

PML 境界を適用した 3 次元地盤の波動伝播解析

Berenger の提案した PML 波動吸収境界は、音波、電磁波の波動解析の分野で最も有効な波動吸収境界条件として利用されている。そこで、本研究では、PML 波動吸収境界を 3 次元地盤の波動吸収境界として用いることを検討する。

3 次元地盤の解析法としては、領域内部に関しては、通常の変位型有限要素法を適用し、境界近傍で、PML 境界要素との結合を行う。有限要素としては、同形状の長方柱要素を用い、時間積分は陽解法で行うものとする。

1. 3 次元弾性地盤の運動方程式と波動方程式

弾性論によれば、直交デカルト座標系 (x, y, z) における等方均質弾性体の力の釣合式は次式のように表される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (1.1)$$

ここに、 u, v, w は x, y, z 方向の変位、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ は応力、 ρ は単位体積あたりの質量、 t は時間を表す。

応力とひずみの関係は、フック(Hooke)の法則により次式のように表される。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\quad (1.2)$$

ここに、 λ, G はラーメの定数で、ヤング係数を E 、ポアソン比を ν とすれば、

$$\lambda = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E, \quad G = \frac{1}{2(1+\nu)}E \quad (1.3)$$

また、 θ は体積ひずみを表し、次式のように表される。

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.4)$$

ここに、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ はひずみを表す。

ひずみと変位の関係は、次式で表される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (1.5)$$

(1.2)式と(1.5)式を(1.1)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

(1.6)式が変位で表された運動方程式となる。

3次元弾性体の波動方程式を求めるには、変位を次式のように変位ポテンシャルで表す。

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial y} \\
v &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \chi}{\partial x} \\
w &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

ここに、 ϕ, ψ, χ は、それぞれP波、S波についての波動方程式の解であり、次式を満足する。

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\
\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= G \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \\
\rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= G \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

なお、変位ポテンシャル ψ は u, v, w に関するSV波を与える。一方、変位ポテンシャル χ は u, v のみに関係するSH波を与える。(1.8)式は次式のようにも表される。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \nabla^2 \phi \\
\frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \nabla^2 \psi \\
\frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= \nabla^2 \chi
\end{aligned} \tag{1.9}$$

ここに、 V_p, V_s はP波、S波の速度を表し、次式で定義される。

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}, \quad V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{1.10}$$

また、 ∇^2 はLaplace演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.11}$$

である。

通常の有限要素法では、(1.1)式および力学的境界条件から弱形式を導き、これを離散化することによって定式化される。しかし、PML境界を用いる場合、まず、(1.9)式の波動方程式を解き、これから、(1.7)式、(1.5)式、(1.2)式によって、変位、ひずみ、応力を求めることになる。

2 . PML 境界を有する地盤の波動方程式

PML 境界を適用する場合，音波の方程式と対応させるため，(1.8)式の波動方程式を次式のように分解する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = G \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial \chi}{\partial t} = G \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial C_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

ちなみに，音波の支配方程式は次式となる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

ここに， $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ は x, y, z 方向の速度で，上付ドットは時間に関する微分を表す。また， p は音圧， K は体積弾性率 ($K = \rho c^2$ ， c :速度) である。(2.1)～(2.3)式と(2.4)式を比較すると，同様の形式であることがわかる。また，これらの比較から， A_x, A_y, \dots, C_z は媒質を伝播する速度に対応していることがわかる。

(2.1)～(2.3)式は無減衰の方程式であるが，減衰がある場合の方程式は，音波の減衰方程式を参考にすると次式のように書ける。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - (\lambda + 2G) \alpha_p \phi \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \alpha_p^* A_x, \quad \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \alpha_p^* A_y, \quad \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \alpha_p^* A_z$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = G \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) - G \alpha_{sv} \psi \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \alpha_{sv}^* B_x, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \alpha_{sv}^* B_y, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \alpha_{sv}^* B_z$$

$$\rho \frac{\partial \chi}{\partial t} = G \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) - G \alpha_{sh} \chi \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \alpha_{sh}^* C_x, \quad \frac{\partial C_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \alpha_{sh}^* C_y, \quad \frac{\partial C_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \alpha_{sh}^* C_z$$

ここに, $\alpha_p, \alpha_{SV}, \alpha_{SH}$ および $\alpha_p^*, \alpha_{SV}^*, \alpha_{SH}^*$ は減衰定数であり, 前者は質量比例型の減衰係数に比例し, 後者は剛性比例型の減衰係数に対応する。しかし, $\alpha_p^*, \alpha_{SV}^*, \alpha_{SH}^*$ と剛性比例型の減衰係数との関係は一意には定まらない。

さらに, PML 境界では, (2.5) ~ (2.7) 式をさらに次式のように分解する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_x}{\partial t} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial A_x}{\partial x} - (\lambda + 2G) \alpha_{Px} \phi_x & \rho \frac{\partial \psi_x}{\partial t} &= G \frac{\partial B_x}{\partial x} - G \alpha_{SVx} \psi_x \\
\frac{\partial \phi_y}{\partial t} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial A_y}{\partial y} - (\lambda + 2G) \alpha_{Py} \phi_y & \rho \frac{\partial \psi_y}{\partial t} &= G \frac{\partial B_y}{\partial y} - G \alpha_{SVy} \psi_y \\
\frac{\partial \phi_z}{\partial t} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial A_z}{\partial z} - (\lambda + 2G) \alpha_{Pz} \phi_z & \rho \frac{\partial \psi_z}{\partial t} &= G \frac{\partial B_z}{\partial z} - G \alpha_{SVz} \psi_z \\
\frac{\partial A_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\phi_x + \phi_y + \phi_z)}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \alpha_{Px}^* A_x & \frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\psi_x + \psi_y + \psi_z)}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \alpha_{SVx}^* B_x \\
\frac{\partial A_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\phi_x + \phi_y + \phi_z)}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \alpha_{Py}^* A_y & \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\psi_x + \psi_y + \psi_z)}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \alpha_{SVy}^* B_y \\
\frac{\partial A_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\phi_x + \phi_y + \phi_z)}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \alpha_{Pz}^* A_z & \frac{\partial B_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\psi_x + \psi_y + \psi_z)}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \alpha_{SVz}^* B_z
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial \chi_x}{\partial t} &= G \frac{\partial C_x}{\partial x} - G \alpha_{SHx} \chi_x \\
\rho \frac{\partial \chi_y}{\partial t} &= G \frac{\partial C_y}{\partial y} - G \alpha_{SHy} \chi_y \\
\rho \frac{\partial \chi_z}{\partial t} &= G \frac{\partial C_z}{\partial z} - G \alpha_{SHz} \chi_z \\
\frac{\partial C_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\chi_x + \chi_y + \chi_z)}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \alpha_{SHx}^* C_x \\
\frac{\partial C_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\chi_x + \chi_y + \chi_z)}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \alpha_{SHy}^* C_y \\
\frac{\partial C_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\chi_x + \chi_y + \chi_z)}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \alpha_{SHz}^* C_z
\end{aligned} \tag{2.10}$$

