

超音波の波動方程式とその解法

1. 音波による媒質の運動方程式

図1に示すように微小直方体の中心 (x, y, z) における音圧を p とすれば、 x 軸に垂直な2つの面 $x \pm \Delta x/2$ に作用する音圧は、

$$p \pm \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \quad (1.1)$$

となる。したがって、この微小部分の x 方向の運動方程式は

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \quad (1.2)$$

ここに、 ρ は単位体積質量、 u_x は x 方向の変位である。

(1.2)式より、

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.3)$$

が得られ、 y, z 方向も同様に

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.4)$$

となる。ここに、 u_y, u_z は、 y, z 方向の変位である。

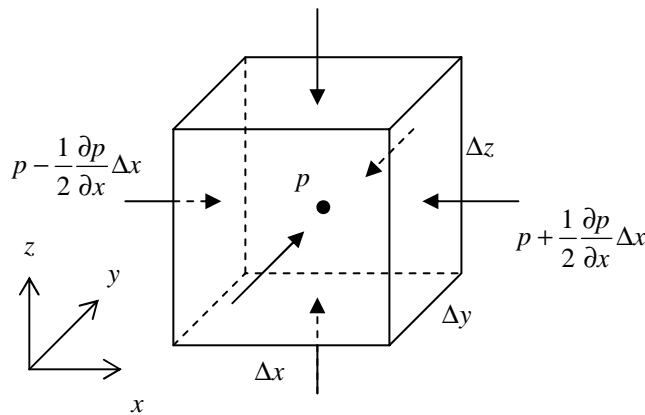


図1 媒質の微小部分に作用する音圧

(1.3), (1.4)式をまとめると、音波による媒質の運動方程式は次式のように表される。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\nabla p \quad (1.5)$$

ここに、

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z], \quad \nabla p = \text{grad } p = \left[\frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{\partial p}{\partial y} \quad \frac{\partial p}{\partial z} \right] \quad (1.6)$$

2．音波の波動方程式

媒質の体積弾性率（bulk modulus）を K とすると，音圧は，

$$p = -K\Delta \quad (2.1)$$

と表される。ここに， Δ は体積変化の割合

$$\Delta = \frac{V - V_0}{V_0}, \quad V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z, \quad V = \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.2)$$

を表し，次式で定義される。

$$\Delta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.3)$$

(2.1)式を時間 t に関して 2 階微分すると，

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -K \nabla \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

上式に，運動方程式(1.5)を代入すると，

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \nabla \cdot \nabla p = \frac{K}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (2.5)$$

となり，音圧に関する波動方程式が得られる。この式は，音圧が

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2.6)$$

の速度で媒質中を波動として伝播することを示している。

3．PML 境界を適用する場合の音波解析の基礎式

音波の波動伝播は，(2.5)式の波動方程式を解くことによって求められるが，有限要素法を適用する場合，次式の基礎式を用いる。

$$\rho \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla p \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \Delta \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (3.2)$$

ここで，(3.1)式は(1.5)式の運動方程式であり，(3.2)式は(2.1)式の両辺を時間に関して微分した式である。なお，(3.1),(3.2)式で， \mathbf{u} の上付ドットは時間微分を表す。

(3.1)式，(3.2)式に減衰項を加えると次のようになる。

$$\rho \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla p - \alpha^* \dot{\mathbf{u}} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \Delta \cdot \dot{\mathbf{u}} - K \alpha p \quad (3.4)$$

ここに， α^* は質量比例型減衰係数， α は剛性比例型減衰係数（ただし，通常の剛性比例型とは異なる）である。

一方，境界で波動を吸収するための PML (perfect matched layer) 領域（境界の外側領域）では，圧力 p を仮想的に x, y, z 方向に分解して，(3.3)，(3.4)式を次式のように書き換える。

$$\rho \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla p - \alpha_b^* \dot{\mathbf{u}} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -K \nabla \dot{\mathbf{u}} - K \alpha_b \mathbf{p} \quad (3.6)$$

