## 動的問題の解法

超音波の波動伝播解析を行う準備として，ボクセル有限要素法を用いた弾性体の波動伝播解析プログラムを作成する。弾性体の波動伝播問題は，有限要素法では次式の運動方程式を解くことになる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{U}(t)=\mathbf{F}(t) \tag{1}$$

ここに，$\mathbf{M}$ は質量マトリックス，$\mathbf{C}$ は減衰マトリックス，$\mathbf{K}$ は剛性マトリックス，$\mathbf{F}$ は外力ベクトル，$\mathbf{U}$ は節点変位ベクトル，$\dot{\mathbf{U}}$ は節点速度ベクトル，$\ddot{\mathbf{U}}$ は節点加速度ベクトルである。なお，$t$ は時刻で，ベクトルの上付ドットは時間に関する微分を表す。

(1)式を解く方法としては，大きくモード重ね合わせ法と直接時間積分法がある。線形問題であれば，モード重ね合わせ法の方が精度，計算時間ともに有利であると考えられる。しかし，非線形問題ではモード重ね合わせ法の適用は難しく，通常直接時間積分法が用いられる。ボクセル有限要素法では，とりあえず弾性問題として解析するのでモード重ね合わせ法の適用が考えられるが，将来の非線形問題への拡張を考えると直接数値積分法の方が実用的である。そこで，ここでは直接数値積分法を用いることにする。

直接数値積分法には, 大きく分けて陰解法と陽解法がある。陰解法は, 時刻 $t$ までの変位, 速度, 加速度が既知であるとし，時刻 $t+\Delta t$ の運動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t+\Delta t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t+\Delta t)+\mathbf{K}\mathbf{U}(t+\Delta t)=\mathbf{F}(t+\Delta t) \tag{2}$$

を解くことにより，時刻 $t+\Delta t$ の変位，速度，加速度を求める方法である。ただし，(2)式を解くためには，変位，速度，加速度ベクトルの内，どれか一つにまとめる必要がある。そこで，加速度法と呼ばれる方法では，時刻 $t$ と時刻 $t+\Delta t$ 間の加速度の変化を仮定して，これを積分することにより，変位と速度を時刻 $t+\Delta t$ の加速度と時刻 $t$ の既知量によって表す。Newmark の β 法の公式によれば，時刻 $t+\Delta t$ の変位と速度は，時刻 $t+\Delta t$ の加速度によって次式のように表される。ただし，以下では，時刻 $t$ の変位，速度，加速度ベクトルを $\mathbf{U}_n,\dot{\mathbf{U}}_n,\ddot{\mathbf{U}}_n$ で，時刻 $t+\Delta t$ の変位，速度，加速度ベクトルを $\mathbf{U}_{n+1},\dot{\mathbf{U}}_{n+1},\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ で表すことにする。なお，$n$ はステップ数 $(n\geq 1)$ である。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{U}}_{n+1}&=\dot{\mathbf{U}}_n+\frac{\Delta t}{2}\left\{\gamma\ddot{\mathbf{U}}_n+(1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}\right\}\\
\mathbf{U}_{n+1}&=\mathbf{U}_n+\Delta t\,\dot{\mathbf{U}}_n+\Delta t^2\left\{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\mathbf{U}}_n+\beta\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}\right\}
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$\gamma=1/2,\beta=1/6$ と置くと線形加速度法となり，$\gamma=1/2,\beta=1/4$ と置くと平均加速度法の式となる。また，$\gamma>1/2$ とすると数値的な減衰効果を入れることができる。

(3)式を(2)式に代入して，$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ に関して解くと，

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}=\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{F}} \tag{4}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{M}}&=\mathbf{M}+\gamma\Delta t\,\mathbf{C}+\beta\Delta t^2\,\mathbf{K}\\
\bar{\mathbf{F}}&=\mathbf{F}-\mathbf{C}\left\{\dot{\mathbf{U}}_n+(1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}_n\right\}-\mathbf{K}\left\{\mathbf{U}_n+\Delta t\,\dot{\mathbf{U}}_n+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2\,\ddot{\mathbf{U}}_n\right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