なお, PML 要素内ではインピーダンスのマッチング条件により次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\alpha_p^* &= \rho(\lambda + 2G) \alpha_p \\
\alpha_{SV}^* &= \rho G \alpha_{SV} \\
\alpha_{SH}^* &= \rho G \alpha_{SH}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

ただし, このマッチング条件は, PML 境界に垂直に入射する成分についてのみ満足させるものとし, それに直交する成分の減衰は 0 とする。

3．有限要素法の適用（結合領域）

前章の定式化により，媒体内部領域の支配方程式は(2.5)～(2.7)式となる。本章では，これらの式を重み付き残差法によって弱形式に変換し，有限要素法を適用する。

まず，(2.5)式を弱形式に変換する。(2.5)式に適当な重み関数を掛けて積分すると，

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + (\lambda + 2G) \alpha_p \phi \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{A_x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \alpha_p^* A_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{A_y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \alpha_p^* A_y \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{A_z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \alpha_p^* A_z \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし， $w_{\phi}, w_{A_x}, w_{A_y}, w_{A_z}$ は重み関数であり，基本境界条件を満足しているものとする。(3.1)式を弱形式にするため，ポテンシャル ϕ の x, y, z に関する微分項を部分積分すると，

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + (\lambda + 2G) \alpha_p \phi \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{A_x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_p^* A_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{A_y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_p^* A_y \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{A_z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_p^* A_z \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w_{A_x}}{\partial x} + \frac{\partial w_{A_y}}{\partial y} + \frac{\partial w_{A_z}}{\partial z} \right) \phi d\Omega - \int_{\Gamma_T} \frac{1}{\rho} (w_{A_x} \bar{\phi}_x + w_{A_y} \bar{\phi}_y + w_{A_z} \bar{\phi}_z) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここに， Γ_T は自然境界を表し， $\bar{\phi}_x, \bar{\phi}_y, \bar{\phi}_z$ は自然境界表面に作用する変位ポテンシャル ϕ に x, y, z 方向の方向余弦を掛けたものである（表面力に相当）。

(3.2)式と同様に，(2.6)，(2.7)式も次式のような弱形式に直すことができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_{\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - G \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + G \alpha_{sv} \psi \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{B_x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{sv}^* B_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{B_y} \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{sv}^* B_y \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{B_z} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{sv}^* B_z \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w_{B_x}}{\partial x} + \frac{\partial w_{B_y}}{\partial y} + \frac{\partial w_{B_z}}{\partial z} \right) \psi d\Omega - \int_{\Gamma_T} \frac{1}{\rho} (w_{B_x} \bar{\psi}_x + w_{B_y} \bar{\psi}_y + w_{B_z} \bar{\psi}_z) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_{\chi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} - G \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) + G \alpha_{sh} \chi \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{C_x} \left(\frac{\partial C_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{sh}^* C_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{C_y} \left(\frac{\partial C_y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{sh}^* C_y \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{C_z} \left(\frac{\partial C_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{sh}^* C_z \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w_{C_x}}{\partial x} + \frac{\partial w_{C_y}}{\partial y} + \frac{\partial w_{C_z}}{\partial z} \right) \chi d\Omega - \int_{\Gamma_T} \frac{1}{\rho} (w_{C_x} \bar{\chi}_x + w_{C_y} \bar{\chi}_y + w_{C_z} \bar{\chi}_z) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

(3.2)～(3.4)式に有限要素法を適用する。有限要素としては，図3.1に示すような8節点長方柱要素を用いる。なお，要素の局所座標系 (x, y, z) の原点は要素の中心位置とする。

図3.1の要素内部の変位ポテンシャル ϕ, ψ, χ およびその重み係数と，要素内部の速度 A_x, A_y, \dots, C_z およびその重み係数を，形状関数を用いて節点の値で表す。すなわち，

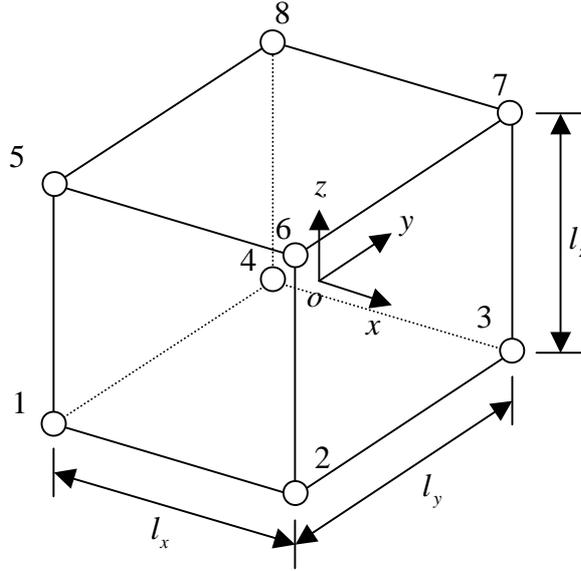


図 3.1 8 節点長方柱要素 (1 次要素)

$$\phi = \mathbf{N}\Phi^e, \quad \psi = \mathbf{N}\Psi^e, \quad \chi = \mathbf{N}\mathbf{X}^e, \quad w_\phi = \mathbf{N}\mathbf{W}_\phi^e, \quad w_\psi = \mathbf{N}\mathbf{W}_\psi^e, \quad w_\chi = \mathbf{N}\mathbf{W}_\chi^e \quad (3.5)$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A}^e, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{B}^e, \quad \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{C}^e, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{w}_A = \begin{Bmatrix} w_{Ax} \\ w_{Ay} \\ w_{Az} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{W}_A^e, \quad \mathbf{w}_B = \begin{Bmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{W}_B^e, \quad \mathbf{w}_C = \begin{Bmatrix} w_{Cx} \\ w_{Cy} \\ w_{Cz} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{W}_C^e$$

