平面シェル要素を用いたシェル構造の幾何学的非線形解析

ここでは，変形を，変形前の初期形状を参照して表現する Lagrange 形定式化について示す。なお，本レポートの定式化は，『有限要素法ハンドブックII』，培風館，pp.128-149 を参考にしている。

1　仮想仕事式

大変形問題においても，仮想仕事の原理は成り立つので，ここでは，仮想仕事の原理から幾何剛性マトリックスを導く。

変形前の形状を参照した場合の大変形問題における仮想仕事の原理は次式のように表される。

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \tag{1.1}$$

ここに，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は歪ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力ベクトル，$\mathbf{u}$ は変位ベクトル，$\mathbf{b}$ は物体力ベクトル，$\mathbf{t}$ は表面力ベクトルである。3 次元問題では，これらのベクトルは，次のように表される。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^T &= \left\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\right\} \\
\boldsymbol{\varepsilon}^T &= \left\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\right\} \\
.\ \mathbf{u}^T &= \left\{u_x \quad u_y \quad u_z\right\} \\
\mathbf{b}^T &= \left\{b_x \quad b_y \quad b_z\right\} \\
\mathbf{t}^T &= \left\{t_x \quad t_y \quad t_z\right\}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

ここで，ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は，線形部分と非線形部分に分けられ，次のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(L)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(N)} \tag{1.3}$$

ここに，

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(L)} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \\ \left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) \\ \left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) \\ \left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(N)} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] \\ \left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x}\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right) \\ \left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z}\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

さらに，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(L)}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}^{(N)}$ は，次のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(L)} = \boldsymbol{\chi}^{(L)}\mathbf{d} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(N)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\chi}^{(N)}\mathbf{d} \tag{1.7}$$

ここに，$\mathbf{d}$ は変位勾配，

$$\mathbf{d}^T = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} \tag{1.8}$$

$\boldsymbol{\chi}^{(L)}$ と $\boldsymbol{\chi}^{(N)}$ は，次のように表される。

$$\boldsymbol{\chi}^{(L)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{\chi}^{(N)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_x}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

2　有限要素法による離散化

節点変位を用いた多項式補間関数により，要素内の変位分布 $\mathbf{u}$ を仮定する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U}^e \tag{2.1}$$

ここに，$\mathbf{N}$ は形状関数，$\mathbf{U}^e$ は要素の節点変位ベクトルである。上式を(1.8)式に代入すると，変位勾配 $\mathbf{d}$ は次式のように表される。

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}_d\mathbf{U}^e \tag{2.2}$$

ここに，$\mathbf{B}_d$ は，変位勾配と節点変位を関係づけるマトリックスである。

このとき，(1.3)式のひずみは，次式のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(L)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(N)} = \left(\mathbf{B}^{(L)} + \mathbf{B}^{(N)}\right)\mathbf{U}^e = \mathbf{B}\mathbf{U}^e \tag{2.3}$$

ここに，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(L)} &= \mathbf{B}^{(L)}\mathbf{U}^e, \qquad & \mathbf{B}^{(L)} &= \boldsymbol{\chi}^{(L)}\mathbf{B}_d \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(N)} &= \mathbf{B}^{(N)}\mathbf{U}^e, \qquad & \mathbf{B}^{(N)} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\chi}^{(N)}\mathbf{B}_d \end{aligned} \tag{2.4}$$

マトリックス$\mathbf{B}$はひずみ－変位マトリックス，$\mathbf{B}^{(L)},\mathbf{B}^{(N)}$は$\mathbf{B}$の線形および非線形成分である。(2.1)式と(2.3)式を(1.1)式に代入すると，次式が得られる。

$$\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{B}^{(L)}\delta\mathbf{U}^e+\mathbf{B}^{(N)}\delta\mathbf{U}^e+\delta\mathbf{B}^{(N)}\mathbf{U}^e\right)^T\boldsymbol{\sigma}d\Omega=\int_{\Omega^e}\delta\mathbf{U}^{e^T}\mathbf{N}^T\mathbf{b}d\Omega+\int_{\Gamma_T^e}\delta\mathbf{U}^{e^T}\mathbf{N}^T t d\Gamma \tag{2.5}$$

ここに，Ω^e,Γ_T^eは要素の領域と力学的境界を表す。ここで，$\delta\mathbf{B}^{(N)}\mathbf{U}^e=\mathbf{B}^{(N)}\delta\mathbf{U}^e$の関係を考慮すると次式が得られる。

$$\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{B}^{(L)}+2\mathbf{B}^{(N)}\right)^T\boldsymbol{\sigma}d\Omega=\int_{\Omega^e}\mathbf{N}^T\mathbf{b}d\Omega+\int_{\Gamma_T^e}\mathbf{N}^T\mathbf{t}d\Gamma \tag{2.6}$$

3　増分型方程式

(2.6)式を，前ステップの既知量とその増分量で表すと次式のようになる。

$$\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{B}^{(L)}+2\mathbf{B}_0^{(N)}+2\Delta\mathbf{B}^{(N)}\right)^T\left(\boldsymbol{\sigma}_0+\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)d\Omega=\int_{\Omega^e}\mathbf{N}^T\left(\mathbf{b}_0+\Delta\mathbf{b}\right)d\Omega+\int_{\Gamma_T^e}\mathbf{N}^T\left(\mathbf{t}_0+\Delta\mathbf{t}\right)d\Gamma \tag{3.1}$$

ここに，下添字“0”は前ステップの既知量を表し，Δはそこからの増分量を表す。なお，弾性成分$\mathbf{B}^{(L)}$は変化しないものとしている（$\Delta\mathbf{B}^{(L)}=\mathbf{0}$）。(3.1)式は，次のように整理できる。

$$\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{B}^{(L)}+2\mathbf{B}_0^{(N)}\right)^T\Delta\boldsymbol{\sigma}d\Omega+2\int_{\Omega^e}\Delta\mathbf{B}^{(N)^T}\boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega=\Delta\mathbf{f}_b+\Delta\mathbf{f}_t+\mathbf{R}_0+\mathbf{Q}_\sigma \tag{3.2}$$

ここに，$\Delta\mathbf{f}_b,\Delta\mathbf{f}_t$は，物体力と表面力による等価節点力，$\mathbf{R}_0$は前ステップの不釣り合い力，$\mathbf{Q}_\sigma$は，2次以上の高次項で，それぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{f}_b&=\int_{\Omega^e}\mathbf{N}^T\Delta\mathbf{b}d\Omega\\
\Delta\mathbf{f}_t&=\int_{\Gamma_T^e}\mathbf{N}^T\Delta\mathbf{t}d\Gamma\\
\mathbf{R}_0&=\int_{\Omega^e}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_0 d\Omega+\int_{\Gamma_T^e}\mathbf{N}^T\mathbf{t}_0 d\Gamma-\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{B}^{(L)}+2\mathbf{B}_0^{(N)}\right)^T\boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega\\
\mathbf{Q}_\sigma&=-2\int_{\Omega^e}\Delta\mathbf{B}^{(N)^T}\Delta\boldsymbol{\sigma}d\Omega.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

(3.2)式の$\Delta\boldsymbol{\sigma}$は次式のように表される。

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}\left\{\left(\mathbf{B}^{(L)}+2\mathbf{B}_0^{(N)}\right)\Delta\mathbf{U}^e+2\Delta\mathbf{B}^{(N)}\Delta\mathbf{U}^e\right\} \tag{3.4}$$

ここに，$\mathbf{D}$は弾性マトリックス。(3.4)式を(3.2)式に代入し，次式の関係

$$2\int_{\Omega^e}\Delta\mathbf{B}^{(N)^T}\boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_d\mathbf{S}_0\mathbf{B}_d d\Omega \tag{3.5}$$

ここで，

$$\begin{gathered}
\mathbf{S}_0=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_0\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_0=\begin{bmatrix}\sigma_{x0} & & \mathrm{Sym.}\\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} & \\ \tau_{zx0} & \tau_{yz0} & \sigma_{z0}\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{\sigma}_0{}^T=\left\{\sigma_{x0}\quad\sigma_{y0}\quad\sigma_{z0}\quad\tau_{xy0}\quad\tau_{yz0}\quad\tau_{zx0}\right\}
\end{gathered}\tag{3.6}$$