(4)式から $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ が求められると，(3)式から $\mathbf{U}_{n+1},\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ を求めることができる。以上の過程を繰り返して行えば時刻歴応答解析を行うことができる。

以上の陰解法では，(4)式の連立方程式を解く必要がある。ボクセル解析では，これを共役勾配

法により Element by Element で解くことは可能であるが，各時刻で(4)式を解くことは大きな計算負荷となる。

一方，陽解法は，時刻$t$の運動方程式をもとに，時刻$t+\Delta t$の解を近似的に求める方法で，この方法では連立方程式を解く必要がないため計算効率上は陰解法よりも有利である。

中央差分法にもとづく方法では，時刻$t+\Delta t$および$t-\Delta t$での変位を時刻$t$での Taylor 展開により次のように表す。

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{n+1}&=\mathbf{U}_n+\Delta t\,\dot{\mathbf{U}}_n+\frac{\Delta t^2}{2!}\ddot{\mathbf{U}}_n+\cdots\\ \mathbf{U}_{n-1}&=\mathbf{U}_n-\Delta t\,\dot{\mathbf{U}}_n+\frac{\Delta t^2}{2!}\ddot{\mathbf{U}}_n+\cdots\end{aligned}\tag{6}$$

$\Delta t^2$の項までを考慮して，上式の差および和をとると次式が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_n&=\frac{1}{2\Delta t}\left(\mathbf{U}_{n+1}-\mathbf{U}_{n-1}\right)\\ \ddot{\mathbf{U}}_n&=\frac{1}{\Delta t^2}\left(\mathbf{U}_{n+1}-2\mathbf{U}_n+\mathbf{U}_{n-1}\right)\end{aligned}\tag{7}$$

以上の２式を時刻$t$における運動方程式,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n+\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n+\mathbf{K}\mathbf{U}_n=\mathbf{F}_n\tag{8}$$

に代入して整理すると次式のようになる。

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}+\frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{F}_n-\mathbf{K}\mathbf{U}_n+\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\left(2\mathbf{U}_n-\mathbf{U}_{n+1}\right)+\frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\mathbf{U}_{n-1}\tag{9}$$

ここで, (9)式の左辺のカッコ内が対角マトリックスであれば, (9)式は連立方程式を解くことなく, $\mathbf{U}_{n+1}$を求めることができる。このため陽解法では$\mathbf{M}$としては集中質量マトリックスが用いられ, また，減衰は無視されることが多い。なお，第 1 ステップ目の(9)式の右辺の計算には, $\mathbf{U}_0\left[=\mathbf{U}(-\Delta t)\right]$の値が必要となるが，これは，(7)式において$n=1$と置いた式から$\mathbf{U}_2$を消去することによって得られる。すなわち,

$$\mathbf{U}_0\left(-\Delta t\right)=\mathbf{U}_1-\Delta t\,\dot{\mathbf{U}}_1+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{U}}_1\tag{10}$$

この方法は，$n-1$と$n$の値から外そうによって$n+1$の値を評価しているので，$\Delta t$を十分小さくとらないと解の安定性が保証されない。ちなみに陽解法の解の安定限界は,

$$\Delta t_{cr}=T_n/\pi\tag{11}$$

である。ここに，$T_n$は構造系の最小固有周期である。一方，陰解法である線形加速度法の安定限界は,

$$\Delta t_{cr}=2\sqrt{3}\big/\omega_n=\sqrt{3}\left(\frac{T_n}{\pi}\right)\tag{12}$$