ここに,

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8], \quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \Phi^e &= \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6 \quad \phi_7 \quad \phi_8\}^T \\ \Psi^e &= \{\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4 \quad \psi_5 \quad \psi_6 \quad \psi_7 \quad \psi_8\}^T \\ \mathbf{X}^e &= \{\chi_1 \quad \chi_2 \quad \chi_3 \quad \chi_4 \quad \chi_5 \quad \chi_6 \quad \chi_7 \quad \chi_8\}^T \\ \mathbf{W}_\phi^e &= \{w_{\phi 1} \quad w_{\phi 2} \quad w_{\phi 3} \quad w_{\phi 4} \quad w_{\phi 5} \quad w_{\phi 6} \quad w_{\phi 7} \quad w_{\phi 8}\}^T \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\psi^e &= \{w_{\psi 1} \quad w_{\psi 2} \quad w_{\psi 3} \quad w_{\psi 4} \quad w_{\psi 5} \quad w_{\psi 6} \quad w_{\psi 7} \quad w_{\psi 8}\}^T \\ \mathbf{W}_\chi^e &= \{w_{\chi 1} \quad w_{\chi 2} \quad w_{\chi 3} \quad w_{\chi 4} \quad w_{\chi 5} \quad w_{\chi 6} \quad w_{\chi 7} \quad w_{\chi 8}\}^T \\ \mathbf{A}^e &= \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_x^e \\ \mathbf{A}_y^e \\ \mathbf{A}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_x^e \\ \mathbf{B}_y^e \\ \mathbf{B}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_x^e \\ \mathbf{C}_y^e \\ \mathbf{C}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{W}_A^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_{Ax}^e \\ \mathbf{W}_{Ay}^e \\ \mathbf{W}_{Az}^e \end{Bmatrix} \quad \mathbf{W}_B^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_{Bx}^e \\ \mathbf{W}_{By}^e \\ \mathbf{W}_{Bz}^e \end{Bmatrix} \quad \mathbf{W}_C^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_{Cx}^e \\ \mathbf{W}_{Cy}^e \\ \mathbf{W}_{Cz}^e \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_x^e &= \{A_{x1} \ A_{x2} \ A_{x3} \ A_{x4} \ A_{x5} \ A_{x6} \ A_{x7} \ A_{x8}\}^T \\
\mathbf{A}_y^e &= \{A_{y1} \ A_{y2} \ A_{y3} \ A_{y4} \ A_{y5} \ A_{y6} \ A_{y7} \ A_{y8}\}^T \\
&\vdots \\
\mathbf{C}_z^e &= \{C_{z1} \ C_{z2} \ C_{z3} \ C_{z4} \ C_{z5} \ C_{z6} \ C_{z7} \ C_{z8}\}^T \\
\mathbf{W}_{Ax}^e &= \{w_{Ax1} \ w_{Ax2} \ w_{Ax3} \ w_{Ax4} \ w_{Ax5} \ w_{Ax6} \ w_{Ax7} \ w_{Ax8}\}^T \\
\mathbf{W}_{Ay}^e &= \{w_{Ay1} \ w_{Ay2} \ w_{Ay3} \ w_{Ay4} \ w_{Ay5} \ w_{Ay6} \ w_{Ay7} \ w_{Ay8}\}^T \\
&\vdots \\
\mathbf{W}_{Cz}^e &= \{w_{Cz1} \ w_{Cz2} \ w_{Cz3} \ w_{Cz4} \ w_{Cz5} \ w_{Cz6} \ w_{Cz7} \ w_{Cz8}\}^T
\end{aligned} \tag{3.10}$$

また，形状関数 N_1, \dots, N_8 は次式となる。

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1-2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_5 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1-2y/l_y)(1+2z/l_z) \\
N_2 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1-2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_6 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1-2y/l_y)(1+2z/l_z) \\
N_3 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1+2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_7 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1+2y/l_y)(1+2z/l_z) \\
N_4 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1+2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_8 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1+2y/l_y)(1+2z/l_z)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

また， \mathbf{N} の x, y, z の関する微分を次のように表しておく。

$$\mathbf{N}_x = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}, \quad \mathbf{N}_y = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y}, \quad \mathbf{N}_z = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \tag{3.12}$$

(3.5),(3.6)式を(3.2)式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}_\phi^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \Phi^e}{\partial t} \\
&- \mathbf{W}_\phi^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \mathbf{N}^T \mathbf{N}_x d\Omega \mathbf{A}_x^e - \mathbf{W}_\phi^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \mathbf{N}^T \mathbf{N}_y d\Omega \mathbf{A}_y^e - \mathbf{W}_\phi^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \mathbf{N}^T \mathbf{N}_z d\Omega \mathbf{A}_z^e \\
&+ \mathbf{W}_\phi^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \alpha_p \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \Phi^e \\
&+ \mathbf{W}_{Ax}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \mathbf{A}_x^e}{\partial t} + \mathbf{W}_{Ax}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \alpha_p^* \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \mathbf{A}_x^e \\
&+ \mathbf{W}_{Ay}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \mathbf{A}_y^e}{\partial t} + \mathbf{W}_{Ay}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \alpha_p^* \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \mathbf{A}_y^e \\
&+ \mathbf{W}_{Az}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \mathbf{A}_z^e}{\partial t} + \mathbf{W}_{Az}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \alpha_p^* \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \mathbf{A}_z^e \\
&+ \mathbf{W}_{Ax}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}_x^T \mathbf{N} d\Omega \Phi^e + \mathbf{W}_{Ay}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}_y^T \mathbf{N} d\Omega \Phi^e + \mathbf{W}_{Az}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}_z^T \mathbf{N} d\Omega \Phi^e \\
&= \mathbf{W}_{Ax}^{eT} \int_{\Gamma_r^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}^T \bar{\phi}_x d\Gamma + \mathbf{W}_{Ay}^{eT} \int_{\Gamma_r^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}^T \bar{\phi}_y d\Gamma + \mathbf{W}_{Az}^{eT} \int_{\Gamma_r^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}^T \bar{\phi}_z d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.13}$$

また，(3.5),(3.6)式を(3.3),(3.4)式に代入することによって同様の式を得ることができる。

(3.13)式の $\mathbf{W}_\phi^e, \mathbf{W}_{Ax}^e, \mathbf{W}_{Ay}^e, \mathbf{W}_{Az}^e$ の成分が任意の変数であることを考慮すると，次式の要素内の釣合方程式を得る。

$$\mathbf{M}^e \dot{\mathbf{V}}_\phi^e + \mathbf{K}_\phi^e \mathbf{V}_\phi^e = \mathbf{F}_\phi^e \tag{3.14}$$