を用いると，(3.2)式は次のように表せる。

$$\left(\mathbf{k}^{(L)}+\mathbf{k}_0{}^{(u)}+\mathbf{k}_0{}^{(\sigma)}\right)\Delta\mathbf{U}^e=\Delta\mathbf{f}_b+\Delta\mathbf{f}_t+\mathbf{R}_0+\mathbf{Q}_\sigma \tag{3.7}$$

ここに，

$$\mathbf{k}^{(L)}=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^{(L)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)}d\Omega \tag{3.8}$$

$$\mathbf{k}_0^{(u)}=2\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)}d\Omega+2\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^{(L)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}d\Omega+4\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}d\Omega \tag{3.9}$$

$$\mathbf{k}_0^{(\sigma)}=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_d{}^T\mathbf{S}_0\mathbf{B}_d\,d\Omega\,. \tag{3.10}$$

ここで，$\mathbf{k}^{(L)}$ は微小変位に対する剛性マトリックス，$\mathbf{k}_0^{(u)}$ は初期変位剛性マトリックス，$\mathbf{k}_0^{(\sigma)}$ は初期応力剛性マトリックスである。

4　面内変形要素の剛性マトリックス

平面シェル要素の面内変形に対する要素として，図 4.1 に示すアイソパラメトリック要素を用いる。この場合，(2.1)式は次のように表される。

$$\mathbf{u}=\mathbf{N}\mathbf{U}^e \tag{4.1}$$

ここに，

$$\mathbf{u}^T=\{u_x \quad u_y\}$$

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{N}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{N}}\end{bmatrix},\qquad \bar{\mathbf{N}}=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3 & N_4\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{U}^e=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_x\\ \mathbf{u}_y\end{Bmatrix},\qquad \begin{aligned}\mathbf{u}_x{}^T&=\{u_{x1} \quad u_{x2} \quad u_{x3} \quad u_{x4}\}\\ \mathbf{u}_y{}^T&=\{u_{y1} \quad u_{y2} \quad u_{y3} \quad u_{y4}\}\end{aligned}$$

また，

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),\quad N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),\quad N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),\quad N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{4.3}$$

このとき，(1.8)式の変位勾配は次のようになる。

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{U}^e,\quad \frac{\partial u_x}{\partial y}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{U}^e,\quad \frac{\partial u_y}{\partial x}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\end{bmatrix}\mathbf{U}^e,\quad \frac{\partial u_y}{\partial y}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\end{bmatrix}\mathbf{U}^e \tag{4.4}$$

したがって，(2.2)式は次のように表される。

$$\mathbf{d}=\mathbf{B}_d\mathbf{U}^e \tag{4.5}$$

ここに，

$$\mathbf{d}^T = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \right\}, \qquad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

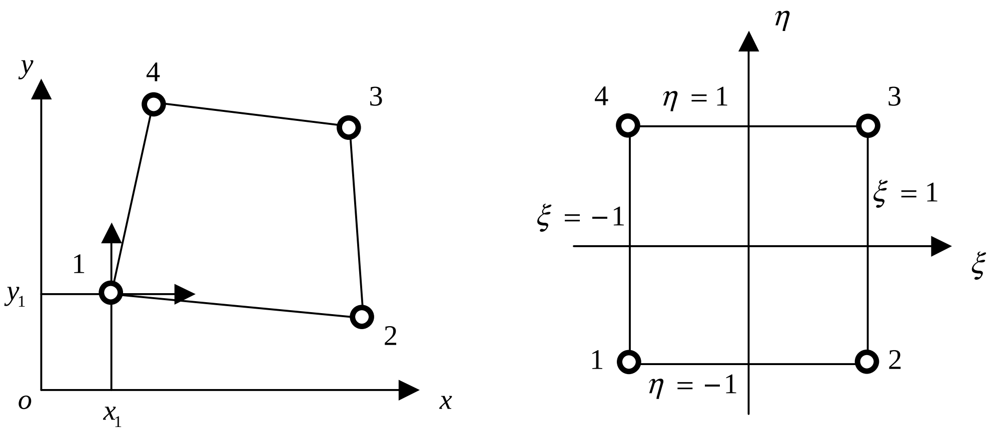

図 4.1　４節点アイソパラメトリック平面要素

アイソパラメトリック要素では，要素内の座標も節点の座標値を用いて次式のように表される。

$$x = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{x}, \qquad y = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{y} \tag{4.7}$$

ここに，

$$\mathbf{x}^T = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}, \qquad \mathbf{y}^T = \{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4\} \tag{4.8}$$

また， x, y に関する１階の偏微分次式から求められる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{4.10}$$

(4.7)式より，ヤコビアンマトリックス $\mathbf{J}$ および $\mathbf{J}^{-1}$ は次式のように計算される。

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi}\mathbf{x} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi}\mathbf{y}\\ \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta}\mathbf{x} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta}\mathbf{y}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{J}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{J}|}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta}\mathbf{y} & -\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi}\mathbf{y}\\ -\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta}\mathbf{x} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi}\mathbf{x}\end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$|\mathbf{J}|=\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi}\mathbf{x}\cdot\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta}\mathbf{y}-\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi}\mathbf{y}\cdot\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta}\mathbf{x} \tag{4.12}$$

ここに，$|\mathbf{J}|$ は $\mathbf{J}$ の行列式，また，(4.3)式より，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi}&=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{1}{4}(1+\eta) & -\frac{1}{4}(1+\eta)\end{bmatrix}\\ \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta}&=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}(1-\xi) & -\frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.13}$$

となる。したがって，

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\end{Bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta}\end{Bmatrix} \tag{4.14}$$

(3.8)式，(3.10)式より，弾性剛性マトリックスと初期応力マトリックスは次式より求められる。

$$\mathbf{k}^{(L)}=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^{(L)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)}d\Omega=\int_{\Omega^e}\left(\boldsymbol{\chi}^{(L)}\mathbf{B}_d\right)^T\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\chi}^{(L)}\mathbf{B}_d\right)d\Omega \tag{4.15}$$

$$\mathbf{k}_0^{(\sigma)}=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_d{}^T\mathbf{S}_0\mathbf{B}_d\,d\Omega\,. \tag{4.16}$$

$$\mathbf{k}_0^{(u)}=2\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)}d\Omega+2\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^{(L)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}d\Omega+4\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}d\Omega \tag{4.17}$$

ここに，

$$\boldsymbol{\chi}^{(L)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}^{(L)}=\boldsymbol{\chi}^{(L)}\mathbf{B}_d=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{B}_0^{(N)}=(1/2)\boldsymbol{\chi}_0^{(N)}\mathbf{B}_d$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0} & \mathbf{0} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{x0} & \mathbf{0} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}\\ \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{x0} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{y0} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0}\\ \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\\ \mathbf{0} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\\ +\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & +\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}\dfrac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\end{bmatrix} \tag{4.19}$$

ただし，$\mathbf{u}_{x0}, \mathbf{u}_{y0}$ は前ステップの変位ベクトルである。また，平面応力問題では，$\mathbf{D}, \mathbf{S}_0$ は次のようになる。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & & & \text{Sym.} \\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} & & \\ 0 & 0 & \sigma_{x0} & \\ 0 & 0 & \tau_{xy0} & \sigma_{y0} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

プログラミング上の計算効率を上げるために，(4.15)-(4.17)式の被積分項を計算する。

$$\left(\boldsymbol{\chi}^{(L)}\mathbf{B}_d\right)^T \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\chi}^{(L)}\mathbf{B}_d\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} & \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & D_{12}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ D_{21}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & D_{22}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} D_{11}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & D_{12}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ D_{21}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & D_{22}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$\mathbf{B}_d{}^T\mathbf{S}_0\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & \tau_{xy0} & 0 & 0 \\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{x0} & \tau_{xy0} \\ 0 & 0 & \tau_{xy0} & \sigma_{y0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_0{}^{(\sigma)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}}_0{}^{(\sigma)} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$\bar{\mathbf{k}}_0{}^{(\sigma)} = \sigma_{x0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + \tau_{xy0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} + \tau_{xy0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} + \sigma_{y0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}$$

$$\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & D_{12}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ D_{21}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & D_{22}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

$$
\mathbf{B}^{(L)T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} D_{11}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} & D_{21}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} & D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} \\ D_{12}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} & D_{22}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} & D_{33}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \\ +\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & +\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{4.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_0^{(N)T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)} = \frac{1}{4}&\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x} \end{bmatrix} \\
\times&\begin{bmatrix} D_{11}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}+D_{12}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & D_{11}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}+D_{12}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ D_{21}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}+D_{22}\mathbf{u}_{x0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & D_{21}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}+D_{22}\mathbf{u}_{y0}{}^T\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial y}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ D_{33}\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right) & D_{33}\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

