

FCMの基本概念

FCMの理解を深めるために、単純な棒の引張り問題、曲げ問題にFCM理論を適用してみる。

1. 棒の引張り問題

1.1 要素内に不連続点がない場合

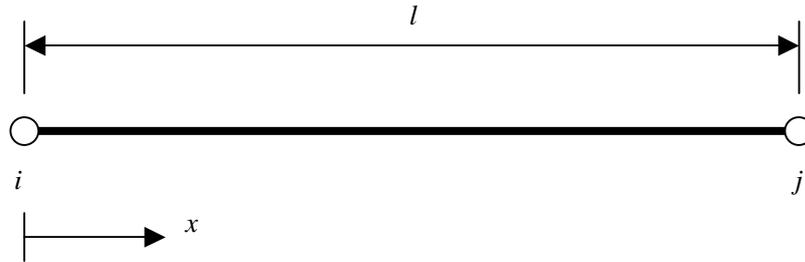


図 1.1.1 1次元棒モデル

図 1.1.1 に示すモデルにおいて、節点 i, j で定義される数学被覆の変位関数を定関数とすると、 i, j 節点の物理被覆 ($0 \leq x \leq l$) の変位関数は次式ようになる。

$$u_i(x) = a_i, \quad u_j(x) = a_j \quad (1.1.1)$$

また、節点 i, j の物理被覆の重み関数を次式で定義する。

$$w_i = \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad w_j = \frac{x}{l} \quad (1.1.2)$$

このとき、要素 ij における変位は、被覆 i と被覆 j の（変位関数 \times 重み）の和で表されるから、

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)a_i + \frac{x}{l}a_j \quad (1.1.3)$$

となる。このとき、 a_i, a_j は有限要素法の節点変位と同じ意味をもつ。

(1.1.3)式をベクトル・マトリックスで表現すると、

$$u(x) = \mathbf{N}\mathbf{a} \quad (1.1.4)$$

ここに、

$$\mathbf{N} = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l} \right], \quad \mathbf{a} = \{a_i \quad a_j\}^T \quad (1.1.5)$$

(1.1.4)式から歪みを求めると、

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (1.1.6)$$

ここに、

$$\mathbf{B} = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \quad (1.1.7)$$

また、応力は次式から求められる。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\mathbf{B}\mathbf{a} \quad (1.1.8)$$

ここに、 E はヤング係数である。したがって、歪みエネルギーは次式となる。

$$V = \frac{1}{2} A \int_0^l \varepsilon_x E \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T A \int_0^l \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx \mathbf{a} \quad (1.1.9)$$

ただし、 A は要素の断面積である。したがって、要素剛性マトリックスは次式で定義される。

$$\mathbf{k} = A \int_0^l \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx \quad (1.1.10)$$

具体的に計算すると、

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1.11)$$

1.2 要素内に不連続点がある場合

次に、要素内に不連続点がある場合を考える。通常の有限要素法であれば、不連続点に節点を2つ増やして2要素として解析すべきところであるが、有限被覆法(FCM)では、節点で定義される被覆を2つ増やすことになる。