ここに，

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (3.15)$$

$$\mathbf{K}_\phi^e = \begin{bmatrix} (\lambda+2G)\alpha_p \mathbf{m} & -(\lambda+2G)\mathbf{k}_x & -(\lambda+2G)\mathbf{k}_y & -(\lambda+2G)\mathbf{k}_z \\ \frac{1}{\rho}\mathbf{k}_x^T & \frac{\alpha_p^*}{\rho}\mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho}\mathbf{k}_y^T & \mathbf{0} & \frac{\alpha_p^*}{\rho}\mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho}\mathbf{k}_z^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\alpha_p^*}{\rho}\mathbf{m} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{k}_x &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_x d\Omega \\ \mathbf{k}_y &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_y d\Omega \\ \mathbf{k}_z &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_z d\Omega \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{F}_\phi^e = \frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\phi x} \\ \mathbf{f}_{\phi y} \\ \mathbf{f}_{\phi z} \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_{\phi x} &= \int_{\Gamma_T^e} \mathbf{N}^T \bar{\phi}_x d\Gamma \\ \mathbf{f}_{\phi y} &= \int_{\Gamma_T^e} \mathbf{N}^T \bar{\phi}_y d\Gamma \\ \mathbf{f}_{\phi z} &= \int_{\Gamma_T^e} \mathbf{N}^T \bar{\phi}_z d\Gamma \end{aligned}, \quad \dot{\mathbf{V}}_\phi^e = \begin{Bmatrix} \dot{\Phi}^e \\ \dot{\mathbf{A}}_x^e \\ \dot{\mathbf{A}}_y^e \\ \dot{\mathbf{A}}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}_\phi^e = \begin{Bmatrix} \Phi^e \\ \mathbf{A}_x^e \\ \mathbf{A}_y^e \\ \mathbf{A}_z^e \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

ただし、上付ドットは時間に関する微分を表す。

(3.3),(3.4)式に対しても同様に次式の離散化された釣合式が得られる。

$$\mathbf{M}^e \dot{\mathbf{V}}_\psi^e + \mathbf{K}_\psi^e \mathbf{V}_\psi^e = \mathbf{F}_\psi^e \quad (3.18)$$

$$\mathbf{M}^e \dot{\mathbf{V}}_\chi^e + \mathbf{K}_\chi^e \mathbf{V}_\chi^e = \mathbf{F}_\chi^e \quad (3.19)$$

ここに、

$$\mathbf{K}_\psi^e = \begin{bmatrix} G\alpha_{SV} \mathbf{m} & -G\mathbf{k}_x & -G\mathbf{k}_y & -G\mathbf{k}_z \\ \frac{1}{\rho}\mathbf{k}_x^T & \frac{\alpha_{SV}^*}{\rho}\mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho}\mathbf{k}_y^T & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{SV}^*}{\rho}\mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho}\mathbf{k}_z^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{SV}^*}{\rho}\mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{F}_\psi^e = \frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\psi x} \\ \mathbf{f}_{\psi y} \\ \mathbf{f}_{\psi z} \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_{\psi x} &= \int_{\Gamma_T^e} \mathbf{N}^T \bar{\psi}_x d\Gamma \\ \mathbf{f}_{\psi y} &= \int_{\Gamma_T^e} \mathbf{N}^T \bar{\psi}_y d\Gamma \\ \mathbf{f}_{\psi z} &= \int_{\Gamma_T^e} \mathbf{N}^T \bar{\psi}_z d\Gamma \end{aligned}, \quad \dot{\mathbf{V}}_\psi^e = \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}^e \\ \dot{\mathbf{B}}_x^e \\ \dot{\mathbf{B}}_y^e \\ \dot{\mathbf{B}}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}_\psi^e = \begin{Bmatrix} \Psi^e \\ \mathbf{B}_x^e \\ \mathbf{B}_y^e \\ \mathbf{B}_z^e \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{K}_\chi^e = \begin{bmatrix} G\alpha_{SH} \mathbf{m} & -G\mathbf{k}_x & -G\mathbf{k}_y & -G\mathbf{k}_z \\ \frac{1}{\rho}\mathbf{k}_x^T & \frac{\alpha_{SH}^*}{\rho}\mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho}\mathbf{k}_y^T & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{SH}^*}{\rho}\mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho}\mathbf{k}_z^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{SH}^*}{\rho}\mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{F}_\chi^e = \frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\chi x} \\ \mathbf{f}_{\chi y} \\ \mathbf{f}_{\chi z} \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_{\chi x} &= \int_{\Gamma_T^e} \mathbf{N}^T \bar{\chi}_x d\Gamma \\ \mathbf{f}_{\chi y} &= \int_{\Gamma_T^e} \mathbf{N}^T \bar{\chi}_y d\Gamma \\ \mathbf{f}_{\chi z} &= \int_{\Gamma_T^e} \mathbf{N}^T \bar{\chi}_z d\Gamma \end{aligned}, \quad \dot{\mathbf{V}}_\chi^e = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_\chi^e \\ \dot{\mathbf{C}}_\chi^e \\ \dot{\mathbf{C}}_\chi^e \\ \dot{\mathbf{C}}_\chi^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}_\chi^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_\chi^e \\ \mathbf{C}_\chi^e \\ \mathbf{C}_\chi^e \\ \mathbf{C}_\chi^e \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

(3.14), (3.18), (3.19)式を全要素について重ね合わせると, 次式の全体方程式が得られる。

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}_\phi + \mathbf{K}_\phi \mathbf{V}_\phi = \mathbf{F}_\phi \quad (3.24)$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}_\psi + \mathbf{K}_\psi \mathbf{V}_\psi = \mathbf{F}_\psi \quad (3.25)$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}_\chi + \mathbf{K}_\chi \mathbf{V}_\chi = \mathbf{F}_\chi \quad (3.26)$$

4．有限要素法の適用 (PML 境界)

PML 境界では, 前章と同様に(2.8)~(2.10)式を有限要素法で離散化する。まず, (2.8)式を弱形式に変換する。(2.8)式に適当な重み関数を掛けて積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_{\phi x} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} - (\lambda + 2G) \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \alpha_{p_x} \phi_x \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{\phi y} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} - (\lambda + 2G) \frac{\partial A_y}{\partial y} + (\lambda + 2G) \alpha_{p_y} \phi_y \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{\phi z} \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial t} - (\lambda + 2G) \frac{\partial A_z}{\partial z} + (\lambda + 2G) \alpha_{p_z} \phi_z \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{A_x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\phi_x + \phi_y + \phi_z)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \alpha_{p_x}^* A_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{A_y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\phi_x + \phi_y + \phi_z)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \alpha_{p_y}^* A_y \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{A_z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\phi_x + \phi_y + \phi_z)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \alpha_{p_z}^* A_z \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

