東京大学　藤井大地

CONLIN による最適化問題の解法

C. Fleury によって提案された，Convex Linearization method (CONLIN) は，計算効率の良い最適化手法として最近注目されている。この方法は，目的関数および制約条件を凸関数条件を満足するように変換し，双対法を適用して解く方法である。本レポートでは，以下の文献を参考にして，本方法を説明する。

1) C. Fleury, CONLIN: an efficient dual optimization based on convex approximation concepts, Structural Optimization, Vol.1, pp.81-89, 1989

１．CONLIN による最適化問題の定式化

一般的な最適化問題を次式で表す。

$$\begin{aligned} &\min && c_0(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to} && c_j(\mathbf{x}) \le 0 \qquad (j=1,\cdots,m) \\ & && \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i \qquad (i=1,\cdots,n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここに， $\mathbf{x}=\{x_1,\cdots,x_N\}$ は設計変数， $c_0(\mathbf{x})$ は目的関数， $c_j(\mathbf{x})$ $(j=1,\cdots,m)$ は制約条件， $\underline{x}_i,\overline{x}_i$ は設計変数 x_i の下限値と上限値を表す。なお， $c_j(\mathbf{x})$ $(j=0,\cdots,m)$ は，設計変数 x_i に関して，線形でも非線形でもよい。

C. Fleury の提案している方法は，(1.1)式の目的関数および制約条件を次式のように設計変数 $\mathbf{x}^k$ 点に関して Taylor 展開する。

$$c_j(\mathbf{x}) \simeq c_j(\mathbf{x}^k) + \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_i}>0} \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_i}(x_i - x_i^k) - \sum_{\frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_i}<0} (x_i^k)^2 \frac{\partial c_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_i}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^k}\right) \tag{1.2}$$

ここに， $j=0,1,\cdots,m$ であり，右辺第 2 項は x_i に対する Taylor 展開の 1 次項，第 3 項は $1/x_i$ に対する Taylor 展開の 1 次項である。また，第 2 項，第 3 項は，図 1.1 の左と右に示すような関数となる。

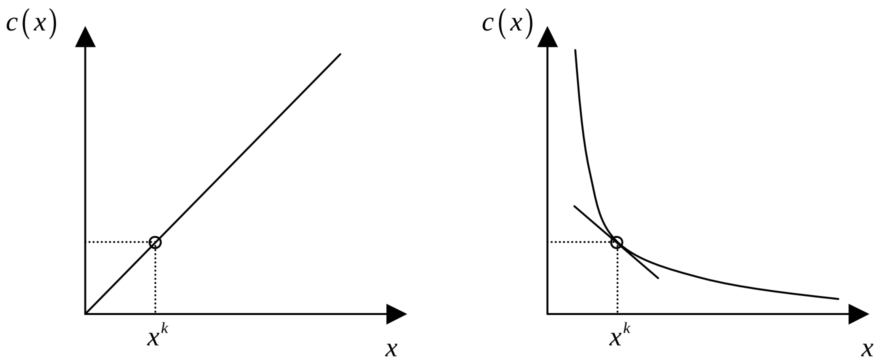

図 1.1　線形関数と逆関数

さらに，数値計算誤差を小さくするために，(1.2)式の設計変数に次式のようなスケーリングをかける。

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{x_i^k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{x_i^k} \tag{1.3}$$

(1.3)式の関係を(1.2)式に代入すると，

$$c_j\left(\mathbf{x}\right) \simeq c_j\left(\mathbf{x}^k\right) + \sum_{\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{x_i^k}>0} \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\left(\tilde{x}_i - 1\right) - \sum_{\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{x_i^k}<0} \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\left(\frac{1}{\tilde{x}_i} - 1\right) \tag{1.4}$$