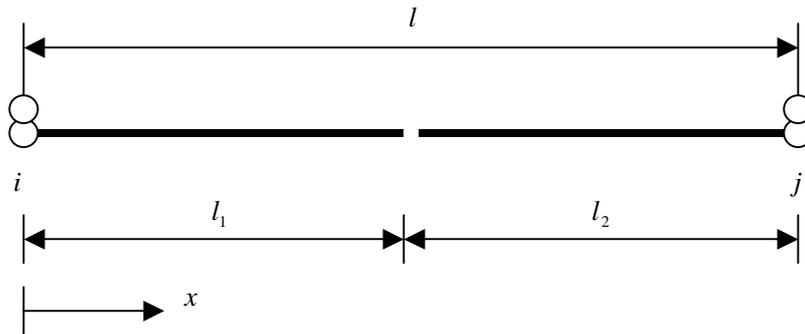


図 1.2.1 不連続点を含む要素モデル

(1.1.1)式と同様に数学被覆の変位関数を定関数とすると、節点 i, j の物理被覆の変位関数は次式で定義される。

$$\begin{aligned} u_{i1}(x) &= a_{i1} & (0 \leq x \leq l_1) \\ u_{i2}(x) &= a_{i2} & (l_1 \leq x \leq l) \\ u_{j1}(x) &= a_{j1} & (0 \leq x \leq l_1) \\ u_{j2}(x) &= a_{j2} & (l_1 \leq x \leq l) \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

上式に対応する重み関数は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
w_{i1}(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) & (0 \leq x \leq l_1) \\
w_{i2}(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) & (l_1 \leq x \leq l) \\
w_{j1}(x) &= \frac{x}{l} & (0 \leq x \leq l_1) \\
w_{j2}(x) &= \frac{x}{l} & (l_1 \leq x \leq l)
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

したがって、要素 ij 内の変位は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
u(x) &= u_{i1}w_{i1} + u_{j1}w_{j1} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)a_{i1} + \frac{x}{l}a_{j1} & (0 \leq x \leq l_1) \\
u(x) &= u_{i2}w_{i2} + u_{j2}w_{j2} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)a_{i2} + \frac{x}{l}a_{j2} & (l_1 \leq x \leq l)
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

上式をベクトル・マトリックスで表すと、

$$\begin{aligned}
u(x) &= \mathbf{N}\mathbf{a}_1 & (0 \leq x \leq l_1) \\
u(x) &= \mathbf{N}\mathbf{a}_2 & (l_1 \leq x \leq l)
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

ここに、

$$\mathbf{a}_1 = \{a_{i1} \quad a_{j1}\}^T, \quad \mathbf{a}_2 = \{a_{i2} \quad a_{j2}\}^T \tag{1.2.5}$$

(1.2.4)式から歪みと応力を求めると次式となる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \mathbf{B}\mathbf{a}_1, \quad \sigma_x = E\mathbf{B}\mathbf{a}_1 & (0 \leq x \leq l_1) \\
\varepsilon_x &= \mathbf{B}\mathbf{a}_2, \quad \sigma_x = E\mathbf{B}\mathbf{a}_2 & (l_1 \leq x \leq l)
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

上式から歪みエネルギーを求めると次のようになる。

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{a}_1^T A \int_0^{l_1} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{a}_2^T A \int_{l_1}^l \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx \mathbf{a}_2 \tag{1.2.7}$$

まとめると、

$$V = \frac{1}{2} [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} \tag{1.2.8}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= A \int_0^{l_1} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx = EA \frac{l_1}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{k}_2 &= A \int_{l_1}^l \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx = EA \frac{l_2}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

(1.2.9)式は、(1.2.7)式からもわかるように、(1.1.10)式の剛性マトリックスの積分範囲を l_1 と l_2 の 2 つの領域に分けて積分したものになっている。

(1.2.8)式より、要素の剛性マトリックスは次式となる。

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \tag{1.2.10}$$

1.3 要素内の不連続点にバネを挿入した場合

1.2 節の要素は、このままでは不安定となるので、不連続点にバネを挿入するものとする。ただし、バネ剛性は単位面積あたり p_x とし、バネの長さは考えないものとする。いま、バネの i 端側と j 端側の端点を A 点、 B 点とし、その点の変位を u_A, u_B とすると、バネに蓄えられる歪みエネルギーは次式から計算される。

$$V_s = \frac{1}{2}(u_A - u_B) p_x A (u_A - u_B) \quad (1.3.1)$$

上式をマトリックス表示すると、

$$V_s = \frac{1}{2} [u_A \quad u_B] p_x A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} \quad (1.3.2)$$