ただし, $w_{\phi x}, w_{\phi y}, w_{\phi z}, w_{A_x}, w_{A_y}, w_{A_z}$ は重み関数であり, 基本境界条件を満足しているものとする。(4.1)式を弱形式にするため, ポテンシャル ϕ の x, y, z に関する微分項を部分積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_{\phi x} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} - (\lambda + 2G) \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \alpha_{p_x} \phi_x \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{\phi y} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} - (\lambda + 2G) \frac{\partial A_y}{\partial y} + (\lambda + 2G) \alpha_{p_y} \phi_y \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{\phi z} \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial t} - (\lambda + 2G) \frac{\partial A_z}{\partial z} + (\lambda + 2G) \alpha_{p_z} \phi_z \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{A_x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{p_x}^* A_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{A_y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{p_y}^* A_y \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{A_z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{p_z}^* A_z \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w_{A_x}}{\partial x} + \frac{\partial w_{A_y}}{\partial y} + \frac{\partial w_{A_z}}{\partial z} \right) (\phi_x + \phi_y + \phi_z) d\Omega - \int_{\Gamma_T} \frac{1}{\rho} (w_{A_x} \bar{\phi}_x + w_{A_y} \bar{\phi}_y + w_{A_z} \bar{\phi}_z) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

(3.2)式と同様に, (2.6), (2.7)式も次式のような弱形式に直すことができる。

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w_{\psi_x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} - G \frac{\partial B_x}{\partial x} + G \alpha_{SVx} \psi_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{\psi_y} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} - G \frac{\partial B_y}{\partial y} + G \alpha_{SVy} \psi_y \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} w_{\psi_z} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t} - G \frac{\partial B_z}{\partial z} + G \alpha_{SVz} \psi_z \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} w_{B_x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{SVx}^* B_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{B_y} \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{SVy}^* B_y \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{B_z} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{SVz}^* B_z \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w_{B_x}}{\partial x} + \frac{\partial w_{B_y}}{\partial y} + \frac{\partial w_{B_z}}{\partial z} \right) (\psi_x + \psi_y + \psi_z) d\Omega - \int_{\Gamma_T} \frac{1}{\rho} (w_{B_x} \bar{\psi}_x + w_{B_y} \bar{\psi}_y + w_{B_z} \bar{\psi}_z) d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w_{\chi_x} \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial t} - G \frac{\partial C_x}{\partial x} + G \alpha_{SHx} \chi_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{\chi_y} \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial t} - G \frac{\partial C_y}{\partial y} + G \alpha_{SHy} \chi_y \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} w_{\chi_z} \left(\frac{\partial \chi_z}{\partial t} - G \frac{\partial C_z}{\partial z} + G \alpha_{SHz} \chi_z \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} w_{C_x} \left(\frac{\partial C_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{SHx}^* C_x \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{C_y} \left(\frac{\partial C_y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{SHy}^* C_y \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_{C_z} \left(\frac{\partial C_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \alpha_{SHz}^* C_z \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w_{C_x}}{\partial x} + \frac{\partial w_{C_y}}{\partial y} + \frac{\partial w_{C_z}}{\partial z} \right) (\chi_x + \chi_y + \chi_z) d\Omega - \int_{\Gamma_T} \frac{1}{\rho} (w_{C_x} \bar{\chi}_x + w_{C_y} \bar{\chi}_y + w_{C_z} \bar{\chi}_z) d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.2) ~ (4.4)式に有限要素法を適用する。

図 3.1 の要素内部の変位ポテンシャル $\phi_x, \phi_y, \dots, \phi_z$ およびその重み係数と、要素内部の速度 A_x, A_y, \dots, C_z およびその重み係数を形状関数を用いて節点の値で表す。この場合(3.5)式が次のようになる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} &= \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^e, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}^e, \quad \boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\boldsymbol{\chi}}^e \\
\mathbf{w}_{\phi} = \begin{Bmatrix} w_{\phi_x} \\ w_{\phi_y} \\ w_{\phi_z} \end{Bmatrix} &= \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{W}}_{\phi}^e, \quad \mathbf{w}_{\psi} = \begin{Bmatrix} w_{\psi_x} \\ w_{\psi_y} \\ w_{\psi_z} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{W}}_{\psi}^e, \quad \mathbf{w}_{\chi} = \begin{Bmatrix} w_{\chi_x} \\ w_{\chi_y} \\ w_{\chi_z} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{W}}_{\chi}^e
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_x^e \\ \boldsymbol{\Phi}_y^e \\ \boldsymbol{\Phi}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_x^e \\ \boldsymbol{\Psi}_y^e \\ \boldsymbol{\Psi}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_x^e \\ \mathbf{X}_y^e \\ \mathbf{X}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{\phi}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_{\phi_x}^e \\ \mathbf{W}_{\phi_y}^e \\ \mathbf{W}_{\phi_z}^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{\psi}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_{\psi_x}^e \\ \mathbf{W}_{\psi_y}^e \\ \mathbf{W}_{\psi_z}^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{\chi}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_{\chi_x}^e \\ \mathbf{W}_{\chi_y}^e \\ \mathbf{W}_{\chi_z}^e \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_x^e &= \{\phi_{x1} \ \phi_{x2} \ \phi_{x3} \ \phi_{x4} \ \phi_{x5} \ \phi_{x6} \ \phi_{x7} \ \phi_{x8}\}^T \\
\boldsymbol{\Phi}_y^e &= \{\phi_{y1} \ \phi_{y2} \ \phi_{y3} \ \phi_{y4} \ \phi_{y5} \ \phi_{y6} \ \phi_{y7} \ \phi_{y8}\}^T \\
\boldsymbol{\Phi}_z^e &= \{\phi_{z1} \ \phi_{z2} \ \phi_{z3} \ \phi_{z4} \ \phi_{z5} \ \phi_{z6} \ \phi_{z7} \ \phi_{z8}\}^T \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.5)式と(3.6)式を(4.2)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
& \mathbf{W}_{\phi_x}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \Phi_x^e}{\partial t} - \mathbf{W}_{\phi_x}^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \mathbf{N}^T \mathbf{N}_x d\Omega \mathbf{A}_x^e + \mathbf{W}_{\phi_x}^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \alpha_{p_x} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \Phi_x^e \\
& \mathbf{W}_{\phi_y}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \Phi_y^e}{\partial t} - \mathbf{W}_{\phi_y}^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \mathbf{N}^T \mathbf{N}_y d\Omega \mathbf{A}_y^e + \mathbf{W}_{\phi_y}^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \alpha_{p_y} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \Phi_y^e \\
& \mathbf{W}_{\phi_z}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \Phi_z^e}{\partial t} - \mathbf{W}_{\phi_z}^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \mathbf{N}^T \mathbf{N}_z d\Omega \mathbf{A}_z^e + \mathbf{W}_{\phi_z}^{eT} \int_{\Omega^e} (\lambda + 2G) \alpha_{p_z} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \Phi_z^e \\
& + \mathbf{W}_{A_x}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \mathbf{A}_x^e}{\partial t} + \mathbf{W}_{A_x}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \alpha_{p_x}^* \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \mathbf{A}_x^e \\
& + \mathbf{W}_{A_y}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \mathbf{A}_y^e}{\partial t} + \mathbf{W}_{A_y}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \alpha_{p_y}^* \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \mathbf{A}_y^e \\
& + \mathbf{W}_{A_z}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \mathbf{A}_z^e}{\partial t} + \mathbf{W}_{A_z}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \alpha_{p_z}^* \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \mathbf{A}_z^e \\
& + \mathbf{W}_{A_x}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}_x^T \mathbf{N} d\Omega \Phi^e + \mathbf{W}_{A_y}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}_y^T \mathbf{N} d\Omega \Phi^e + \mathbf{W}_{A_z}^{eT} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}_z^T \mathbf{N} d\Omega \Phi^e \\
& = \mathbf{W}_{A_x}^{eT} \int_{\Gamma_r^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}^T \bar{\phi}_x d\Gamma + \mathbf{W}_{A_y}^{eT} \int_{\Gamma_r^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}^T \bar{\phi}_y d\Gamma + \mathbf{W}_{A_z}^{eT} \int_{\Gamma_r^e} \frac{1}{\rho} \mathbf{N}^T \bar{\phi}_z d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ただし, $\Phi^e = \Phi_x^e + \Phi_y^e + \Phi_z^e$ 。