ここに，

$$p = p_x + p_y + p_z, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

また， α_b, α_b^* は，PML 領域内の減衰係数で，次式の境界からの反射を 0 にするためのインピーダンスのマッチング条件を満足する。

$$\alpha_b^* = \rho K \alpha_b \quad (3.8)$$

(3.5)，(3.6)式が PML 領域内の基礎式となる。

4．有限要素法による離散化

領域内部の基礎式(3.3)，(3.4)，および PML 領域の基礎式(3.5),(3.6)を重み付き残差法によって離散化する。基本境界条件を満足する重み関数を用いて，(3.3)，(3.4)式の重み付き残差式を作ると次のようになる。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{w}_u^T \left(\rho \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla p + \alpha^* \dot{\mathbf{u}} \right) d\Omega - \int_{\Omega} w_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} + K \Delta \cdot \dot{\mathbf{u}} + K \alpha p \right) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_i} \mathbf{w}_u^T (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここに， Ω は領域の体積， Γ_i は自然境界， \mathbf{t} は表面圧力で， $\mathbf{t} = p \mathbf{n}$ である。ただし， \mathbf{n} は境界表面の法線方向ベクトルである。また， \mathbf{w}_u, w_p は重み関数である。

(4.1)式の第 1 項の ∇p に関して，ガウスの発散定理を用いて部分積分すると，次のような弱形式の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{w}_u^T \left(\rho \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} + \alpha^* \dot{\mathbf{u}} \right) d\Omega - \int_{\Omega} w_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} + K \Delta \cdot \dot{\mathbf{u}} + K \alpha p \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \Delta \cdot \mathbf{w}_u p d\Omega = \int_{\Gamma_i} \mathbf{w}_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.2)$$

同様に，PML 領域の弱形式の重み付き残差式は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{w}_u^T \left(\rho \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} + \alpha_b^* \dot{\mathbf{u}} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w}_{pb}^T \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + K \nabla \dot{\mathbf{u}} + K \alpha_b \mathbf{p} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \Delta \cdot \mathbf{w}_u (p_x + p_y + p_z) d\Omega = \int_{\Gamma_i} \mathbf{w}_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.2)，(4.3)式を有限要素法によって離散化する。有限要素としては，図 4.1 に示す 8 節点直方体要素とする。また，要素内の速度および圧力は線形とし，各節点の速度および圧力を用いて次式のように表す。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}_v \dot{\mathbf{U}}^e & \mathbf{w}_u &= \mathbf{N}_v \mathbf{W}_u^e \\ p &= \mathbf{N} P^e & w_p &= \mathbf{N} W_p^e \\ \mathbf{p} &= \mathbf{N}_v \mathbf{P}_b^e & \mathbf{w}_{pb} &= \mathbf{N}_v \mathbf{W}_{pb}^e \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここに，

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{U}}^e &= [\dot{\mathbf{U}}_x^e \quad \dot{\mathbf{U}}_y^e \quad \dot{\mathbf{U}}_z^e] \\
 \dot{\mathbf{U}}_i^e &= [u_{i1} \quad u_{i2} \quad u_{i3} \quad u_{i4} \quad u_{i5} \quad u_{i6} \quad u_{i7} \quad u_{i8}], \quad i = x, y, z \\
 \mathbf{P}^e &= [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad p_7 \quad p_8] \\
 \mathbf{P}_b^e &= [\mathbf{P}_{bx}^e \quad \mathbf{P}_{by}^e \quad \mathbf{P}_{bz}^e] \\
 \mathbf{P}_{bi}^e &= [p_{bi1} \quad p_{bi2} \quad p_{bi3} \quad p_{bi4} \quad p_{bi5} \quad p_{bi6} \quad p_{bi7} \quad p_{bi8}], \quad i = x, y, z
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$\mathbf{W}_u^e, \mathbf{W}_p^e, \mathbf{W}_{pb}^e$ についても同様である。また,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_v &= \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{N} &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

であり, 形状関数 N_1, \dots, N_8 は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1-2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_5 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1-2y/l_y)(1+2z/l_z) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1-2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_6 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1-2y/l_y)(1+2z/l_z) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1+2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_7 &= \frac{1}{8}(1+2x/l_x)(1+2y/l_y)(1+2z/l_z) \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1+2y/l_y)(1-2z/l_z) & N_8 &= \frac{1}{8}(1-2x/l_x)(1+2y/l_y)(1+2z/l_z)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