(1.4)式を用いて(1.1)式を書き直すと，

$$\begin{aligned}
&\min && \sum_{\frac{\partial c_0\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{x_i^k}>0} \frac{\partial c_0\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\tilde{x}_i - \sum_{\frac{\partial c_0\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{x_i^k}<0} \frac{\partial c_0\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{\tilde{x}_i} - \overline{c}_0 \\
&\text{subject to} && \sum_{\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{x_i^k}>0} \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\tilde{x}_i - \sum_{\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{x_i^k}<0} \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{\tilde{x}_i} \le \overline{c}_j \qquad \left(j = 1, \cdots, m\right), \\
& && \frac{\underline{x}_i}{x_i^k} \le \tilde{x}_i \le \frac{\overline{x}_i}{x_i^k} \qquad \left(i = 1, \cdots, n\right).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\overline{c}_j &= -c_j\left(\mathbf{x}^k\right) + \sum_{\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{x_i^k}>0} \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i} - \sum_{\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i}\frac{1}{x_i^k}<0} \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial \tilde{x}_i} \\
&= \sum_{\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial x_i}>0} \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial x_i}x_i^k - \sum_{\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial x_i}<0} \frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial x_i}x_i^k - c_j\left(\mathbf{x}^k\right) \\
&= \sum_i \left|\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial x_i}\right| x_i^k - c_j\left(\mathbf{x}^k\right) \qquad (j = 0, \cdots, m)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

２．双対法（Dual method）の適用

(1.5)式を簡単のため次式のように表しておく。

$$\begin{aligned}
&\min && \sum_+ \frac{\partial c_0}{\partial x_i}x_i - \sum_- \frac{\partial c_0}{\partial x_i}\frac{1}{x_i} - \overline{c}_0 \\
&\text{subject to} && \sum_+ \frac{\partial c_j}{\partial x_i}x_i - \sum_- \frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{1}{x_i} - \overline{c}_j \le 0 \qquad \left(j = 1, \cdots, m\right) \\
& && \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i \qquad \left(i = 1, \cdots, n\right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

(2.1)式は双対定理により，次のような問題に置き換えることができる。

$$\begin{aligned}
&\max && l\left(\mathbf{r}\right) \\
&\text{subject to} && r_j \ge 0 \qquad (j = 0, \cdots, m)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

ここに，

$$l(\mathbf{r}) = \min_{\underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i} L(\mathbf{x},\mathbf{r}) \tag{2.3}$$

ただし，

$$L(\mathbf{x},\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{m} r_j \left(\sum_{+} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} x_i - \sum_{-} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \frac{1}{x_i} - \overline{c}_j \right) \tag{2.4}$$

ここで，r_j はラグランジェ乗数で，目的関数にはラグランジェ乗数はかからないので，$r_0 = 1$である。したがって，(2.1)式は，(2.2)式と(2.3)式の２つ問題として解くことができる。

　まず，(2.3)式は，変数 x_i に関する最適化問題であるが，これは n 個の個別の問題として解くことができる。すなわち，(2.3)式は次のように書ける。

$$l(\mathbf{r}) = \min_{\underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i} \left[\sum_{i=1}^{n} L_i(x_i,\mathbf{r}) - \overline{c}^r(\mathbf{r}) \right] \tag{2.5}$$

ここに，

$$L_i(x_i,\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{m} r_j \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)_+ x_i - \sum_{j=0}^{m} r_j \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)_- \frac{1}{x_i}, \qquad \overline{c}^r(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{m} r_j \overline{c}_j \tag{2.6}$$

ただし，$(\ )_+, (\ )_-$ は，括弧内が＋または－の場合のみ採用されることを意味する。したがって，(2.5)式は次のような最適化問題となる。

$$\begin{aligned} &\min \qquad L_i(x_i) = a_i x_i + \frac{b_i}{x_i} \\ &\text{subject to} \quad \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i \qquad (i = 1, \cdots, n) \end{aligned} \tag{2.7}$$

ここに，

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{j=0}^{m} r_j \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)_+ \ge 0 \\ b_i &= -\sum_{j=0}^{m} r_j \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)_- \ge 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

したがって，(2.7)式の解は次式から求まる。

$$\frac{\partial L_i(x_i)}{\partial x_i} = a_i - \frac{b_i}{x_i^2} = 0 \tag{2.9}$$

すなわち，

$$x_i = \left(\frac{b_i}{a_i} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{if} \quad \underline{x}_i^2 \le \frac{b_i}{a_i} \le \overline{x}_i^2 \tag{2.10}$$

$$x_i = \underline{x}_i \qquad \text{if} \quad \frac{b_i}{a_i} \le \underline{x}_i^2 \tag{2.11}$$

$$x_i = \overline{x}_i \qquad \text{if} \quad \overline{x}_i^2 \le \frac{b_i}{a_i} \tag{2.12}$$