(4.9)式の $\mathbf{W}_{\phi_x}^e, \mathbf{W}_{\phi_y}^e, \mathbf{W}_{\phi_z}^e, \mathbf{W}_{A_x}^e, \mathbf{W}_{A_y}^e, \mathbf{W}_{A_z}^e$ の成分が任意の変数であることを考慮すると, 次式の要素内の釣合方程式を得る。

$$\mathbf{M}^{PMLe} \dot{\mathbf{V}}_{\phi}^{PMLe} + \mathbf{K}_{\phi}^{PMLe} \mathbf{V}_{\phi}^{PMLe} = \mathbf{F}_{\phi}^{PMLe} \tag{4.10}$$

ここに,

$$\mathbf{M}^{PMLe} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\mathbf{K}_{\phi}^{PMLe} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2G) \alpha_{p_x} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\lambda + 2G) \mathbf{k}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\lambda + 2G) \alpha_{p_y} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\lambda + 2G) \mathbf{k}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\lambda + 2G) \alpha_{p_z} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\lambda + 2G) \mathbf{k}_z \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_x^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_x^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_x^T & \frac{\alpha_{p_x}^*}{\rho} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_y^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_y^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_y^T & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{p_y}^*}{\rho} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_z^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_z^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_z^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{p_z}^*}{\rho} \mathbf{m} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\mathbf{F}_\phi^{PMLe} = \frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\phi x} \\ \mathbf{f}_{\phi y} \\ \mathbf{f}_{\phi z} \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{V}}_\phi^{PMLe} = \begin{Bmatrix} \dot{\Phi}_x^e \\ \dot{\Phi}_y^e \\ \dot{\Phi}_z^e \\ \dot{\mathbf{A}}_x^e \\ \dot{\mathbf{A}}_y^e \\ \dot{\mathbf{A}}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}_\phi^{PMLe} = \begin{Bmatrix} \Phi_x^e \\ \Phi_y^e \\ \Phi_z^e \\ \mathbf{A}_x^e \\ \mathbf{A}_y^e \\ \mathbf{A}_z^e \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

(4.3),(4.4)式に対しても同様に次式を得る。

$$\mathbf{M}^{PMLe} \dot{\mathbf{V}}_\psi^{PMLe} + \mathbf{K}_\psi^{PMLe} \mathbf{V}_\psi^{PMLe} = \mathbf{F}_\psi^{PMLe} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{M}^{PMLe} \dot{\mathbf{V}}_\chi^{PMLe} + \mathbf{K}_\chi^{PMLe} \mathbf{V}_\chi^{PMLe} = \mathbf{F}_\chi^{PMLe} \quad (4.15)$$

ここに,

$$\mathbf{K}_\psi^{PMLe} = \begin{bmatrix} G\alpha_{SVx} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -G\mathbf{k}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G\alpha_{SVy} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -G\mathbf{k}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G\alpha_{SVz} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -G\mathbf{k}_z \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_x^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_x^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_x^T & \frac{\alpha_{SVx}^*}{\rho} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_y^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_y^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_y^T & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{SVy}^*}{\rho} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_z^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_z^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_z^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{SVz}^*}{\rho} \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{F}_\psi^{PMLe} = \frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\psi x} \\ \mathbf{f}_{\psi y} \\ \mathbf{f}_{\psi z} \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{V}}_\psi^{PMLe} = \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}_x^e \\ \dot{\Psi}_y^e \\ \dot{\Psi}_z^e \\ \dot{\mathbf{B}}_x^e \\ \dot{\mathbf{B}}_y^e \\ \dot{\mathbf{B}}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}_\psi^{PMLe} = \begin{Bmatrix} \Psi_x^e \\ \Psi_y^e \\ \Psi_z^e \\ \mathbf{B}_x^e \\ \mathbf{B}_y^e \\ \mathbf{B}_z^e \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{K}_\chi^{PMLe} = \begin{bmatrix} G\alpha_{SHx} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -G\mathbf{k}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G\alpha_{SHy} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -G\mathbf{k}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G\alpha_{SHz} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -G\mathbf{k}_z \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_x^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_x^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_x^T & \frac{\alpha_{SHx}^*}{\rho} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_y^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_y^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_y^T & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{SHy}^*}{\rho} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_z^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_z^T & \frac{1}{\rho} \mathbf{k}_z^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{SHz}^*}{\rho} \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{F}_{\chi}^{PMLe} = \frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\chi x} \\ \mathbf{f}_{\chi y} \\ \mathbf{f}_{\chi z} \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{V}}_{\psi}^{PMLe} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_x^e \\ \dot{\mathbf{X}}_y^e \\ \dot{\mathbf{X}}_z^e \\ \dot{\mathbf{C}}_x^e \\ \dot{\mathbf{C}}_y^e \\ \dot{\mathbf{C}}_z^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{\psi}^{PMLe} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_x^e \\ \mathbf{X}_y^e \\ \mathbf{X}_z^e \\ \mathbf{C}_x^e \\ \mathbf{C}_y^e \\ \mathbf{C}_z^e \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

5 . 境界における連結

領域内部では，通常の変位型有限要素法で離散化されて，次式のような節点変位ベクトルを未知数とする運動方程式が得られる。

$$\mathbf{M}^l \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}^l \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^l \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (5.1)$$

ここに， $\mathbf{M}^l, \mathbf{C}^l, \mathbf{K}^l$ はそれぞれ内部領域の質量マトリックス，減衰マトリックス，剛性マトリックスであり， $\ddot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}$ は，内部領域の節点加速度ベクトル，節点速度ベクトル，節点変位ベクトル， \mathbf{f} は外力ベクトルである。