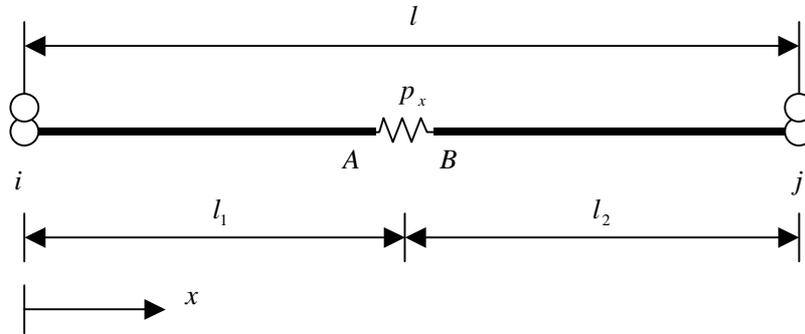


図 1.3.1 不連続点にバネを挿入した要素モデル

FCM の場合、 u_A, u_B は、(1.2.4)式から次式のように求められる。

$$u_A = \mathbf{N}(l_1) \mathbf{a}_1, \quad u_B = \mathbf{N}(l_1) \mathbf{a}_2 \quad (1.3.3)$$

ここに、

$$\mathbf{N}(l_1) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{l_1}{l} & \frac{l_1}{l} \end{bmatrix} \quad (1.3.4)$$

(1.3.3)式をベクトル表示すると、

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} \quad (1.3.5)$$

(1.3.5)式を(1.3.2)式に代入すると、

$$V_s = \frac{1}{2} [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2] p_x A \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} \quad (1.3.6)$$

したがって、バネの剛性マトリックスは次式で与えられる。

$$\mathbf{k}_s = p_x A \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

上式を計算すると次のようになる。

$$\mathbf{k}_S = p_x A \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 & \frac{l_1(1-l_1/l)}{l} & -\left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 & -\frac{l_1(1-l_1/l)}{l} \\ & \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 & -\frac{l_1(1-l_1/l)}{l} & -\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \\ & & \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 & \frac{l_1(1-l_1/l)}{l} \\ \text{sym.} & & & \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (1.3.8)$$

したがって、図 1.3.1 の要素の剛性マトリックスは、(1.2.10)式に(1.3.8)式を加えたものになる。この合成された要素剛性マトリックス \mathbf{k} を計算すると次式のようなになる。

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_S = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{sym.} & & & k_{44} \end{bmatrix} \quad (1.3.9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} k_{11} &= EA \frac{l_1}{l^2} + p_x A \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 & k_{22} &= EA \frac{l_1}{l^2} + p_x A \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 & k_{33} &= EA \frac{l_2}{l^2} + p_x A \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 \\ k_{12} &= -EA \frac{l_1}{l^2} + p_x A \frac{l_1(1-l_1/l)}{l} & k_{23} &= -p_x A \frac{l_1(1-l_1/l)}{l} & k_{34} &= -EA \frac{l_2}{l^2} + p_x A \frac{l_1(1-l_1/l)}{l} \\ k_{13} &= -p_x A \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 & k_{24} &= -p_x A \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 & k_{44} &= EA \frac{l_2}{l^2} + p_x A \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \\ k_{14} &= -p_x A \frac{l_1(1-l_1/l)}{l} & & & & \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