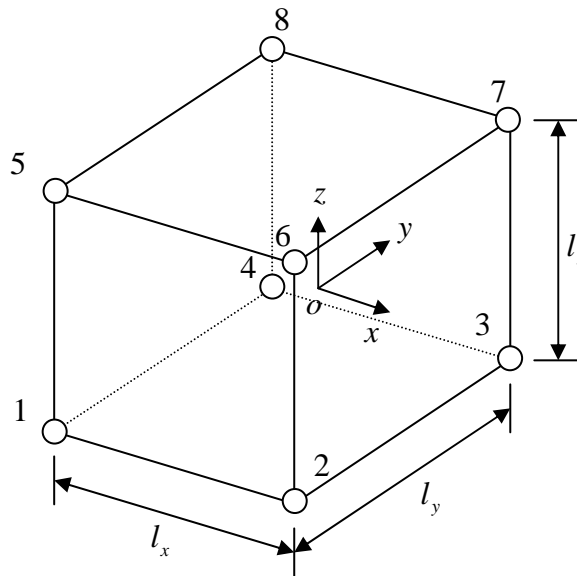


図 4.1 8 節点直方体要素

(4.4)式を(4.2)式に代入すると，

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{W}_u^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v \left(\rho \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}^e}{\partial t} + \alpha^* \dot{\mathbf{U}}^e \right) d\Omega \\
 & -\mathbf{W}_p^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \left(\mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{P}^e}{\partial t} + K [\mathbf{N}_x \quad \mathbf{N}_y \quad \mathbf{N}_z] \dot{\mathbf{U}}^e + K\alpha \mathbf{N} \mathbf{P}^e \right) d\Omega \\
 & + \mathbf{W}_u^{eT} \int_{\Omega} [\mathbf{N}_x \quad \mathbf{N}_y \quad \mathbf{N}_z]^T \mathbf{N} \mathbf{P}^e d\Omega = \mathbf{W}_u^{eT} \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}_v^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

上式を整理すると，次式のようになる。

$$\mathbf{G}^e \dot{\mathbf{V}}^e + \mathbf{H}^e \mathbf{V}^e = -\mathbf{F}^e \tag{4.9}$$

ここに，

$$\mathbf{G}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho \mathbf{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^e = \begin{bmatrix} K\alpha \mathbf{m} & K\mathbf{q}_x & K\mathbf{q}_y & K\mathbf{q}_z \\ -\mathbf{q}_x & \alpha^* \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{q}_y & \mathbf{0} & \alpha^* \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{q}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha^* \mathbf{m} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{V}^e = [\mathbf{P}^e \quad \dot{\mathbf{U}}_x^e \quad \dot{\mathbf{U}}_y^e \quad \dot{\mathbf{U}}_z^e], \quad \mathbf{F}^e = [\mathbf{0} \quad \mathbf{F}_x^e \quad \mathbf{F}_y^e \quad \mathbf{F}_z^e] \tag{4.11}$$

$$\mathbf{m} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{q}_x = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_x d\Omega, \quad \mathbf{q}_y = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_y d\Omega, \quad \mathbf{q}_z = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_z d\Omega \tag{4.12}$$

$$\mathbf{F}_x = \int_{\Gamma_f^e} \mathbf{N}^T \bar{t}_x d\Gamma, \quad \mathbf{F}_y = \int_{\Gamma_f^e} \mathbf{N}^T \bar{t}_y d\Gamma, \quad \mathbf{F}_z = \int_{\Gamma_f^e} \mathbf{N}^T \bar{t}_z d\Gamma \tag{4.13}$$

また，(4.4)式を(4.3)式に代入すると，

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{W}_u^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v \left(\rho \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}^e}{\partial t} + \alpha^* \dot{\mathbf{U}}^e \right) d\Omega \\
 & -\mathbf{W}_{pb}^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \left(\mathbf{N}_v \frac{\partial \mathbf{P}_b^e}{\partial t} + K [\mathbf{N}_x \quad \mathbf{N}_y \quad \mathbf{N}_z]^T \dot{\mathbf{U}}^e + K\alpha \mathbf{N}_v \mathbf{P}_b^e \right) d\Omega \\
 & + \mathbf{W}_u^{eT} \int_{\Omega} [\mathbf{N}_x \quad \mathbf{N}_y \quad \mathbf{N}_z]^T [\mathbf{N} \quad \mathbf{N} \quad \mathbf{N}] \mathbf{P}_b^e d\Omega = \mathbf{W}_u^{eT} \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}_v^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