ただし，$D_{11} \sim D_{33}$ は $\mathbf{D}$ マトリックスの成分である。

(4.15)式，(4.16)式を数値積分（ガウス積分）によって計算する場合，次式となる。

$$
\mathbf{k}^{(L)} = t\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left(\boldsymbol{\chi}^{(L)}\mathbf{B}_d\left(\xi_p,\eta_q\right)\right)^T\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\chi}^{(L)}\mathbf{B}_d\left(\xi_p,\eta_q\right)\right)|\mathbf{J}|w_p w_q \tag{4.27}
$$

$$
\mathbf{k}_0^{(\sigma)} = t\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\mathbf{B}_d\left(\xi_p,\eta_q\right)^T\mathbf{S}_0\mathbf{B}_d\left(\xi_p,\eta_q\right)|\mathbf{J}|w_p w_q \tag{4.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_0^{(u)} &= 2t\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\mathbf{B}_0^{(N)}\left(\xi_p,\eta_q\right)^T\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)}\left(\xi_p,\eta_q\right)|\mathbf{J}|w_p w_q \\
&+2t\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\mathbf{B}^{(L)}\left(\xi_p,\eta_q\right)^T\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}\left(\xi_p,\eta_q\right)|\mathbf{J}|w_p w_q \\
&+4t\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\mathbf{B}_0^{(N)}\left(\xi_p,\eta_q\right)^T\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}\left(\xi_p,\eta_q\right)|\mathbf{J}|w_p w_q
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

ここに，t は板厚，n はガウス積分点数で，ここでは 2 でよい。ξ_p,η_q は，ガウス積分の ξ,η 方向の選点の値，w_p,w_q は重み係数値で，2 点積分の場合次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \eta_1 = -0.57735026918963 \\
\xi_2 &= \eta_2 = 0.57735026918963 \\
w_1 &= w_2 = 1
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

また，応力の増分値は(3.4)式から求められる。すなわち，

$$
\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\left(\mathbf{B}^{(L)}+2\mathbf{B}^{(N)}\right)\Delta\mathbf{U}^e \tag{4.31}
$$

また，$\mathbf{D}$ は(4.20)式，$\mathbf{B}^{(L)}$ は(4.18)式，$\mathbf{B}^{(N)}$ は(4.19)式の変位を更新後のものにすることによって求

められる。

5　曲げ変形要素の剛性マトリックス

図 5.1 に示すような座標系のもとで，板中央面の z 軸方向変位を w とし，Kirchhoff の仮定が成り立つとすると，板曲げ問題における板の任意点の変位 u_x, u_y, u_z は次式のように仮定できる。

$$u_x = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x},\quad u_y = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y},\quad u_z = w(x,y) \tag{5.1}$$

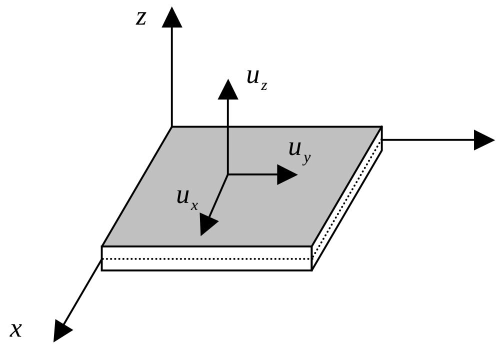

図 5.1　板の座標系と変位

上式を(1.3)式の歪ー変位関係式に代入すると，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left\{z^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + z^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\} \\
\varepsilon_y &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left\{z^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + z^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} \\
\gamma_{xy} &= -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + z^2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{yz} &= z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{zx} &= z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} + z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

von Kármán の理論では，非線形項は $\partial w/\partial x, \partial w/\partial y$ の項のみを残し，その他の非線形項は 0 とする。したがって，この理論によれば(5.2)式は次のように簡略化される。

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_y &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\
\gamma_{xy} &= -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

この場合，非線形項に関する変位勾配 $\mathbf{d}$ は次のようになる。

$$
\mathbf{d}^T = \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \tag{5.4}
$$

ここでは，図 5.2 に示すような 4 節点非適合板曲げ要素を考える。正規化された座標系 ξ,η のもとで，要素内のたわみ分布を次式で仮定する。

$$
w = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi\eta^3 + \alpha_{12}\xi^3\eta \tag{5.5}
$$

各節点の自由度をたわみ w と，ξ,η 軸まわりの回転角 θ_ξ,θ_η の 3 自由度とし，正規化された座標で補間関数を求めると，次式のようになる。

$$
w = \bar{\mathbf{N}}^b \bar{\mathbf{w}} \tag{5.6}
$$

ここに，

$$
\bar{\mathbf{N}}^b = \left[\bar{N}_1^b \quad \bar{N}_2^b \quad \bar{N}_3^b \quad \bar{N}_4^b \quad \bar{N}_5^b \quad \bar{N}_6^b \quad \bar{N}_7^b \quad \bar{N}_8^b \quad \bar{N}_9^b \quad \bar{N}_{10}^b \quad \bar{N}_{11}^b \quad \bar{N}_{12}^b \right] \tag{5.7}
$$

$$
\bar{\mathbf{w}}^T = \left[w_1 \quad \theta_{\xi 1} \quad \theta_{\eta 1} \quad w_2 \quad \theta_{\xi 2} \quad \theta_{\eta 2} \quad w_3 \quad \theta_{\xi 3} \quad \theta_{\eta 3} \quad w_4 \quad \theta_{\xi 4} \quad \theta_{\eta 4} \right] \tag{5.8}
$$

ただし，

$$
\theta_\xi = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \qquad \theta_\eta = -\frac{\partial w}{\partial \xi} \tag{5.9}
$$

なお，回転角は座標の正方向に右ねじまわりを正としている。

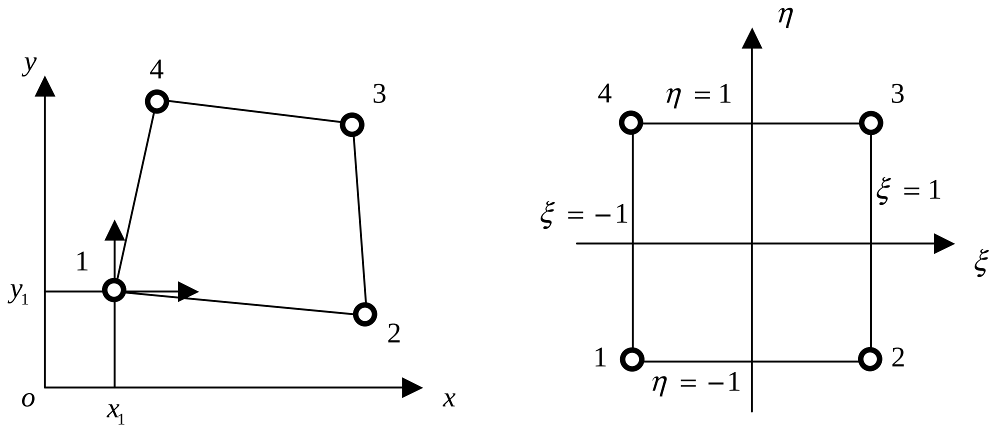

図 5.1　4 節点非適合板曲げ要素

また，(5.7)式の $\bar{N}_1^b \sim \bar{N}_{12}^b$ は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\bar{N}_1^b = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)\left(2-\xi-\eta-\xi^2-\eta^2\right) && \bar{N}_7^b = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)\left(2+\xi+\eta-\xi^2-\eta^2\right) \\
&\bar{N}_2^b = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)^2(1+\eta) && \bar{N}_8^b = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)^2(1-\eta) \\
&\bar{N}_3^b = -\frac{1}{8}(1-\xi)^2(1+\xi)(1-\eta) && \bar{N}_9^b = \frac{1}{8}(1+\xi)^2(1-\xi)(1+\eta) \\
&\bar{N}_4^b = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)\left(2+\xi-\eta-\xi^2-\eta^2\right) && \bar{N}_{10}^b = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)\left(2-\xi+\eta-\xi^2-\eta^2\right) \\
&\bar{N}_5^b = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)^2(1+\eta) && \bar{N}_{11}^b = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)^2(1-\eta) \\
&\bar{N}_6^b = \frac{1}{8}(1+\xi)^2(1-\xi)(1-\eta) && \bar{N}_{12}^b = -\frac{1}{8}(1-\xi)^2(1+\xi)(1+\eta)
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