(1.3.9)式の要素剛性マトリックスを用いれば、要素内の不連続点を任意の点に設定できるため崩壊解析等に有効に利用できる。

2. 棒の曲げ問題

2.1 要素内に不連続点がない場合

次に、棒の曲げ問題について考える。曲げ変形は Timoshenko 梁理論にしたがうものとする。

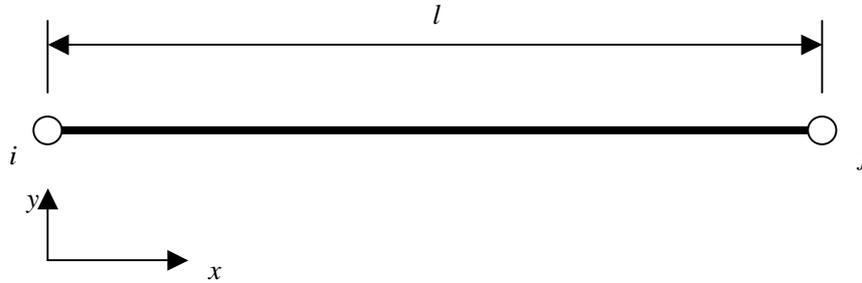


図 2.1.1 1次元棒モデル

図 2.1.1 に示すモデルにおいて、節点 i, j で定義される数学被覆の変位関数を定関数とすると、 i, j 節点の物理被覆 ($0 \leq x \leq l$) の変位関数は次式のようなになる。

$$\begin{aligned} v_i(x) &= a_i, & v_j(x) &= a_j \\ \theta_i(x) &= b_i, & \theta_j(x) &= b_j \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

ただし、 v はたわみ、 θ は回転角を表す。また、節点 i, j の物理被覆の重み関数を次式で定義する。

$$w_i = \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad w_j = \frac{x}{l} \quad (2.1.2)$$

このとき、要素 ij におけるたわみと回転角は、被覆 i と被覆 j の (変位関数 \times 重み) の和で表されるから、

$$\begin{aligned} v(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) a_i + \frac{x}{l} a_j \\ \theta(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) b_i + \frac{x}{l} b_j \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

となる。(2.1.3)式をベクトル・マトリックスで表現すると、

$$\begin{aligned} v(x) &= \mathbf{N}\mathbf{a} \\ \theta(x) &= \mathbf{N}\mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

ここに、

$$\mathbf{N} = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l} \right], \quad \mathbf{a} = \{a_i \quad a_j\}^T, \quad \mathbf{b} = \{b_i \quad b_j\}^T \quad (2.1.5)$$

ところで、棒の断面内の変位は次式で表される。

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -y\theta(x) \\ V(x, y) &= v(x) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

したがって、断面内の歪みは次式で定義される。

$$\varepsilon_x = \frac{dU}{dx} = -y \frac{d\theta}{dx}, \quad \gamma_{xy} = \frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy} = \frac{dv}{dx} - \theta \quad (2.1.7)$$

(2.1.7)式に(2.1.4)式を代入すると，

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -y \frac{dN}{dx} \mathbf{b} = -y \mathbf{B} \mathbf{b} \\ \gamma_{xy} &= \frac{dN}{dx} \mathbf{a} - \mathbf{N} \mathbf{b} = \mathbf{B} \mathbf{a} - \mathbf{N} \mathbf{b}\end{aligned}\quad (2.1.8)$$

ここに，

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}\quad (2.1.9)$$

また，応力は次式から求められる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \varepsilon_x = -E y \mathbf{B} \mathbf{b} \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = G (\mathbf{B} \mathbf{a} - \mathbf{N} \mathbf{b})\end{aligned}\quad (2.1.10)$$

ここに， E はヤング係数， G はせん断弾性係数である。したがって，歪みエネルギーは次式となる。

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2} I \int_0^l \varepsilon_x E \varepsilon_x dx + \frac{1}{2} A \int_0^l \gamma_{xy} G \gamma_{xy} dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{b}^T EI \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \mathbf{b} + \frac{1}{2} \kappa GA \int_0^l (\mathbf{B} \mathbf{a} - \mathbf{N} \mathbf{b})^T (\mathbf{B} \mathbf{a} - \mathbf{N} \mathbf{b}) dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{b}^T EI \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \kappa GA \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \mathbf{a} \\ &\quad - \mathbf{a}^T \kappa GA \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{N} dx \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \kappa GA \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{B}^T dx \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \kappa GA \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \mathbf{b}\end{aligned}\quad (2.1.11)$$