第 3 章に示したように，境界との結合領域では，未知量が変位ポテンシャルで表されているため，(5.1)式と結合するためには，変位ベクトルと変位ポテンシャルの関係式が必要となる。まず，変位と変位ポテンシャルの関係は，(1.7)式を離散化することによって得られる。いま，領域内部においても図 8.1 に示す要素を採用したとすると，要素内の変位は次式によって表される。

$$u = \mathbf{N}\mathbf{U}^e, \quad v = \mathbf{N}\mathbf{V}^e, \quad w = \mathbf{N}\mathbf{W}^e \quad (5.2)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^e &= \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8\}^T \\ \mathbf{V}^e &= \{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \quad v_7 \quad v_8\}^T \\ \mathbf{W}^e &= \{w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8\}^T \end{aligned} \quad (5.3)$$

また， \mathbf{N} は，(3.7)式および(3.11)式で定義される。

(3.5)式および(5.2)式を(1.7)式に代入すると，

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^e \\ \mathbf{V}^e \\ \mathbf{W}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_x & \mathbf{N}_{xz} & \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_y & \mathbf{N}_{yz} & -\mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^e \\ \Psi^e \\ \mathbf{X}^e \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

要素内の最小二乗近似を用いれば，

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}^e \\ \mathbf{V}^e \\ \mathbf{W}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x & \mathbf{k}_{xz} & \mathbf{k}_y \\ \mathbf{k}_y & \mathbf{k}_{yz} & -\mathbf{k}_x \\ \mathbf{k}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^e \\ \Psi^e \\ \mathbf{X}^e \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{k}_x = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_x d\Omega, \quad \mathbf{k}_y = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_y d\Omega, \quad \mathbf{k}_z = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_z d\Omega \\ \mathbf{k}_{xz} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{xz} d\Omega, \quad \mathbf{k}_{yz} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{yz} d\Omega \end{aligned} \quad (5.6)$$

(5.5)式により変位ベクトルを変位ポテンシャルに変換することができる。そこで，(5.5)式を次式のように表す。

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{T}\boldsymbol{\phi}^e \quad (5.7)$$

ここに,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x & \mathbf{k}_{xz} & \mathbf{k}_y \\ \mathbf{k}_y & \mathbf{k}_{yz} & -\mathbf{k}_x \\ \mathbf{k}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^e \\ \mathbf{V}^e \\ \mathbf{W}^e \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^e \\ \boldsymbol{\Psi}^e \\ \mathbf{X}^e \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

なお, 結合領域の要素は, 節点の一部が PML 境界に属し, 残りの節点は内部領域に属する。したがって, PML 境界に属する節点間の要素質量, 減衰, 剛性の各マトリックス $\mathbf{M}_{\phi\phi}^e, \mathbf{C}_{\phi\phi}^e, \mathbf{K}_{\phi\phi}^e$ は次式により変換を行う。

$$\mathbf{M}_{\phi\phi}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{M}^e \mathbf{T}, \quad \mathbf{C}_{\phi\phi}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{C}^e \mathbf{T}, \quad \mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^e \mathbf{T} \quad (5.9)$$

ここに, $\mathbf{M}^e, \mathbf{C}^e, \mathbf{K}^e$ は, 領域内部要素の質量, 減衰, 剛性の各マトリックスである。また, PML 境界に属する節点と内部領域の節点間の要素質量, 減衰, 剛性の各マトリックスは次式により変換を行う。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{d\phi}^e &= \mathbf{M}^e \mathbf{T}, & \mathbf{C}_{d\phi}^e &= \mathbf{C}^e \mathbf{T}, & \mathbf{K}_{d\phi}^e &= \mathbf{K}^e \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_{\phi d}^e &= \mathbf{T}^T \mathbf{M}^e, & \mathbf{C}_{\phi d}^e &= \mathbf{T}^T \mathbf{C}^e, & \mathbf{K}_{\phi d}^e &= \mathbf{T}^T \mathbf{K}^e \end{aligned} \quad (5.10)$$

内部領域に属する節点間の変換は行わない。

6. 運動方程式の解法

(3.14),(3.18),(3.19)式を結合領域の要素について, (4.10),(4.14),(4.15)式を外部領域 (PML 境界) について重ね合わせると, 次式の全体方程式が得られる。

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}_{\phi} + \mathbf{K}_{\phi}\mathbf{V}_{\phi} = \mathbf{F}_{\phi} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}_{\psi} + \mathbf{K}_{\psi}\mathbf{V}_{\psi} = \mathbf{F}_{\psi} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}_{\chi} + \mathbf{K}_{\chi}\mathbf{V}_{\chi} = \mathbf{F}_{\chi} \quad (6.3)$$

以上の3式をまとめると, 次式のようになる。

$$\mathbf{M}^O \dot{\mathbf{V}}^O + \mathbf{K}^O \mathbf{V}^O = \mathbf{F}^O \quad (6.4)$$

ここに, \mathbf{V}^O は, 結合節点では,

$$\mathbf{V}^O = \left\{ \boldsymbol{\Phi}^T \quad \boldsymbol{\Psi}^T \quad \mathbf{X}^T \quad \mathbf{A}_x^T \quad \mathbf{A}_y^T \quad \mathbf{A}_z^T \quad \mathbf{B}_x^T \quad \mathbf{B}_y^T \quad \mathbf{B}_z^T \quad \mathbf{C}_x^T \quad \mathbf{C}_y^T \quad \mathbf{C}_z^T \right\}^T \quad (6.5)$$

また, PML 要素節点では,

$$\mathbf{V}^O = \left\{ \boldsymbol{\Phi}_x^T \quad \boldsymbol{\Phi}_y^T \quad \boldsymbol{\Phi}_z^T \quad \boldsymbol{\Psi}_x^T \quad \boldsymbol{\Psi}_y^T \quad \boldsymbol{\Psi}_z^T \quad \mathbf{X}_x^T \quad \mathbf{X}_y^T \quad \mathbf{X}_z^T \quad \mathbf{A}_x^T \quad \mathbf{A}_y^T \quad \mathbf{A}_z^T \quad \mathbf{B}_x^T \quad \mathbf{B}_y^T \quad \mathbf{B}_z^T \quad \mathbf{C}_x^T \quad \mathbf{C}_y^T \quad \mathbf{C}_z^T \right\}^T \quad (6.6)$$

さらに, (6.4)式は次式のように書ける。

$$\dot{\mathbf{V}}^O = \mathbf{P}^O \mathbf{V}^O + \mathbf{Q}^O \quad (6.5)$$

ただし,

$$\mathbf{P}^O = -\mathbf{M}^{O-1} \mathbf{K}^O, \quad \mathbf{Q}^O = \mathbf{M}^{O-1} \mathbf{F}^O \quad (6.6)$$