　(2.10)～(1.12)式によって，x_i は $\mathbf{r}$ の関数として表せたことになる。したがって，(2.10)～(1.12)式の解を用いて，(2.2)式は次式のように表される。

$$\begin{aligned}&\max \quad l(\mathbf{r})=\sum_{j=0}^{m} r_j\left(\sum_{+}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}x_i(\mathbf{r})-\sum_{-}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{1}{x_i(\mathbf{r})}-\bar{c}_j\right)\\ &\text{subject to} \quad r_j \ge 0 \quad (j=0,\cdots,m)\end{aligned} \tag{2.13}$$

(2.13)式の問題を逐次 2 次計画法で解く。逐次 2 次計画法では，設計変数に関する 1 階微分と 2 階微分が必要となるが，まず，(2.13)式の目的関数lのr_jに関する 1 階微分は次式となる。

$$g_j=\frac{dl(\mathbf{r})}{dr_j}=\sum_{+}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}x_i-\sum_{-}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{1}{x_i}-\bar{c}_j \tag{2.14}$$

また，2 階微分は次式となる。

$$H_{jk}=\frac{d^2 l}{dr_j dr_k}=\frac{dg_j}{dr_k}=\sum_{+}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dr_k}+\sum_{-}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{1}{x_i^2}\frac{dx_i}{dr_k} \tag{2.15}$$

ここで，(2.10)～(2.12)式により，

$$\frac{dx_i}{dr_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{a_i\dfrac{db_i}{dr_k}-b_i\dfrac{da_i}{dr_k}}{a_i^2}\right)=\frac{\dfrac{db_i}{dr_k}-x_i^2\dfrac{da_i}{dr_k}}{2x_i a_i} \qquad \text{if} \quad \underline{x}_i^2 \le \frac{b_i}{a_i} \le \bar{x}_i^2 \tag{2.16}$$

$$\frac{dx_i}{dr_k}=0 \qquad \text{if} \quad \frac{b_i}{a_i} \le \underline{x}_i^2 \tag{2.17}$$

$$\frac{dx_i}{dr_k}=0 \qquad \text{if} \quad \bar{x}_i^2 \le \frac{b_i}{a_i} \tag{2.18}$$

また，(2.8)式より，

$$\frac{da_i}{dr_k}=\left(\frac{\partial c_k}{\partial x_i}\right)_+, \qquad \frac{db_i}{dr_k}=-\left(\frac{\partial c_k}{\partial x_i}\right)_- \tag{2.19}$$

であるから，(2.16)式は，

$$\frac{dx_i}{dr_k}=-\frac{x_i}{2a_i}\frac{\partial c_k}{\partial x_i} \qquad \text{if} \quad \frac{\partial c_k}{\partial x_i}>0 \tag{2.20}$$

$$\frac{dx_i}{dr_k}=-\frac{1}{2x_i a_i}\frac{\partial c_k}{\partial x_i} \qquad \text{if} \quad \frac{\partial c_k}{\partial x_i}<0 \tag{2.21}$$

(2.20)式，(2.21)式を(2.15)式に代入すると，最終的に次式が得られる。

$$H_{jk}=-\frac{1}{2}\left(\sum_{+}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{\partial c_k}{\partial x_i}\frac{x_i}{a_i}+\sum_{-}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{\partial c_k}{\partial x_i}\frac{1}{x_i a_i}\right) \qquad \text{if} \quad \frac{\partial c_k}{\partial x_i}>0, \quad \underline{x}_i \le x_i \le \bar{x}_i \tag{2.22}$$

$$H_{jk}=-\frac{1}{2}\left(\sum_{+}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{\partial c_k}{\partial x_i}\frac{1}{x_i a_i}+\sum_{-}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{\partial c_k}{\partial x_i}\frac{1}{x_i^3 a_i}\right) \qquad \text{if} \quad \frac{\partial c_k}{\partial x_i}<0, \quad \underline{x}_i \le x_i \le \bar{x}_i \tag{2.23}$$