(4.7)式と同様に，要素の x, y 座標は，節点の座標値を用いて次式のように表す。

$$
x = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{x}, \qquad y = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{y} \tag{5.11}
$$

ここに，

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mathbf{N}} = \left[N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\right] \\
&\mathbf{x}^T = \left\{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\right\}, \qquad \mathbf{y}^T = \left\{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4\right\}
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

ただし，

$$
N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{5.13}
$$

また，x, y に関する１階の偏微分次式から求められる。

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{5.14}
$$

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{5.15}
$$

(5.11)式より，ヤコビアンマトリックス $\mathbf{J}$ および $\mathbf{J}^{-1}$ は次式のように計算される。

$$
\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{x} & \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{y} \\ \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{x} & \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{y} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{y} & -\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{y} \\ -\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{x} & \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{x} \end{bmatrix} \tag{5.16}
$$

$$
|\mathbf{J}| = \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{x} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{y} - \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{y} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{x} \tag{5.17}
$$

ここに，$|\mathbf{J}|$ は $\mathbf{J}$ の行列式，また，(5.13)式より，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} &= \left[-\frac{1}{4}(1-\eta) \quad \frac{1}{4}(1-\eta) \quad \frac{1}{4}(1+\eta) \quad -\frac{1}{4}(1+\eta) \right] \\
\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta} &= \left[-\frac{1}{4}(1-\xi) \quad -\frac{1}{4}(1+\xi) \quad \frac{1}{4}(1+\xi) \quad \frac{1}{4}(1-\xi) \right]
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

となる。

(5.14)式より，(5.9)式は,

$$
\begin{aligned}
\theta_\xi &= \frac{\partial w}{\partial \eta} = -J_{21}\left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + J_{22}\frac{\partial w}{\partial y} = -J_{21}\theta_y + J_{22}\theta_x \\
\theta_\eta &= -\frac{\partial w}{\partial \xi} = J_{11}\left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) - J_{12}\frac{\partial w}{\partial y} = J_{11}\theta_y - J_{12}\theta_x
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

したがって，ξ,η 座標系で定義された変位ベクトル $\bar{\mathbf{w}}$ は次式によって x, y 座標系の変位ベクトル $\mathbf{U}^e$ に変換される。

$$
\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{t}^R \mathbf{U}^e \tag{5.20}
$$

ここに,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{t}^R = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^R & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{t}}^R & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{t}}^R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{t}}^R \end{bmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{t}}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & -J_{21} \\ 0 & -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} \\
&\mathbf{U}^e = \left[w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \right]
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

したがって，(5.6)式は,

$$
w = \bar{\mathbf{N}}^b \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{N}}^b \mathbf{t}^R \mathbf{U}^e = \mathbf{N}^b \mathbf{U}^e \tag{5.22}
$$

となる。ここに,

$$
\mathbf{N}^b = \bar{\mathbf{N}}^b \mathbf{t}^R = \left[\bar{\mathbf{N}}_1^b \bar{\mathbf{t}}^R \quad \bar{\mathbf{N}}_2^b \bar{\mathbf{t}}^R \quad \bar{\mathbf{N}}_3^b \bar{\mathbf{t}}^R \quad \bar{\mathbf{N}}_4^b \bar{\mathbf{t}}^R \right] \tag{5.23}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{N}}_1^b \bar{\mathbf{t}}^R &= \left[N_1^b \quad N_2^b \quad N_3^b \right] \bar{\mathbf{t}}^R = \left[N_1^b \quad J_{22}N_2^b - J_{12}N_3^b \quad -J_{21}N_2^b + J_{11}N_3^b \right] \\
\bar{\mathbf{N}}_2^b \bar{\mathbf{t}}^R &= \left[N_4^b \quad N_5^b \quad N_6^b \right] \bar{\mathbf{t}}^R = \left[N_4^b \quad J_{22}N_5^b - J_{12}N_6^b \quad -J_{21}N_5^b + J_{11}N_6^b \right] \\
\bar{\mathbf{N}}_3^b \bar{\mathbf{t}}^R &= \left[N_7^b \quad N_8^b \quad N_9^b \right] \bar{\mathbf{t}}^R = \left[N_7^b \quad J_{22}N_8^b - J_{12}N_9^b \quad -J_{21}N_8^b + J_{11}N_9^b \right] \\
\bar{\mathbf{N}}_4^b \bar{\mathbf{t}}^R &= \left[N_{10}^b \quad N_{11}^b \quad N_{12}^b \right] \bar{\mathbf{t}}^R = \left[N_{10}^b \quad J_{22}N_{11}^b - J_{12}N_{12}^b \quad -J_{21}N_{11}^b + J_{11}N_{12}^b \right]
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

(5.22)式を歪ー変位関係式(5.3)の線形成分に代入すると，(2.4)式で定義される線形の歪マトリックス $\mathbf{B}^{(L)}$ は次式となる。

$$
\mathbf{B}^{(L)} = \begin{bmatrix} -z\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^b}{\partial x^2} \\ -z\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^b}{\partial y^2} \\ -2z\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^b}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{5.25}
$$

したがって，(3.8)式の弾性剛性マトリックスは次式から求められる。

$$\mathbf{k}^{(L)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{(L)T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)} d\Omega \tag{5.26}$$

ただし， $\mathbf{D}$ は平面応力状態の式

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

が用いられる。

(5.26)式の被積分項を計算すると，

$$\mathbf{B}^{(L)T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)} = \begin{bmatrix} -z\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^{bT}}{\partial x^2} & -z\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^{bT}}{\partial y^2} & -2z\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^{bT}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z\left(D_{11}\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial x^2} + D_{12}\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial y^2} \right) \\ -z\left(D_{21}\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial x^2} + D_{22}\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial y^2} \right) \\ -2zD_{33}\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$= z^2\left(D_{11}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{bT}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{bT}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial y^2} + D_{21}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{bT}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{bT}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial y^2} + 4D_{33}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{bT}}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{b}}{\partial x \partial y} \right) \tag{5.28}$$

ただし， $D_{11} \sim D_{33}$ は $\mathbf{D}$ マトリックスの成分である。なお， x, y に関する 2 階微分の計算法に関しては，付録 A 参照。

また，板厚を t とし， $[-t/2, t/2]$ の区間で z 方向の積分を解析的に行い， x, y 方向に関しては，ガウスの 2 点積分を行うと，

$$\mathbf{k}^{(L)} = \frac{t^3}{12}\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}\mathbf{B}^{(L)}(\xi_p, \eta_q)^T \mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)}(\xi_p, \eta_q)|\mathbf{J}| w_p w_q \tag{5.29}$$

一方，(5.4)式より，

$$\mathbf{d}^T = \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \tag{5.30}$$

であるから，(5.22)式を代入すると，

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{U}^e = \mathbf{B}_d \mathbf{U}^e \tag{5.31}$$

したがって，(3.10)式の初期応力マトリックスは，

$$\mathbf{k}_0^{(\sigma)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_d{}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{B}_d d\Omega \tag{5.32}$$

ただし，

$$
\mathbf{B}_d{}^T\mathbf{S}_0\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & \tau_{xy0} \\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y} \end{bmatrix}
$$

$$
= \sigma_{x0}\frac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} + \tau_{xy0}\frac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y} + \tau_{xy0}\frac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} + \sigma_{y0}\frac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y} \tag{5.33}
$$

上式の微分の計算は次式により行うことができる。

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{5.34}
$$

なお，$\bar{\mathbf{N}}^b$ の ξ,η に関する微分は付録 B 参照。

(5.33)式を(5.32)式に代入して，ガウス積分を行うと，

$$
\mathbf{k}_0^{(\sigma)} = \frac{t}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}\mathbf{B}_d\left(\xi_p,\eta_q\right)^T\mathbf{S}_0\left(\xi_p,\eta_q,\zeta_r\right)\mathbf{B}_d\left(\xi_p,\eta_q\right)|\mathbf{J}|w_p w_q w_r \tag{5.35}
$$