上式を整理すると，次式のようになる。

$$\mathbf{G}_b^e \dot{\mathbf{V}}_b^e + \mathbf{H}_b^e \mathbf{V}_b^e = -\mathbf{F}_b^e \tag{4.15}$$

ここに，

$$\mathbf{G}_b^e = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho \mathbf{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_b^e = \begin{bmatrix} K\alpha \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & K\mathbf{q}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K\alpha \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & K\mathbf{q}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & K\alpha \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & K\mathbf{q}_z \\ -\mathbf{q}_x & -\mathbf{q}_x & -\mathbf{q}_x & \alpha^* \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{q}_y & -\mathbf{q}_y & -\mathbf{q}_y & \mathbf{0} & \alpha^* \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{q}_z & -\mathbf{q}_z & -\mathbf{q}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha^* \mathbf{m} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$\mathbf{V}_b^e = [\mathbf{P}_{bx}^e \quad \mathbf{P}_{by}^e \quad \mathbf{P}_{bz}^e \quad \dot{\mathbf{U}}_x^e \quad \dot{\mathbf{U}}_y^e \quad \dot{\mathbf{U}}_z^e], \quad \mathbf{F}_b^e = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{F}_x^e \quad \mathbf{F}_y^e \quad \mathbf{F}_z^e] \tag{4.17}$$

5．要素マトリックスの重ね合わせと解法

(4.9)式，(4.15)式を内部領域，PML 領域で重ね合わせを行う。この際，問題となるのが PML 境界との結合部分の重ね合わせである。この場合，内部領域の要素では，節点の圧力の自由度が 1 であるのに対して，PML 領域では，節点の圧力の自由度が 3 となる。しかし，(4.10)式と(4.16)式を比較すると，節点圧力部分に関しては，同じ値を x, y, z 方向成分に分配すればよいことがわかる。以上のことに注意して重ね合わせを行うと，領域全体の方程式が次式のように得られる。

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{H}\mathbf{V} = -\mathbf{F} \quad (5.1)$$

(5.1)式を解くために，時間積分を 4 次精度の Runge-Kutta 公式を用いて行う。この場合，(5.1)式を次式のように書き換える。

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{P}\mathbf{V} + \mathbf{Q}(t) \quad (5.2)$$

ただし， $\mathbf{P} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$ ， $\mathbf{Q}(t) = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}(t)$ である。このとき，Runge-Kutta の公式は次式で表される。

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{C}_0 + 2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3) \quad (5.3)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= \Delta t(\mathbf{P}\mathbf{V}_n + \mathbf{Q}_n) \\ \mathbf{C}_1 &= \Delta t \left[\mathbf{P} \left(\mathbf{V}_n + \frac{1}{2}\mathbf{C}_0 \right) + \mathbf{Q}_{n+\frac{1}{2}} \right] \\ \mathbf{C}_2 &= \Delta t \left[\mathbf{P} \left(\mathbf{V}_n + \frac{1}{2}\mathbf{C}_1 \right) + \mathbf{Q}_{n+\frac{1}{2}} \right] \\ \mathbf{C}_3 &= \Delta t \left[\mathbf{P}(\mathbf{V}_n + \mathbf{C}_2) + \mathbf{Q}_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

ただし， Δt は時間増分，下添字 n は t_n 時刻， $n+1$ は $t_n + \Delta t$ 時刻， $n+1/2$ は $t_n + \Delta t/2$ 時刻の値であることを示す。なお，(5.2)式の \mathbf{P}, \mathbf{Q} の計算には \mathbf{G}^{-1} が必要となるため， \mathbf{G} は各行の成分の総和を対角項とする対角化を行う。また，(5.2)式の計算で， \mathbf{P} を作ると膨大なメモリーを必要とするため，実際には各要素で $\mathbf{C}_0 \sim \mathbf{C}_3$ を計算し，ベクトル上で重ね合わせを行う。この場合，要素剛性マトリックスとベクトルの掛け算を膨大な回数行うことになるが，ボクセル有限要素法では，要素形状をすべて同じとするので，(4.12)式のマトリックスを事前に計算してコンピュータのメモリーに保存しておけば計算効率は格段に向上する。