ここに， κ はせん断応力分布を線形に仮定したことを補正する係数で有効せん断係数と呼ばれている。また， A は断面積， I は断面二次モーメントである。(2.1.11)式をさらにまとめると，

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T & \mathbf{b}^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{bb}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^s & \mathbf{k}_{ab}^s \\ \mathbf{k}_{ab}^{sT} & \mathbf{k}_{bb}^s \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}\quad (2.1.12)$$

ここに，

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{bb}^b &= EI \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \\ \mathbf{k}_{aa}^s &= \kappa GA \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \\ \mathbf{k}_{ab}^s &= -\kappa GA \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{N} dx \\ \mathbf{k}_{bb}^s &= \kappa GA \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx\end{aligned}\quad (2.1.13)$$

(2.1.12)の剛性マトリックス部分を厳密に積分すると，棒が細長くなった場合に Shear-locking 現象が生じる。そこで，せん断剛性成分の積分を 1 点積分とする選択低減積分法を用いる。この場合，(2.1.13)式は次式ようになる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{bb}^b &= \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{k}_{aa}^s &= \frac{\kappa GA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{k}_{ab}^s &= -\frac{\kappa GA}{l} \begin{bmatrix} -l/2 & -l/2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{k}_{bb}^s &= \frac{\kappa GA}{l} \begin{bmatrix} l^2/4 & l^2/4 \\ l^2/4 & l^2/4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

したがって、要素の剛性マトリックス \mathbf{k} は次式となる。

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\kappa GA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -l/2 & -l/2 \\ -1 & 1 & l/2 & l/2 \\ -l/2 & l/2 & l^2/4 & l^2/4 \\ -l/2 & l/2 & l^2/4 & l^2/4 \end{bmatrix} \tag{2.1.15}$$

2.2 要素内に不連続点がある場合

次に、要素内に不連続点がある場合を考える。引張り問題と同様に、有限被覆法(FCM)では、節点で定義される被覆を2つ増やすことになる。

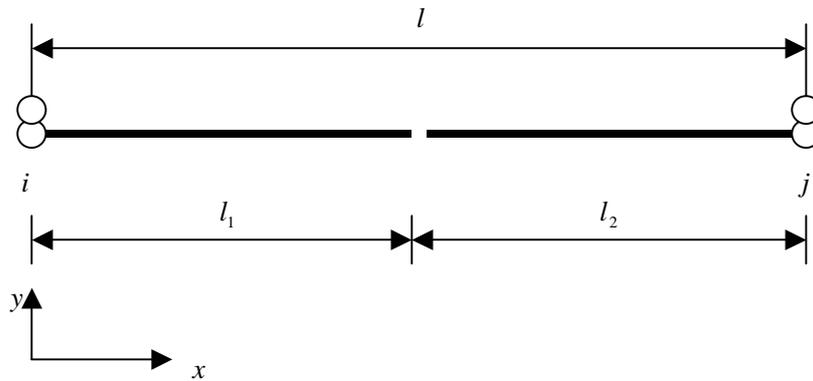


図 2.2.1 不連続点を含む要素モデル

(2.1.1)式と同様に数学被覆の変位関数を定関数とすると、節点 i, j の物理被覆の変位関数は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
u_{i1}(x) &= a_{i1} & (0 \leq x \leq l_1) & & u_{j1}(x) &= a_{j1} & (0 \leq x \leq l_1) \\
\theta_{i1}(x) &= b_{i1} & (0 \leq x \leq l_1) & & \theta_{j1}(x) &= b_{j1} & (0 \leq x \leq l_1) \\
u_{i2}(x) &= a_{i2} & (l_1 \leq x \leq l) & & u_{j2}(x) &= a_{j2} & (l_1 \leq x \leq l) \\
\theta_{i2}(x) &= b_{i2} & (l_1 \leq x \leq l) & & \theta_{j2}(x) &= b_{j2} & (l_1 \leq x \leq l)
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