ただし，$z=(t/2)\zeta$ である。なお，積分点数は面内変形問題と合わせるために 2 点積分とする。

また，初期変位マトリックスは，

$$
\mathbf{k}_0^{(u)} = 2\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)}d\Omega + 2\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^{(L)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}d\Omega + 4\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}d\Omega \tag{5.36}
$$

であり，

$$
\mathbf{B}_0^{(N)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\chi}_0^{(N)}\mathbf{B}_d = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x}\mathbf{U}_0^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y}\mathbf{U}_0^e \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y}\mathbf{U}_0^e & \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x}\mathbf{U}_0^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x}\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y}\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y}\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x}\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{5.37}
$$

ただし，$\mathbf{U}_0^e$ は前ステップの変位ベクトルである。この場合，$\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)}d\Omega$, $\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^{(L)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}d\Omega$ は z 軸方向の積分で 0 となる。また，

$$
\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial x}\mathbf{U}_0^{eT}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial y}\mathbf{U}_0^{eT}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial y} & \begin{matrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial x}\mathbf{U}_0^{eT}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial y} \\ +\dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial y}\mathbf{U}_0^{eT}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{bT}}{\partial x} \end{matrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{11}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x}\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} + D_{12}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y}\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y} \\ D_{21}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x}\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} + D_{22}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y}\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y} \\ D_{33}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y}\left(\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x}\mathbf{U}_0^e\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \tag{5.38}
$$

となる。(5.38)-(5.40)式を(5.36)式に代入して，z に関して積分すると次式となる。

$$\mathbf{k}_0^{(u)} = 4t\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\left(\xi_p,\eta_q\right)\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}\left(\xi_p,\eta_q\right)\left|\mathbf{J}\right|w_p w_q \tag{5.39}$$

(5.29), (5.35), (5,39)式の積分点と重みは次の通りである。

$$\begin{aligned}&\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = -0.57735026918963\\&\xi_2 = \eta_2 = \zeta_2 = 0.57735026918963\\&w_1 = w_2 = 1\end{aligned} \tag{5.40}$$

また，応力の増分値は(3.4)式から求められる。すなわち，

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\left(\mathbf{B}^{(L)} + 2\mathbf{B}^{(N)}\right)\Delta\mathbf{U}^e \tag{5.41}$$

ここに， $\mathbf{D}$ は(5.27)式， $\mathbf{B}^{(L)}$ は(5.25)式， $\mathbf{B}^{(N)}$ は(5.37)式の変位を更新後のものにすることによって求められる。

6　平面シェル要素の剛性マトリックス

板曲げ問題に von Kármán の理論を適用すると，(1.4)式と(5.3)式により平面シェル要素のひずみ－変位関係は次のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\end{aligned} \tag{6.1}$$

ただし，ここでは面内変形のみの大変形解析を行う場合も考慮して面内変形時の u_x, u_y の非線形項を残している。

まず，(6.1)式から得られる線形の剛性マトリックスは面内変形と板曲げ変形で連成しないので，それぞれ(4.15)式および(5.29)式で求められた要素剛性マトリックスを以下の自由度に対応するように組み合わせる。

$$\mathbf{U}^{eT} = \left\{u_{x1}\ u_{y1}\ u_{z1}\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ \theta_{z1}\ u_{x2}\ u_{y2}\ u_{y3}\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ \theta_{z2}\ u_{x3}\ u_{y3}\ u_{z3}\ \theta_{x3}\ \theta_{y3}\ \theta_{z3}\ u_{x4}\ u_{y4}\ u_{z4}\ \theta_{x4}\ \theta_{y4}\ \theta_{z4}\right\}$$

また， z 軸まわりのねじり変形に対しては，Zienkiewicz らが提案している次式の仮想剛性を付加する。

$$\begin{Bmatrix}M_{z1}\\M_{z2}\\M_{z3}\\M_{z4}\end{Bmatrix} = \alpha EtA\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_{z1}\\\theta_{z2}\\\theta_{z3}\\\theta_{z4}\end{Bmatrix} = \mathbf{k}^{(L)t}\boldsymbol{\theta}_z \tag{6.2}$$

以上のようにして，24×24 の線形の要素剛性マトリックス$\mathbf{k}^{(L)}$を作ることができる。

初期応力マトリックスに関しては，(6.1)式のひずみに対して(1.8)式の変位勾配ベクトル$\mathbf{d}$が次式で定義される。

$$\mathbf{d}^T = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \tag{6.3}$$

(4.6)式，(5.31)式より，

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}_d \mathbf{U}^e \tag{6.4}$$

ここに，

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &\mathbf{U}^{eT} = \left\{ \mathbf{u}_x{}^T \quad \mathbf{u}_y{}^T \quad \mathbf{u}_z{}^T \right\} \\ &\mathbf{u}_x{}^T = \left\{ u_{x1} \quad u_{x2} \quad u_{x3} \quad u_{x4} \right\}, \quad \mathbf{u}_y{}^T = \left\{ u_{y1} \quad u_{y2} \quad u_{y3} \quad u_{y4} \right\} \\ &\mathbf{u}_z{}^T = \left\{ w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \right\} \end{aligned} \tag{6.5}$$

また，(3.6)式より

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & & & & \text{Sym.} & \\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} & & & & \\ 0 & 0 & \sigma_{x0} & & & \\ 0 & 0 & \tau_{xy0} & \sigma_{y0} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x0} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{xy0} & \sigma_{y0} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

したがって，(6.4)式と(6.6)式により初期応力マトリックスは次式から求められる。

$$\mathbf{k}_0^{(\sigma)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_d{}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{B}_d \, d\Omega \tag{6.7}$$

この場合，(6.6)式の$\mathbf{S}_0$の性格上初期応力マトリックスも面内変形と板曲げ変形で別々に計算することができる。したがって，初期応力マトリックスは(4.28)式および(5.35)式で計算したものを線形の剛性マトリックスと同様に自由度に対応して組み合わせればよい。ただし，応力は共通のものを用いる必要があるため，応力成分は(4.31)式と(5.41)式で計算されたものを足し合わせる。以上のようにして初期応力マトリックス$\mathbf{k}^{\sigma}$が求められる。

次に，初期変位マトリックスに関しては，(6.1)式と(1.10)式より

$$
\boldsymbol{\chi}^{(N)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 & 2\frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 & 2\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{6.8}
$$

となるので，(4.19)式および(5.37)式より

$$
\mathbf{B}_0^{(N)}=(1/2)\boldsymbol{\chi}_0^{(N)}\mathbf{B}_d=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0} & \mathbf{0} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0} & \mathbf{0} & \frac{\partial\mathbf{N}^b}{\partial x}\mathbf{U}_0^e & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{x0} & \mathbf{0} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{y0} & 0 & \frac{\partial\mathbf{N}^b}{\partial y}\mathbf{U}_0^e \\ \mathbf{0} & 2\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0} & \mathbf{0} & 2\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0} & 0 & 2\frac{\partial\mathbf{N}^b}{\partial x}\mathbf{U}_0^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial\mathbf{N}^b}{\partial x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial\mathbf{N}^b}{\partial y} \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{U}_0^{eT}\frac{\partial\mathbf{N}^{bT}}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{N}^b}{\partial x} \\ \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{x0}\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y}\mathbf{u}_{y0}\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \mathbf{U}_0^{eT}\frac{\partial\mathbf{N}^{bT}}{\partial y}\frac{\partial\mathbf{N}^b}{\partial y} \\ 2\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{x0}\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & 2\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x}\mathbf{u}_{y0}\frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & 2\mathbf{U}_0^{eT}\frac{\partial\mathbf{N}^{bT}}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{N}^b}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.9}
$$

また，(4.18)式と(5.25)式より，

$$
\mathbf{B}^{(L)}=\begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & \mathbf{0} & -z\frac{\partial^2\mathbf{N}^b}{\partial x^2} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & -z\frac{\partial^2\mathbf{N}^b}{\partial y^2} \\ \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & \frac{\partial\bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & -2z\frac{\partial^2\mathbf{N}^b}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.10}
$$

したがって，初期変位マトリックスは，(6.9)式，(6.10)式を次式に代入することによって計算される。

$$
\mathbf{k}_0^{(u)}=2\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)}d\Omega+2\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^{(L)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}d\Omega+4\int_{\Omega^e}\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)}d\Omega \tag{6.11}
$$