３．逐次２次計画法による解法

(2.13)式を逐次2次計画法で解くことを考える。まず, 設計変数r_jの更新式を次式のように置く。

$$r_j^{(k+1)}=r_j^{(k)}+\Delta r_j \qquad (j=1,\cdots,m) \tag{3.1}$$

(2.13)式の$l(\mathbf{r})$を$r_j^{(k)}$に関してテーラー展開し 2 次項まで採用すると，

$$l\left(\mathbf{r}^{(k+1)}\right) = l\left(\mathbf{r}^{(k)}\right) + \sum_{j=1}^{m} g_j \Delta r_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} H_{jk}\Delta r_j \Delta r_k \tag{3.2}$$

(3.2)式をベクトル・マトリックス表示すると，

$$l\left(\mathbf{r}^{(k+1)}\right) = l\left(\mathbf{r}^{(k)}\right) + \Delta\mathbf{r}^T\mathbf{g} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{r}^T\mathbf{H}\Delta\mathbf{r} \tag{3.3}$$

したがって，(2.13)式は次式の問題を逐次解くことになる。

$$\begin{aligned} &\max \qquad q\left(\Delta\mathbf{r}\right) = \Delta\mathbf{r}^T\mathbf{g} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{r}^T\mathbf{H}\Delta\mathbf{r} \\ &\text{subject to} \qquad r_j^{(k)} + \Delta r_j \geq 0 \qquad (j = 0,\cdots,m) \end{aligned} \tag{3.4}$$

(2.22),(2.23)式より， H_{ij} は常に負になるため，(3.4)式の極大値では次式が満足される。

$$\frac{dq\left(\Delta\mathbf{r}\right)}{d\Delta\mathbf{r}} = \mathbf{g} + \mathbf{H}\Delta\mathbf{r} = 0 \tag{3.5}$$

したがって，次式の連立方程式を解くことによって $\Delta\mathbf{r}$ が求められる。

$$\mathbf{H}\Delta\mathbf{r} = -\mathbf{g} \tag{3.6}$$

得られた $\Delta\mathbf{r}$ より，次ステップの $\mathbf{r}^{(k+1)}(=\mathbf{r}^{(k)} + \Delta\mathbf{r}^{(k)})$ を求め， $j = 1,\cdots,m$ で次式が満足されるまで更新を繰り返す。

$$\begin{aligned} g_j &= 0 \qquad \text{if} \quad r_j > 0 \\ g_j &< 0 \qquad \text{if} \quad r_j = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

ただし，この繰り返しでは，感度係数等の更新は行わない。(3.7)式が満足されたら，感度係数等を更新して再度繰り返しを行い，最終的な収束解が得られるまで以上の演算を繰り返す。

４．ヘッセ行列の特異性への対策

(3.6)式のヘッセ行列はしばしば特異行列となる。これは(2.10)式の不等式を満足する設計変数が少なくなった時に生じる。そこで，ヘッセ行列が特異になった場合は，(3.6)式の不等式を満足しない設計変数も取り込んで計算する必要がある。この場合は，次式のルールにしたがって，新たな設計変数をヘッセ行列の計算に取り込む。

$$\begin{aligned} x_i &= \underline{x}_i \quad \text{and} \quad c_{ik} < 0 \\ x_i &= \overline{x}_i \quad \text{and} \quad c_{ik} > 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

本プログラムでは，ヘッセ行列の特異性を H_{jk} の対角項が 0 か否かで判断し，ヘッセ行列の対角項が 0 の場合は，(4.1)式にしたがって，新たな設計変数を取り込み，0 とならない場合は，(2.10)式の条件を満足する設計変数のみによってヘッセ行列を計算する。

また，(2.8)式の a_i が 0 になる場合も(2.10),(2.22),(2.23)式等の計算でオーバーフローが生じるため，以下のように処理しヘッセ行列の計算からは除外する。

$$\begin{aligned} x_i &= \overline{x}_i \qquad \text{if} \quad a_i = 0 \quad \text{and} \quad b_i > 0 \\ x_i &= \underline{x}_i \qquad \text{if} \quad a_i = 0 \quad \text{and} \quad b_i = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

さらに，制約条件が次式を満足する場合は，(3.6)式の計算から除外する。

$$g_j < 0 \qquad \text{if} \quad r_j = 0 \tag{4.3}$$

以上のような処理により，ヘッセ行列の特異性を回避することができる。

また，位相最適化問題のように，非線形性の強い問題では，設計変数のムーブリミットを設定する必要がある。すなわち, 設計変数の上下限値をムーブリミットを用いて次式により設定する。

$$\max\left[\underline{x}_i, x_i^k\left(1-\bar{\varepsilon}\right)\right] \le x_i \le \min\left[\underline{x}_i, x_i^k\left(1+\bar{\varepsilon}\right)\right] \quad \left(i=1,\cdots,N\right) \tag{4.4}$$