上式に対応する重み関数は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
w_{i1}(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) & (0 \leq x \leq l_1) \\
w_{i2}(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) & (l_1 \leq x \leq l) \\
w_{j1}(x) &= \frac{x}{l} & (0 \leq x \leq l_1) \\
w_{j2}(x) &= \frac{x}{l} & (l_1 \leq x \leq l)
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

したがって、要素 ij 内の変位は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
u(x) &= u_{i1}w_{i1} + u_{j1}w_{j1} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)a_{i1} + \frac{x}{l}a_{j1} & (0 \leq x \leq l_1) \\
\theta(x) &= \theta_{i1}w_{i1} + \theta_{j1}w_{j1} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)b_{i1} + \frac{x}{l}b_{j1} & (0 \leq x \leq l_1) \\
u(x) &= u_{i2}w_{i2} + u_{j2}w_{j2} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)a_{i2} + \frac{x}{l}a_{j2} & (l_1 \leq x \leq l) \\
\theta(x) &= \theta_{i2}w_{i2} + \theta_{j2}w_{j2} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)b_{i2} + \frac{x}{l}b_{j2} & (l_1 \leq x \leq l)
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

上式をベクトル・マトリックスで表すと、

$$\begin{aligned}
u(x) &= \mathbf{Na}_1 & (0 \leq x \leq l_1) & \quad u(x) = \mathbf{Na}_2 & (l_1 \leq x \leq l) \\
\theta(x) &= \mathbf{Nb}_1 & (0 \leq x \leq l_1) & \quad \theta(x) = \mathbf{Nb}_2 & (l_1 \leq x \leq l)
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \{a_{i1} \quad a_{j1}\}^T, & \mathbf{a}_2 &= \{a_{i2} \quad a_{j2}\}^T \\
\mathbf{b}_1 &= \{b_{i1} \quad b_{j1}\}^T, & \mathbf{b}_2 &= \{b_{i2} \quad b_{j2}\}^T
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

(2.2.4)式を(2.1.7)式に代入すると歪みは次式から求まる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -y\mathbf{Bb}_1, & \gamma_{xy} &= \mathbf{Ba}_1 - \mathbf{Nb}_1 & (0 \leq x \leq l_1) \\
\varepsilon_x &= -y\mathbf{Bb}_2, & \gamma_{xy} &= \mathbf{Ba}_2 - \mathbf{Nb}_2 & (l_1 \leq x \leq l)
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

したがって、歪みエネルギーは次式となる。

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}I \int_0^l \varepsilon_x E \varepsilon_x dx + \frac{1}{2}A \int_0^l \gamma_{xy} G \gamma_{xy} dx \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{b}_1^T EI \int_0^{l_1} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_1^T \kappa GA \int_0^{l_1} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \mathbf{a}_1 \\
&\quad - \mathbf{a}_1^T \kappa GA \int_0^{l_1} \mathbf{B}^T \mathbf{N} dx \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1^T \kappa GA \int_0^{l_1} \mathbf{N}^T \mathbf{B}^T dx \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1^T \kappa GA \int_0^{l_1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \mathbf{b}_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2^T EI \int_{l_1}^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \mathbf{b}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2^T \kappa GA \int_{l_1}^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \mathbf{a}_2 \\
&\quad - \mathbf{a}_2^T \kappa GA \int_{l_1}^l \mathbf{B}^T \mathbf{N} dx \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_2^T \kappa GA \int_{l_1}^l \mathbf{N}^T \mathbf{B}^T dx \mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2^T \kappa GA \int_{l_1}^l \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \mathbf{b}_2
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

まとめると、

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T & \mathbf{b}_1^T & \mathbf{a}_2^T & \mathbf{b}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.2.8)$$