ここで，(6.9)式，(6.10)式を次のように書く。

$$
\mathbf{B}_0^{(N)}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_0^{(N)p} & \mathbf{B}_0^{(N)b}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}^{(L)}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}^{(L)p} & \mathbf{B}^{(L)b}\end{bmatrix} \tag{6.12}
$$

ここに，上添字 p は面内変形に対応するもの，b は板曲げ変形に対応するものを示す。(6.12)式を用いて(6.11)式の被積分項を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^{(N)p^T} \\ \mathbf{B}_0^{(N)b^T} \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(L)p} & \mathbf{B}^{(L)b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^{(N)p^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)p} & \mathbf{B}_0^{(N)p^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)b} \\ \mathbf{B}_0^{(N)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)p} & \mathbf{B}_0^{(N)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)b} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}^{(L)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(L)p^T} \\ \mathbf{B}^{(L)b^T} \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^{(N)p} & \mathbf{B}_0^{(N)b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(L)p^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)p} & \mathbf{B}^{(L)p^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)b} \\ \mathbf{B}^{(L)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)p} & \mathbf{B}^{(L)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)b} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)} &== \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^{(N)p^T} \\ \mathbf{B}_0^{(N)b^T} \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^{(N)p} & \mathbf{B}_0^{(N)b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^{(N)p^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)p} & \mathbf{B}_0^{(N)p^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)b} \\ \mathbf{B}_0^{(N)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)p} & \mathbf{B}_0^{(N)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)b} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

上式からわかるようにこの場合は，面内変形と板曲げ変形に関する連成項が存在する。ただし，板曲げと面内変形が連成する場合は von Kármán の理論より，

$$
\mathbf{B}_0^{(N)p} = \mathbf{0} \tag{6.14}
$$

と仮定できるので，結局(6.13)式は

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_0^{(N)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)p} & \mathbf{B}_0^{(N)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)b} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}^{(L)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^{(L)p^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{(L)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)b} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_0^{(N)^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)} &== \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_0^{(N)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}_0^{(N)b} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

となり，計算の必要な連成項の被積分項は，$\mathbf{B}_0^{(N)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)p}$ とその転置行列である。(4.22)式と(5.37)式よりこの項は

$$
\mathbf{B}_0^{(N)b^T}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(L)p} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b^T}}{\partial x}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x}\mathbf{U}_0^e & \dfrac{\partial \mathbf{N}^{b^T}}{\partial y}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial y}\mathbf{U}_0^e & 2\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b^T}}{\partial y}\dfrac{\partial \mathbf{N}^{b}}{\partial x}\mathbf{U}_0^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & D_{12}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ D_{21}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} & D_{22}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} \\ D_{33}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial y} & D_{33}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{6.16}
$$

から計算される。

7　座標変換

図 7.1 に示すように，全体座標系を $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$，局所座標系を x, y, z とする。各辺の中心を結ぶ 2 つの線の交点を局所座標系の原点にとり，辺 14 の中点から辺 23 の中点に向かう方向を x 軸とする。要素面内で x 軸と垂直に y 軸を定め，x, y 軸と右手系をなすように z 軸を定める。

以上の定義にしたがい座標変換マトリックスを導出する。全体座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ の単位ベクトル $\bar{\mathbf{e}} = \left\{ \mathrm{e}_{\bar{x}}, \mathrm{e}_{\bar{y}}, \mathrm{e}_{\bar{z}} \right\}^T$ と，局所座標系 (x, y, z) の単位ベクトル $\mathbf{e} = \left\{ \mathrm{e}_x, \mathrm{e}_y, \mathrm{e}_z \right\}^T$ の関係は次式で表される。

$$\mathbf{e} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{e}} \tag{7.1}$$

ここに，

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{x\bar{x}} & l_{x\bar{y}} & l_{x\bar{z}} \\ l_{y\bar{x}} & l_{y\bar{y}} & l_{y\bar{z}} \\ l_{z\bar{x}} & l_{z\bar{y}} & l_{z\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x{}^T \\ \mathbf{L}_x{}^T \\ \mathbf{L}_x{}^T \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

$\mathbf{L}$ は，座標変換マトリックスと呼ばれ，$(l_{x\bar{x}}, l_{x\bar{y}}, l_{x\bar{z}})$ は局所 x 座標の全体 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 座標への方向余弦である。$(l_{y\bar{x}}, l_{y\bar{y}}, l_{y\bar{z}}), (l_{z\bar{x}}, l_{z\bar{y}}, l_{z\bar{z}})$ も同様であり，(7.2)式は次式のようにも書ける。

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{e}_x, \mathrm{e}_{\bar{x}}) & \cos(\mathrm{e}_x, \mathrm{e}_{\bar{y}}) & \cos(\mathrm{e}_x, \mathrm{e}_{\bar{z}}) \\ \cos(\mathrm{e}_y, \mathrm{e}_{\bar{x}}) & \cos(\mathrm{e}_y, \mathrm{e}_{\bar{y}}) & \cos(\mathrm{e}_y, \mathrm{e}_{\bar{z}}) \\ \cos(\mathrm{e}_z, \mathrm{e}_{\bar{x}}) & \cos(\mathrm{e}_z, \mathrm{e}_{\bar{y}}) & \cos(\mathrm{e}_z, \mathrm{e}_{\bar{z}}) \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

ここに，$(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_{\bar{j}})$ は，ベクトル e_i とベクトル $\mathrm{e}_{\bar{j}}$ の間の角度を表す。

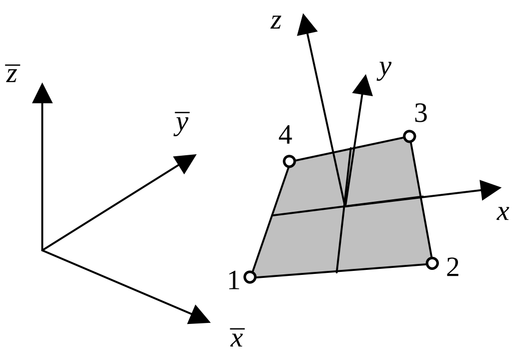

図 7.1　平面シェル要素の局所座標系と全体座標系

要素各辺の中点の座標は次式から求められる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}^c_{12} \\ \bar{y}^c_{12} \\ \bar{z}^c_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{x}^c_{23} \\ \bar{y}^c_{23} \\ \bar{z}^c_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) \\ \frac{1}{2}(\bar{y}_2 + \bar{y}_3) \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{x}^c_{43} \\ \bar{y}^c_{43} \\ \bar{z}^c_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\bar{x}_3 + \bar{x}_4) \\ \frac{1}{2}(\bar{y}_3 + \bar{y}_4) \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_3 + \bar{z}_4) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{x}^c_{14} \\ \bar{y}^c_{14} \\ \bar{z}^c_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_4) \\ \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_4) \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_1 + \bar{z}_4) \end{Bmatrix} \tag{7.4}$$

辺 14 と辺 23 の中点を結ぶ方向に定義される x 軸の方向余弦ベクトル $\mathbf{L}_x$ は次式から求められる。

$$\mathbf{L}_x = \mathbf{A} / |\mathbf{A}| \tag{7.5}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \left\{ \left(\bar{x}^c_{23} - \bar{x}^c_{14}\right) \quad \left(\bar{y}^c_{23} - \bar{y}^c_{14}\right) \quad \left(\bar{z}^c_{23} - \bar{z}^c_{14}\right) \right\} \\ |\mathbf{A}| &= \sqrt{\left(\bar{x}^c_{23} - \bar{x}^c_{14}\right)^2 + \left(\bar{y}^c_{23} - \bar{y}^c_{14}\right)^2 + \left(\bar{z}^c_{23} - \bar{z}^c_{14}\right)^2} \end{aligned} \tag{7.6}$$