ここに，$\bar{\varepsilon}$ はムーブリミットで，$0<\bar{\varepsilon}<0.5$ で設定する。

５．制約条件の緩和

制約条件を満足する許容解が見つけられない現象を防ぐために，文献 1)にしたがって，次式により制約条件の緩和を行う。

$$\begin{aligned}
&\text{min} && \sum_{+}\frac{\partial c_0}{\partial x_i}x_i-\sum_{-}\frac{\partial c_0}{\partial x_i}\frac{1}{x_i}-\bar{c}_0+z_0 w\delta \\
&\text{subject to} && \sum_{+}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}x_i-\sum_{-}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{1}{x_i}\le\bar{c}_j+z_j\left(1-\frac{1}{\delta}\right) \quad \left(j=1,\cdots,m\right) \\
& && \underline{x}_i\le x_i\le\bar{x}_i \quad \left(i=1,\cdots,n\right), \qquad 1\le\delta
\end{aligned} \tag{5.1}$$

ここに，w はユーザーによって与えられる重みで，必要に応じて 1～10 程度の値として与える。また，

$$z_j=\sum_i\left|\frac{\partial c_j\left(\mathbf{x}^k\right)}{\partial x_i}\right|x_i^k \qquad (j=0,\cdots,m) \tag{5.2}$$

である。ただし，(5.2)式の x_i は(1.6)式と同様にスケーリングをかける前の変数である。

(5.1)式のラグラジアンで，δ に関係する項を抜き出すと次式となる。

$$\min_{\delta\ge 1} \quad z_0 w\delta-\left(1-1/\delta\right)\sum_{j=1}^{m}r_j z_j \tag{5.3}$$

上式の解は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
&\delta=\left(\sum_{j=1}^{m}r_j z_j \Big/ wz_0\right)^{1/2} && \text{if} \quad \sum_{j=1}^{m}r_j z_j>wz_0 \\
&\delta=1 && \text{if} \quad \sum_{j=1}^{m}r_j z_j<wz_0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

また，(2.14)式の g_j は，

$$g_j=\sum_{+}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}x_i-\sum_{-}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{1}{x_i}-\bar{c}_j-z_j\left(1-\frac{1}{\delta}\right) \tag{5.6}$$

となり，また，(2.15)式より H_{jk} は次式から計算される。

$$H_{jk}=\frac{dg_j}{dr_k}=\sum_{+}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dr_k}+\sum_{-}\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\frac{1}{x_i^2}\frac{dx_i}{dr_k}-\frac{z_j}{\delta^2}\frac{d\delta}{dr_k} \tag{5.7}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\frac{d\delta}{dr_k}=\frac{1}{2\delta}\frac{z_k}{wz_0} \qquad \text{if} \quad \sum_{j=1}^{m} r_j z_j > wz_0 \\ &\frac{d\delta}{dr_k}=0 \qquad\qquad \text{if} \quad \sum_{j=1}^{m} r_j z_j < wz_0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

したがって，H_{jk} の δ に関する寄与項は次式から計算される。

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\frac{z_j z_k}{wz_0\delta^3} \qquad \text{if} \quad \sum_{j=1}^{m} r_j z_j > wz_0 \\ &0 \qquad\qquad\qquad \text{if} \quad \sum_{j=1}^{m} r_j z_j < wz_0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

したがって，(2.22),(2.23)式に上式を加えれば，制約条件を緩和した場合のヘッセ行列が求められる。

６．CONLIN のアルゴリズムと例題

以上をまとめると，CONLIN の計算アルゴリズムは，図 6.1 のようになる。図の点線で囲まれた部分を CONLIN のサブルーチンとする。また，r_j $(j=1,\cdots,m)$ の初期値としては，0 を与えるものとする。