となり, 陽解法の方が$1/\sqrt{3}$ほど$\Delta t$を小さくとる必要があることがわかる。また，衝撃解析では, よく陽解法が用いられるが，この場合は，$\Delta t$を，要素内を波動が伝播する時間より短くとる必要があり，次の条件を満たす必要がある。

$$\Delta t<l_e/c\tag{13}$$

ここに，$c$は波動伝播速度，$l_e$は要素の最小長さである。

ここでは，以上の２種の直接数値積分法を用いた解析プログラムを作成し，両者を比較することにより，解の精度等の検討を行う。

解析を行うにあたって, (1)式の運動方程式の質量マトリックス**M** と減衰マトリックス**C** を計算する必要がある。なお，剛性マトリックス**K** に関しては，静的解析のものと同様のもの（応力仮定法にもとづく剛性マトリックス）を用いる。構造系の質量は，陽解法にも適用できるように有限要素節点における集中質量として評価する。この場合質量マトリックスは次式のような対角マトリックスとなる。

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1 &&&&&&&&&& \\ & m_1 &&&&&&&&& \\ && m_1 &&&&&&&& \\ &&& \ddots &&&&&&& \\ &&&& m_i &&&&&& \\ &&&&& m_i &&&&& \\ &&&&&& m_i &&&& \\ &&&&&&& \ddots &&& \\ &&&&&&&& m_N && \\ &&&&&&&&& m_N & \\ &&&&&&&&&& m_N \end{bmatrix} \tag{14}$$

ここに， $m_i$ は $i$ 番目節点の質量を表す。また $N$ は要素数である。

また，構造系の減衰は，簡単のため剛性比例型とし，陽解法では減衰マトリックスも対角マトリックスにする必要があるため，次式によって計算するものとする。

$$\mathrm{diag}[\mathbf{C}]=\left(\frac{h_1}{\omega_1}\right)\mathrm{diag}[\mathbf{K}] \tag{15}$$

ここに, diag はマトリックスの対角成分を表し， $h_1$ は構造系の１次固有振動数に対する減衰定数, $\omega_1$ は構造系の固有円振動数を表す。

プログラムの有効性を確かめる例題として，図 1 に示すような梁の曲げ振動をシュミレートする。外乱としては cosine 波を用いた。比較解析として，はり要素を用いたモード重ね合わせ法の応答解析も行う。はり要素モデルではは要素を鉛直方向に 10 分割して解析を行った。まず，はり要素モデルで固有振動解析を行った結果，固有周期は 0.6192 秒（固有振動数 1.615Hz）であった。そこで，外乱の振動数を共振振動数に近い 1.5Hz（固有周期 0.667 秒）に設定した。また外乱の振幅は 1 とした。はり要素を用いた応答解析では，減衰定数を $h_1=0.01$，時間増分を 0.01 として解析を行った。解析時間は 3 秒とした。

ボクセル解析では，図１のモデルを鉛直方向に 100 分割して解析を行った（要素数 100，節点数 404）。全質量は 10kg であるから，各節点の質量を 10/404 の 0.02475kg にした。陰解法では, $\beta=1/4, \gamma=1/2$ の平均加速度法とし，減衰定数は $h_1=0.01$，時間増分は 0.001 秒とした。また，陽解法では，減衰定数を 0，時間増分は 0.000001 秒とした。この場合時間増分がこれ以上大きいと発散した。また，減衰定数を 0.01 とすると減衰が過剰に効きすぎる傾向にある。

図 2 は各手法によるはり頂部の水平変位応答を示したものである。図より，ボクセル解析の解は，はり要素を用いた解析解よりも若干大きめになる。これは，はりのせん断変形の影響であると考えられる。また，減衰を考慮しない陽解法の値と減衰を考慮した陰解法の値はよく一致する傾向にある。なお，この場合の陽解法の計算時間は約 3 時間 30 分である。したがって，解析時間