つぎに，z 軸の方向余弦ベクトル $\mathbf{L}_z$ は次式から求められる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_z &= \mathbf{A}\times\mathbf{B}/2S_1 \\
&= \left\{ \left(A_2\cdot B_3 - B_2\cdot A_3\right) \quad \left(A_3\cdot B_1 - B_3\cdot A_1\right) \quad \left(A_1\cdot B_2 - B_1\cdot A_2\right) \right\}^T / 2S_1
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}^T &= \left\{ \left(\bar{x}_{43}^c - \bar{x}_{12}^c\right) \quad \left(\bar{y}_{43}^c - \bar{y}_{12}^c\right) \quad \left(\bar{z}_{43}^c - \bar{z}_{12}^c\right) \right\} \\
2S_1 &= \sqrt{\left(A_2\cdot B_3 - B_2\cdot A_3\right)^2 + \left(A_3\cdot B_1 - B_3\cdot A_1\right)^2 + \left(A_1\cdot B_2 - B_1\cdot A_2\right)^2}
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

ただし， A_1, A_2, A_3 および B_1, B_2, B_3 は，ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の成分である。

最後に， y 軸の方向余弦ベクトル $\mathbf{L}_y$ は次式から求められる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_y &= \mathbf{L}_z \times \mathbf{L}_x \\
&= \left\{ \left(L_{z2}\cdot L_{x3} - L_{x2}\cdot L_{z3}\right) \quad \left(L_{z3}\cdot L_{x1} - L_{x3}\cdot L_{z1}\right) \quad \left(L_{z1}\cdot L_{x2} - L_{x1}\cdot L_{z2}\right) \right\}^T
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

(7.1)式の座標変換マトリックス $\mathbf{L}$ を用いて，節点の要素座標は次式によって求められる。

$$
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \left(\bar{x}_1 - \bar{x}^c\right) & \left(\bar{x}_2 - \bar{x}^c\right) & \left(\bar{x}_3 - \bar{x}^c\right) & \left(\bar{x}_4 - \bar{x}^c\right) \\ \left(\bar{y}_1 - \bar{y}^c\right) & \left(\bar{y}_2 - \bar{y}^c\right) & \left(\bar{y}_3 - \bar{y}^c\right) & \left(\bar{y}_4 - \bar{y}^c\right) \\ \left(\bar{z}_1 - \bar{z}^c\right) & \left(\bar{z}_2 - \bar{z}^c\right) & \left(\bar{z}_3 - \bar{z}^c\right) & \left(\bar{z}_4 - \bar{z}^c\right) \end{bmatrix} \tag{7.10}
$$

ただし， $\left(\bar{x}^c, \bar{y}^c, \bar{z}^c\right)$ は要素の原点の座標値で次式から求められる。

$$
\begin{Bmatrix} \bar{x}^c \\ \bar{y}^c \\ \bar{z}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{4}\left(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4\right) \\ \dfrac{1}{4}\left(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4\right) \\ \dfrac{1}{4}\left(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \bar{z}_4\right) \end{Bmatrix} \tag{7.11}
$$

したがって，6 章の要素剛性マトリックス $\mathbf{k}, \mathbf{k}^\sigma$ は次式によって全体座表系の要素剛性マトリックス $\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{k}}^\sigma$ に変換される。

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{k}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \\
\bar{\mathbf{k}}^\sigma &= \mathbf{T}^T \mathbf{k}^\sigma \mathbf{T}
\end{aligned} \tag{7.12}
$$

ここに，

$$
\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & & & & & & & \\ & \mathbf{L} & & & & & & \\ & & \mathbf{L} & & & & & \\ & & & \mathbf{L} & & & & \\ & & & & \mathbf{L} & & & \\ & & & & & \mathbf{L} & & \\ & & & & & & \mathbf{L} & \\ & & & & & & & \mathbf{L} \end{bmatrix} \tag{7.13}
$$

なお，(7.13)式はスパース性の高いマトリックスであるため，(7.12)式の計算は，3 行 3 列のブロッ

クに分けて効率よく行う必要がある。なお，付録Cにこの部分の Fortran プログラミング例を示している。

８　弧長増分法による非線形方程式の解法

(3.7)式を７章に示した座標変換によって全体座標系に変換すると次式となる。

$$\left(\bar{\mathbf{k}}^{(L)}+\bar{\mathbf{k}}_0^{(\sigma)}\right)\Delta\bar{\mathbf{U}}^e=\Delta\bar{\mathbf{f}} \tag{8.1}$$

ここに，

$$\Delta\bar{\mathbf{f}}=\mathbf{T}^T\left(\Delta\mathbf{f}_b+\Delta\mathbf{f}_t+\mathbf{R}_0+\mathbf{Q}_\sigma\right) \tag{8.2}$$

ただし，通常は $\mathbf{Q}_\sigma$ は無視される。

(8.1)式をすべての要素について重ね合わせると全体剛性方程式が次式のように得られる。

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}=\Delta\mathbf{F} \tag{8.3}$$

ここに，

$$\begin{aligned}\mathbf{K}&=\underset{elements}{\mathrm{A}}\left(\bar{\mathbf{k}}^{(L)}+\bar{\mathbf{k}}_0^{(u)}+\bar{\mathbf{k}}_0^{(\sigma)}\right)\\ \Delta\mathbf{F}&=\underset{elements}{\mathrm{A}}\Delta\bar{\mathbf{f}}\end{aligned} \tag{8.4}$$

ただし， A は重ね合わせを表す記号である。

(8.3)式の解法としては，荷重増分法，変位増分法，弧長増分法等が考えられるが，荷重増分法では座屈後の解析が難しく，変位増分法では多点に荷重が加わる問題等の解析が難しい。一般には荷重が与えられる問題が多いため，座屈後の解析が行える弧長増分法の適用が望ましい。そこで，ここでは誇張増分法の定式化を示す。以下の定式化は，『計算力学ハンドブックⅠ』，日本機会学会，pp.121-122 を参考にしている。

弧長増分法では，(8.3)式の方程式を解くために，次のような 2 種の方程式を連立させて解く。

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}-\Delta\lambda\mathbf{F}=\mathbf{0} \tag{8.5}$$

$$\Delta\mathbf{U}^T\Delta\mathbf{U}+\Delta\lambda^2=\Delta r^2 \tag{8.6}$$

ここに，λ は荷重パラメータ，Δr は任意の大きさのパラメータで，計算を実行する際に与える量となる。収束の過程で，この Δr が大きすぎると収束が遅くなり，小さすぎると計算ステップが多くなる。

収束過程における修正方程式は，収束操作のステップ数を n として上添字で示すと，次のように表される。

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{U}_0+\Delta\mathbf{U}^{(n)}\right)\delta\mathbf{U}^{(n)}-\delta\lambda^{(n)}\mathbf{F}=\mathbf{p}^{(n)} \tag{8.7}$$

$$\Delta\mathbf{U}^{(n)T}\delta\mathbf{U}^{(n)}+\Delta\lambda^{(n)}\delta\lambda^{(n)}=q^{(n)} \tag{8.8}$$

ここに，

$$\mathbf{p}^{(n)}=\left(\lambda_0+\Delta\lambda^{(n)}\right)\mathbf{F}-\underset{elements}{\mathrm{A}}\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{B}^{(L)}+2\mathbf{B}_0^{(N)}\right)^T\left(\boldsymbol{\sigma}_0+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\right)d\Omega \tag{8.9}$$

$$q^{(n)}=\frac{1}{2}\left[\Delta r^2-\Delta\mathbf{U}^{(n)T}\Delta\mathbf{U}^{(n)}-\left(\Delta\lambda^{(n)}\right)^2\right] \tag{8.10}$$

$$\Delta\mathbf{U}^{(n)}=\sum_{i=1}^{n-1}\delta\mathbf{U}^{(i)},\qquad \Delta\lambda^{(n)}=\sum_{i=1}^{n-1}\delta\lambda^{(i)} \tag{8.11}$$

ただし，$\mathbf{U}_0,\lambda_0,\boldsymbol{\sigma}_0$ は前ステップで収束した変位ベクトル, 荷重パラメータ, 応力ベクトルである。また， $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ は $\Delta\mathbf{U}^{(n)}$ から求められる応力増分である。

(8.7)式，(8.8)式をマトリックス表示すると次式となる。

$$\begin{array}{c} N\updownarrow \\ 1\updownarrow \end{array}\begin{bmatrix}\mathbf{K}\left(\mathbf{U}_0+\Delta\mathbf{U}^{(n)}\right) & -\mathbf{F}\\ \Delta\mathbf{U}^{(n)T} & \Delta\lambda^{(n)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta\mathbf{U}^{(n)}\\ \delta\lambda^{(n)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{p}^{(n)}\\ q^{(n)}\end{Bmatrix} \tag{8.12}$$