線形問題の例題として，次式を解く。

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\mathbf{x}) = x_1 + 4x_2 \\ &\text{subject to} \\ &\quad c_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 \le 0 \\ &\quad c_2(\mathbf{x}) = -3x_1 + 2x_2 \le -1 \\ &\quad\quad 0.5 \le x_1 \le 5 \\ &\quad\quad 0.5 \le x_2 \le 5 \end{aligned} \tag{6.1}$$

上式の正解は,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 \tag{6.2}$$

となる。

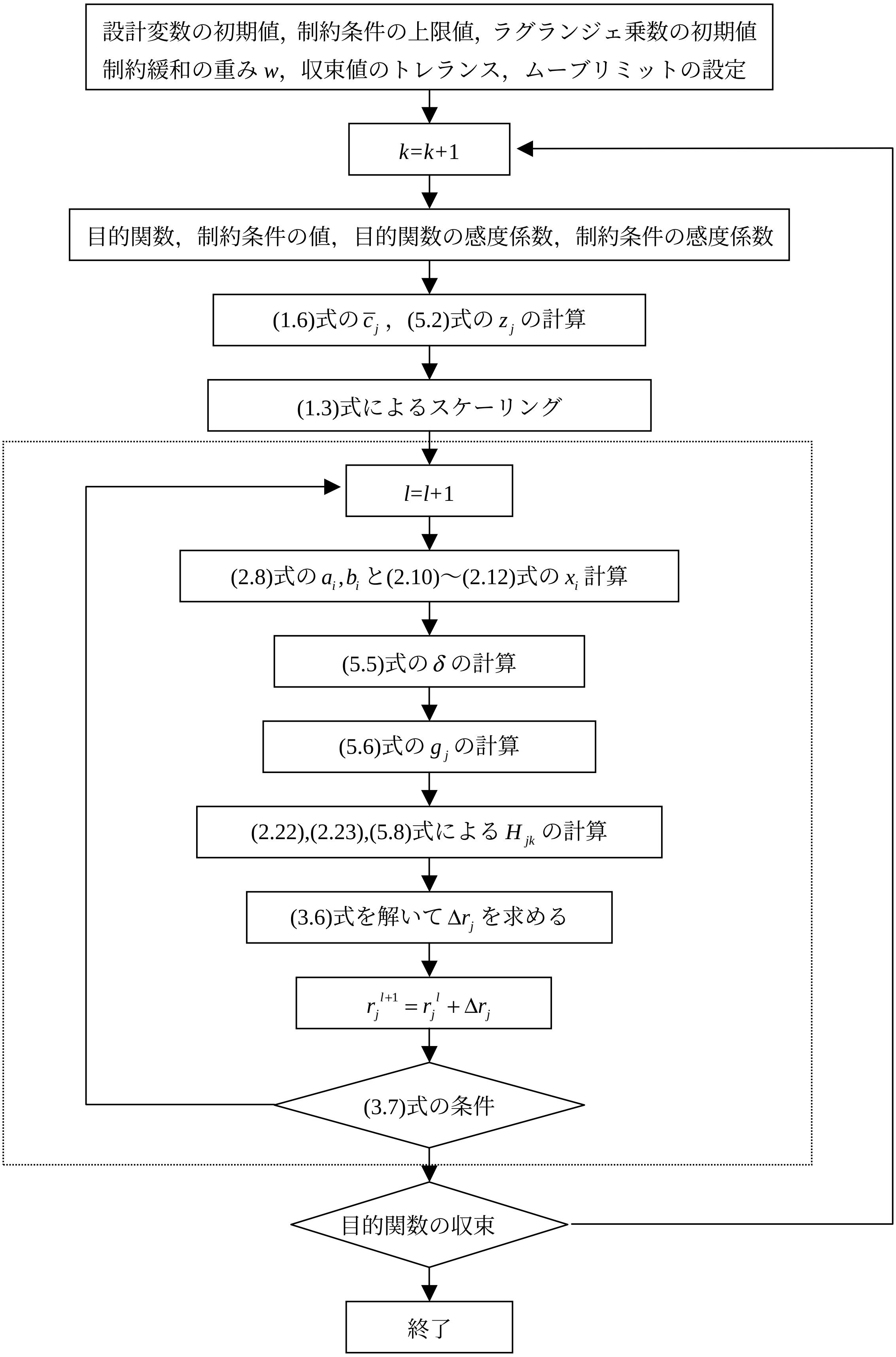

図 6.1　CONLIN の計算フロー