また, 内部領域では, (5.1)式が成り立ち, これを(6.5)の形式に直すと,

$$\dot{\mathbf{V}}^I = \mathbf{P}^I \mathbf{V}^I + \mathbf{Q}^I(t) \quad (6.7)$$

ただし,

$$\mathbf{P}^I = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{I-1} \mathbf{K}^I & -\mathbf{M}^{I-1} \mathbf{C}^I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^I(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{a}_0(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}^I = \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

ここに, $\mathbf{a}_0(t)$ は地震加速度ベクトルである。

(6.5)式と(6.8)式を(5.9)式を利用して結合し, 次式で表される全領域の運動方程式を作る。

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{P} \mathbf{V} + \mathbf{Q}(t) \quad (6.9)$$

上式の \mathbf{V} は, 内部領域の節点では 6 自由度 ($u, v, w, \dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$), PML 境界要素との結合節点では 21 自由度 ($\phi, \psi, \chi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \chi_x, \chi_y, \chi_z, A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z, C_x, C_y, C_z$), PML 境界要素の節点では 18 自由度 ($\phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \chi_x, \chi_y, \chi_z, A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z, C_x, C_y, C_z$) である。なお, \mathbf{V} の自由度のならば, 内部領域の \mathbf{d} を先にし, その後に内部領域の速度ベクトル $\dot{\mathbf{d}}$, 結合境界節点の自由度, PML 要素節点の自由度の順に並べる。このように自由度を並べることで, (6.9)式の \mathbf{P}, \mathbf{Q} は次のように書ける。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \mathbf{R} \\ \bar{\mathbf{G}} & \bar{\mathbf{H}} & \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{a}_0(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{V}} \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

ここに, $\mathbf{G} = -\mathbf{M}^{I-1} \mathbf{K}^I$, $\mathbf{H} = -\mathbf{M}^{I-1} \mathbf{C}^I$ である。ただし, 外力は PML 境界内では作用しないものとしている。

(6.9)式は, Runge Kutta 法によって解くことができる。(6.9)式に 4 次精度の Runge Kutta の公式を適用すると次のようになる。

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{C}_0 + 2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3) \quad (6.11)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= \Delta t (\mathbf{P} \mathbf{V}_n + \mathbf{Q}_n) \\ \mathbf{C}_1 &= \Delta t \left(\mathbf{P} \left(\mathbf{V}_n + \frac{1}{2} \mathbf{C}_0 \right) + \mathbf{Q}_{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \mathbf{C}_2 &= \Delta t \left(\mathbf{P} \left(\mathbf{V}_n + \frac{1}{2} \mathbf{C}_1 \right) + \mathbf{Q}_{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \mathbf{C}_3 &= \Delta t (\mathbf{P} (\mathbf{V}_n + \mathbf{C}_2) + \mathbf{Q}_{n+1}) \\ \mathbf{V}_n &= \mathbf{V}(t_n), \quad \mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}(t_n + \Delta t) \\ \mathbf{Q}_n &= \mathbf{Q}(t_n), \quad \mathbf{Q}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{Q}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right), \quad \mathbf{Q}_{n+1} = \mathbf{Q}(t_n + \Delta t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

また, t_n は n ステップの時刻, Δt は時間増分である。なお, (6.11)式は, (6.10)式より次のようにも書ける。

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) \\
\dot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{6} (\mathbf{L}_0 + 2\mathbf{L}_1 + 2\mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3) \\
\bar{\mathbf{V}}_{n+1} &= \bar{\mathbf{V}}_n + \frac{1}{6} (\mathbf{S}_0 + 2\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_0 &= \Delta t \left[\mathbf{G} \mathbf{d}_n + \mathbf{H} \dot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{R} \bar{\mathbf{V}}_n + \mathbf{a}_{0n} \right] \\
\mathbf{L}_1 &= \Delta t \left[\mathbf{H} \left(\dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{2} \mathbf{L}_0 \right) + \mathbf{G} \left(\mathbf{d}_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{d}}_n \right) + \mathbf{R} \left(\bar{\mathbf{V}}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{R1} \right) + \mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}} \right] \\
\mathbf{L}_2 &= \Delta t \left[\mathbf{H} \left(\dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{2} \mathbf{L}_1 \right) + \mathbf{G} \left(\mathbf{d}_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{L}_0 \right) + \mathbf{R} \left(\bar{\mathbf{V}}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{R1} + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{L}_{R2} \right) + \mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}} \right] \\
\mathbf{L}_3 &= \Delta t \left[\mathbf{H} \left(\dot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{L}_2 \right) + \mathbf{G} \left(\mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{R} \left(\bar{\mathbf{V}}_n + \Delta t \mathbf{L}_{R1} + \frac{\Delta t^2}{2} \bar{\mathbf{G}} \left(\dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{2} \mathbf{L}_0 \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \bar{\mathbf{R}} \left(\mathbf{L}_{R1} + \frac{1}{2} \mathbf{L}_{R2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{L}_1 \right) + \mathbf{a}_{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{6.14}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{R1} &= \bar{\mathbf{G}} \mathbf{d}_n + \bar{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{d}}_n + \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{V}}_n \\
\mathbf{L}_{R2} &= \Delta t \left(\bar{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{d}}_n + \bar{\mathbf{R}} \mathbf{L}_{R1} \right) + \bar{\mathbf{H}} \mathbf{L}_0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

また,

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_0 &= \Delta t \mathbf{L}_{R1} \\
\mathbf{S}_1 &= \Delta t \left[\mathbf{L}_{R1} + \frac{1}{2} \left(\Delta t \bar{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{d}}_n + \bar{\mathbf{H}} \mathbf{L}_0 + \bar{\mathbf{R}} \mathbf{S}_0 \right) \right] \\
\mathbf{S}_2 &= \Delta t \left[\mathbf{L}_{R1} + \frac{1}{2} \left(\Delta t \bar{\mathbf{G}} \left(\dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{2} \mathbf{L}_0 \right) + \bar{\mathbf{H}} \mathbf{L}_1 + \bar{\mathbf{R}} \mathbf{S}_1 \right) \right] \\
\mathbf{S}_3 &= \Delta t \left[\mathbf{L}_{R1} + \Delta t \bar{\mathbf{G}} \left(\dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{2} \mathbf{L}_1 \right) + \bar{\mathbf{H}} \mathbf{L}_2 + \bar{\mathbf{R}} \mathbf{S}_2 \right]
\end{aligned} \tag{6.16}$$

なお, 質量マトリックスの逆行列を求めるのは計算付加が大きいため, 質量マトリックスを対角化して用いる。対角化は, 質量マトリックスの同一行上の全成分の総和を対角成分とし, 非対角成分は0にすることによって行う。