はり要素とはりの変位場

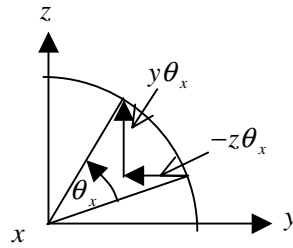


図 5.2 ねじり角と変位 v, w の関係

(5.1)式を(1.2)式の歪み - 変位関係に代入すると、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0(x)}{dx} - y \frac{d^2 v_0(x)}{dx^2} - z \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - z \right) \alpha \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} + y \right) \alpha \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0\end{aligned}\tag{5.2}$$

ここに、 $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$ が断面不変の仮定に相当する。すなわち、この条件が満足されるように(5.1)式の変位が定められている。

均質等方弾性体を仮定すると、歪みと応力の関係式は次式で表される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}\end{aligned}\tag{5.3}$$

ここで、 $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ の条件から σ_y, σ_z を σ_x で表して、応力 - 歪み関係を求めることもできるが、

はり理論では，断面内無応力の仮定により $\sigma_y = \sigma_z = 0$ とする。この場合，応力 - 歪み関係は次式となる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E\varepsilon_x \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{5.4}$$

すなわち，はり理論では，断面内は無歪みかつ無応力が仮定されている。

(5.2)，(5.4)式から次式の歪みエネルギーが計算される。

$$V = \frac{1}{2} \iiint E \left(\frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2v_0}{dx^2} - z \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 dx dy dz + \frac{1}{2} \iiint G\alpha^2 \left\{ \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dx dy dz\tag{5.5}$$

断面内 (y, z) の積分を行うと次のようになる。

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EA \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 + EI_z \left(\frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 + EI_y \left(\frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 + GK\alpha^2 \right\} dx\tag{5.6}$$

ここに， l は，はり要素の長さであり，また，

$$\begin{aligned}A &= \iint dy dz \\ I_z &= \iint y^2 dy dz, I_y = \iint z^2 dy dz \\ K &= \iint \left\{ \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dy dz\end{aligned}\tag{5.7}$$

なお，(5.6)式の導出では，断面の原点は図心，座標軸は断面の主軸方向とするため，

$$\iint y dy dz = 0, \quad \iint z dy dz = 0, \quad \iint yz dy dz = 0\tag{5.8}$$

であることを利用している。

(5.1)式では，はりのせん断変形が無視されているため，太短いはりや薄肉断面はりでは誤差が大きくなる。はり理論でせん断変形を考慮するやり方は2種類あり，一つは，板の場合の(3.1)式と同様にはりの曲げによる回転角を独立に定義する方法である。この場合，変位は次式で仮定される。

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x) - y\phi_x(x) - z\phi_y(x) + \omega(y, z)\alpha \\ v(x, y, z) &= v_0(x) - z\theta_x(x) \\ w(x, y, z) &= w_0(x) + y\theta_x(x)\end{aligned}\tag{5.9}$$

このような変位仮定にもとづく理論を Timoshenko のはり理論と呼んでいる。もう一つの方法は，(5.1)式にせん断変形による回転角を付加する方法で，この場合，変位は次式で仮定される。

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x) - y \left(\frac{dv_0(x)}{dx} + \phi_x(x) \right) - z \left(\frac{dw_0(x)}{dx} + \phi_y(x) \right) + \omega(y, z)\alpha \\ v(x, y, z) &= v_0(x) - z\theta_x(x) \\ w(x, y, z) &= w_0(x) + y\theta_x(x)\end{aligned}\tag{5.10}$$

(5.10)式を用いることのメリットは、有限要素法を適用する場合に3次関数を用いることができるため、節点に荷重が加わる問題では正解が得られる点と、細長いはりを解く場合にシアロックキングの心配がない点である。なお、(5.10)式は離散化された後、曲げによるたわみ角と、せん断変形による回転角を、次式の力学的関係を用いて、(5.9)式の回転角になるように自由度の縮約を行う。

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx}, \quad Q_z = \frac{dM_y}{dx}, \quad (5.11)$$

ただし、

$$Q_y = \iint \tau_{xy} dx dy, \quad M_z = \iint y \sigma_x dx dy, \quad Q_z = \iint \tau_{zx} dx dy, \quad M_y = \iint z \sigma_x dx dy \quad (5.12)$$