ここに,

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} l_1/l & -l_1/l & -l_1/2 & -l_1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\kappa GA}{l} \begin{bmatrix} l_1/l & -l_1/l & -l_1/2 & -l_1/2 \\ -l_1/l & l_1/l & l_1/2 & l_1/2 \\ -l_1/2 & l_1/2 & l_1/4 & l_1/4 \\ -l_1/2 & l_1/2 & l_1/4 & l_1/4 \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} l_2/l & -l_2/l & -l_2/2 & -l_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\kappa GA}{l} \begin{bmatrix} l_2/l & -l_2/l & -l_2/2 & -l_2/2 \\ -l_2/l & l_2/l & l_2/2 & l_2/2 \\ -l_2/2 & l_2/2 & l_2/4 & l_2/4 \\ -l_2/2 & l_2/2 & l_2/4 & l_2/4 \end{bmatrix}$$

(2.2.8)式より, 要素の剛性マトリックスは次式となる。

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

2.3 要素内の不連続点にバネを挿入した場合

2.2 節の要素は, このままでは不安定となるので, 不連続点に曲げバネを挿入するものとする。ただし, 曲げバネ剛性は単位面積あたり m_x とし, バネの長さは考えないものとする。いま, バネの i 端側と j 端側の端点を A 点, B 点とし, その点の回転角を θ_A, θ_B とすると, バネに蓄えられる歪みエネルギーは次式から計算される。

$$V_s = \frac{1}{2} (\theta_A - \theta_B) m_z A (\theta_A - \theta_B) \quad (2.3.1)$$

上式をマトリックス表示すると,

$$V_s = \frac{1}{2} [\theta_A \quad \theta_B] m_z A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} \quad (2.3.2)$$

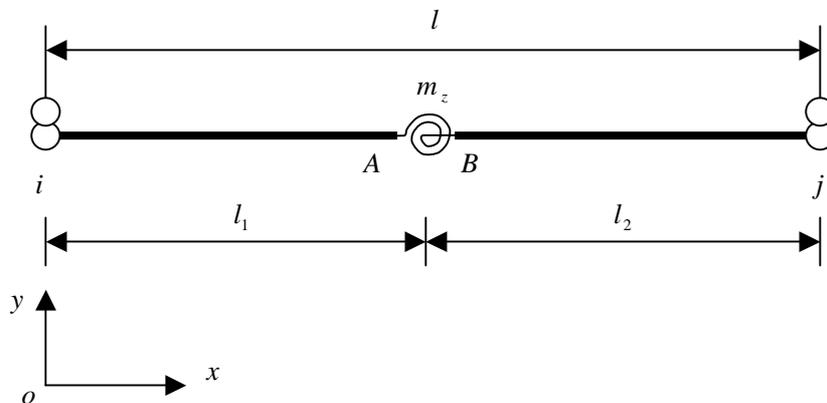


図 2.3.1 不連続点にバネを挿入した要素モデル

FCM の場合， θ_A, θ_B は，(2.2.4)式から次式のように求められる。

$$\theta_A = \mathbf{N}(l_1)\mathbf{b}_1, \quad \theta_B = \mathbf{N}(l_1)\mathbf{b}_2 \quad (2.3.3)$$

ここに，

$$\mathbf{N}(l_1) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{l_1}{l} & \frac{l_1}{l} \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

(2.3.3)式をベクトル表示すると，

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.3.5)$$

(2.3.5)式を(2.3.2)式に代入すると，

$$V_S = \frac{1}{2}[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] m_z A \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.3.6)$$

したがって，バネの剛性マトリックスは次式で与えられる。

$$\mathbf{k}_S = m_z A \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(l_1) \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

上式を計算すると次のようになる。

$$\mathbf{k}_S = m_z A \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 & \frac{l_1(1-l_1/l)}{l} & -\left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 & -\frac{l_1(1-l_1/l)}{l} \\ & \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 & -\frac{l_1(1-l_1/l)}{l} & -\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \\ & & \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 & \frac{l_1(1-l_1/l)}{l} \\ \text{sym.} & & & \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

したがって，図 2.3.1 の要素の剛性マトリックスは，(2.2.10)式に(2.3.8)式を加えたものになる。