の長い問題では，陽解法は陰解法よりもかえって計算時間がかかる。

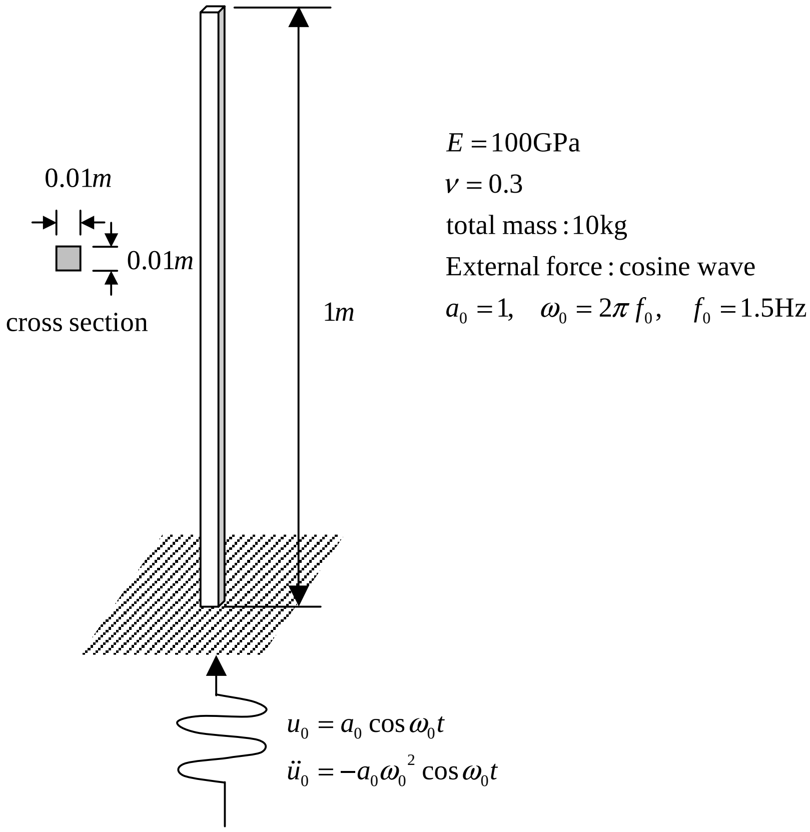


図 1　はりの曲げ振動応答解析モデル

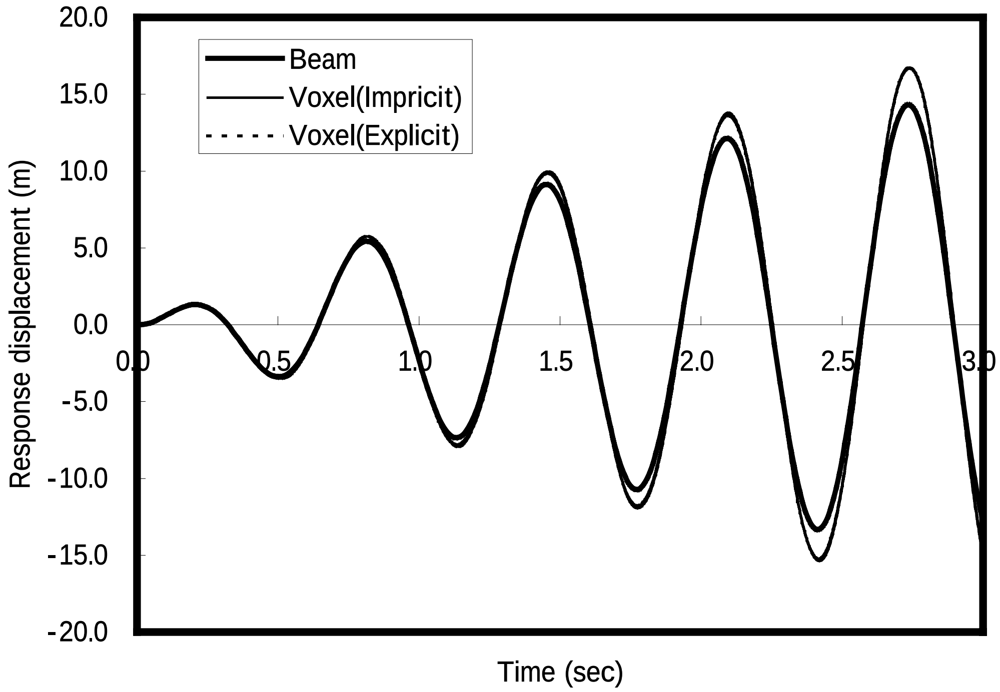


図 2　変位応答値の比較