6. 有限要素法による近似とその問題点

6.1 2次元平面問題における問題点

- 1) 三角形要素の精度 定歪み要素では非常に多くの要素分割数を必要とする。このため、三角形要素としては2次要素が一般に用いられるようである。
- 2) 適合性の条件 高次要素、曲げモードを考慮した要素では、要素の辺上で変位の連続性が満足されない場合が多い。
- 3) 四辺形要素のゆがみ 四辺形要素では、要素のゆがみが大きくなると著しく精度が悪化する。
- 4) 曲げモードの近似 低次の四辺形要素では、変位が線形で仮定されているため、曲げモードの近似度が悪く、曲げが支配的な問題では精度が著しく悪化する。解決法としては、選択低減積分、変位関数の高次化、応力・歪み仮定法、混合法等が提案されている。

6.2 2次元板曲げ問題における問題点

- 1) Shear locking (3.1)~(3.7)式 (Mindlin-Reissner 理論) にもとづく有限要素では、板が薄くなると、薄板の理論解に比較して極端に堅い解が得られる。この現象を Shear locking 現象と呼んでいる。この問題を解決する方法として、最も一般的に用いられている方法が選択低減積分法である。この方法は、(3.7)式の面外せん断歪みに関する積分の数値積分次数を面内歪みの積分次数に比較して下げる方法である。Shear locking 問題のその他の解決法として、歪み仮定法 (Bathe-Devorkin)、離散キルヒホッフ法、混合法にもとづく方法等がある。
- 2) ゼロ・エネルギーモード 選択低減積分法を用いて計算した要素剛性マトリックスが、剛体変形モードに対応する3個以上の0固有値を持つ。このため解が不安定になる。選択低減積分法を用いながらゼロ・エネルギーモードを抑える方法としては、(3.7)式のせん断歪みに関する低減積分を行う場合、 γ_{yz} と γ_{zx} に関する積分を分離し、4節点要素を例にとると、 γ_{yz} の積分は 2×1 点積分、 γ_{zx} の積分は 1×2 点で行う方法である (Kanok-Nukulchai ら)。この他にも Liu らによって提案された安定化マトリックス法などがある。
- 3) 適合性の条件 (薄板) (3.9)~(3.11)式 (古典的理論) を用いる場合、要素間の辺上で C1 連続条件を満足する変位関数を見つけることが困難であるため、節点のみ連続条件を満た

す要素が提案されている。このような要素は非適合要素と呼ばれ、同じ要素分割であれば適合要素よりも精度の良い解が得られる。しかしながら、パッチテストに合格しない要素は解の収束が保証されない。

- 4) せん断力の精度 面外せん断応力の積分によって得られるせん断力の精度が悪い。特に薄板では、せん断歪みが0となるため、せん断力を応力から計算することができない。

非適合要素では、はり理論の考え方を応用した、以下のような変位仮定を用いる方法もある（藤井，藤谷ら）。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \left(\frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \varphi_y(x, y) \right) \\ v(x, y, z) &= -z \left(\frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \varphi_x(x, y) \right) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (6.1)$$

ここに、 φ_x, φ_y はせん断変形による回転角である。このような仮定にもとづいて w に3次の変位関数を仮定する。また、定式化の過程で、曲げモーメントとせん断力の力学的な関係式を用いて、最終的には(3.1)式の θ_x, θ_y に対応する自由度に縮約する。この要素では、厚板から薄板まで shear-locking のない精度の良い解が得られる。ただし、非適合要素であり、矩形以外はパッチテストに合格しないため、要素形状が異形になった場合の解の収束性が保証されない。

6.3 1次元はりにおける問題点

- 1) ねじりによるゆがみ サンプナンねじりを仮定している場合、ねじりによる断面のゆがみの影響が正しく評価されない。これは、特に非対称断面で顕著に現れる。
- 2) ねじり率の伝達 サンプナンねじり条件を除いて、 α の代わりに、ねじり率 $\theta'_x (= d\theta_x / dx$: ねじり角の材軸方向に関する変化率) を用いた場合、ねじり率の部材間の伝達機構が解明されていない。
- 3) せん断力の精度 せん断応力を積分してせん断力を求めると誤差が大きいので、通常は曲げモーメントを材軸方向座標で微分することによりせん断力を求める。