上式が弧長増分法における Newton-Raphson 法の収束過程の基礎式となる。ここに，N は剛性マトリックスの自由度数である。

ただし，(8.12)式は非対称マトリックスとなるため，このまま解いたのでは計算効率が悪い。そこで，(8.12)式を直接解く代わりに，修正 Riks 法（線形化された弧長法）と呼ばれる方法を用いる（固体力学におけるコンピュータアナリシス，大坪英臣著，日本機械学会編）。

まず，荷重増分 $\Delta\lambda^{(i,0)}\mathbf{F}$ に対する $\Delta\mathbf{U}^{(i,0)}$ を求める。ただし，上添字 $(i,0)$ は，左が荷重増分ステップ，右が Newton-Raphson 法の繰り返しステップを示し，今の場合 i 番目の荷重ステップの Newton-Raphson 法の計算が始まる前の状態を表す。(8.5)式より， $\Delta\mathbf{U}^{(i,0)}$ は次式によって求められる。

$$\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i,0)}=\Delta\lambda^{(i,0)}\mathbf{F} \tag{8.13}$$

ここに， $\mathbf{K}^{(i-1)}$ は前ステップの剛性マトリックスを表す。ただし，(8.6)式より， $\Delta\mathbf{U}^{(i,0)},\Delta\lambda^{(i,0)}$ は次式を満たすように決める必要がある。

$$\Delta\mathbf{U}^{(i,0)T}\Delta\mathbf{U}^{(i,0)}+\Delta\lambda^{(i,0)2}=\Delta r^2 \tag{8.14}$$

このため，規準になる変位 $\mathbf{U}_A^{(i,0)}$ を次式より求める。

$$\mathbf{K}^{(i-1)}\mathbf{U}_A^{(i,0)}=\mathbf{F} \tag{8.15}$$

(8.13)式より $\Delta\mathbf{U}^{(i,0)}=\Delta\lambda^{(i,0)}\mathbf{U}_A^{(i,0)}$ であるから，(8.14)式より，

$$\Delta\lambda^{(i,0)2}=\frac{\Delta r^2}{\left(1+\mathbf{U}_A^{(i,0)T}\mathbf{U}_A^{(i,0)}\right)} \tag{8.16}$$

以上の計算により図 8.1 に $\mathrm{B}^{(1)}$点が求められる。しかし，この点では外力の内力の間に不釣合力が生じるため Newton-Raphson 法により不釣合力の生じない平衡点を求める。

まず, (8.16)式より増分変位 $\Delta\mathbf{U}^{(i,0)}$ が求められ, これから応力増分 $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i,0)}$ が計算される。そして, 変位と応力が次式によって更新される。

$$\lambda^{(i,0)}=\lambda^{(i-1)}+\Delta\lambda^{(i,0)},\quad \mathbf{U}^{(i,0)}=\mathbf{U}^{(i-1)}+\Delta\mathbf{U}^{(i,0)},\quad \boldsymbol{\sigma}^{(i,0)}=\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i,0)} \tag{8.17}$$

この時，(8.9)式より不釣合力ベクトルが次式から計算される。

$$\mathbf{p}^{(i,0)}=\lambda^{(i,0)}\mathbf{F}-\underset{elements}{\mathrm{A}}\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{B}^{(L)}+2\mathbf{B}_0^{(N)}\right)^T\boldsymbol{\sigma}^{(i,0)}\,d\Omega \tag{8.18}$$

修正 Riks 法では，次の修正点 $(\lambda^{(i,0)}+\delta\lambda^{(i,1)},\mathbf{U}^{(i,0)}+\delta\mathbf{U}^{(i,1)})$ を図 8.1 のベクトル $\mathrm{AB}^{(1)}$に直交する線

上に求める。この場合，直交条件より，

$$\Delta\lambda^{(i,0)}\delta\lambda^{(i,1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i,0)}\delta\mathbf{U}^{(i,1)} = 0 \tag{8.19}$$

また，(8.12)式を参考にすると，

$$\delta\mathbf{U}^{(i,1)} = \delta\lambda^{(i,1)}\mathbf{K}^{(i,0)^{-1}}\mathbf{F} + \mathbf{K}^{(i,0)^{-1}}\mathbf{p}^{(i,0)} = \delta\lambda^{(i,1)}\mathbf{U}_B^{(i,0)} + \delta\mathbf{U}_C^{(i,0)} \tag{8.20}$$

ここに， $\mathbf{U}_B^{(i,0)}, \delta\mathbf{U}_C^{(i,0)}$ は次式から求められる。

$$\mathbf{K}^{(i,0)}\mathbf{U}_B^{(i,0)} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{K}^{(i,0)}\delta\mathbf{U}_C^{(i,0)} = \mathbf{p}^{(i,0)} \tag{8.21}$$

(8.20)式を(8.19)式に代入し， $\delta\lambda^{(i,1)}$ に関して解くと，

$$\delta\lambda^{(i,1)} = -\frac{\Delta\mathbf{U}^{(i,0)}\delta\mathbf{U}_C^{(i,0)}}{\Delta\mathbf{U}^{(i,0)^T}\mathbf{U}_B^{(i,0)} + \Delta\lambda^{(i,0)}} \tag{8.22}$$

となる。(8.22)式を(8.20)式に代入すると $\delta\mathbf{U}^{(i,1)}$ が求められる。この点が図 8.1 の $B^{(2)}$点となる。

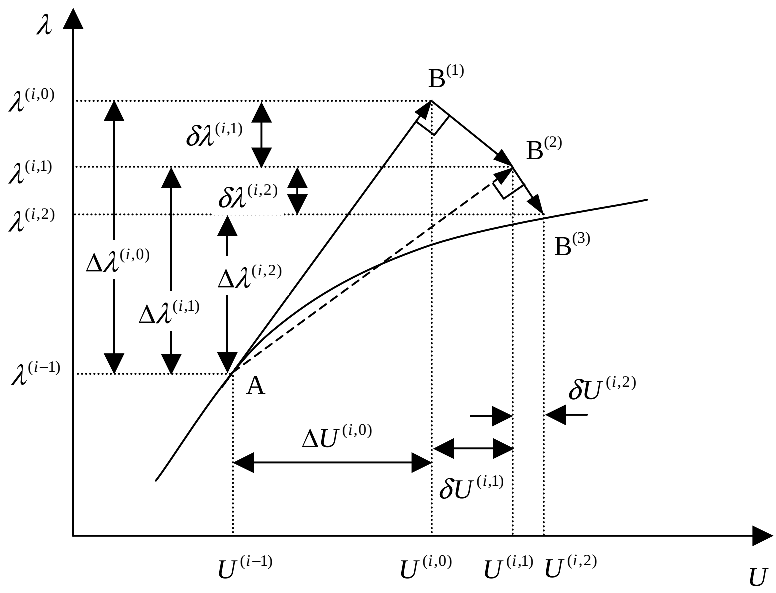

図 8.1　線形化された弧長法（修正 Riks 法）

以上の修正によって，変位と応力が次式のように更新される。

$$\lambda^{(i,1)} = \lambda^{(i,0)} + \delta\lambda^{(i,1)}, \quad \mathbf{U}^{(i,1)} = \mathbf{U}^{(i,0)} + \delta\mathbf{U}^{(i,1)}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(i,1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(i,0)} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{(i,1)} \tag{8.23}$$

この時，(8.9)式より新たな不釣合力ベクトルが次式から計算される。

$$\mathbf{p}^{(i,1)} = \lambda^{(i,1)}\mathbf{F} - \mathop{\mathrm{A}}_{elements} \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{B}^{(L)} + 2\mathbf{B}_0^{(N)}\right)^T \boldsymbol{\sigma}^{(i,1)}\, d\Omega \tag{8.24}$$

次の修正点 $(\lambda^{(i,1)} + \delta\lambda^{(i,2)}, \mathbf{U}^{(i,1)} + \delta\mathbf{U}^{(i,2)})$ は，図 8.1 のベクトル $AB^{(2)}$に直交する線上に求められる。このとき，次の直交条件が成り立つ。

$$\Delta\lambda^{(i,1)}\delta\lambda^{(i,2)} + \Delta\mathbf{U}^{(i,1)}\delta\mathbf{U}^{(i,2)} = 0 \tag{8.25}$$

ただし，

$$\Delta\lambda^{(i,1)} = \Delta\lambda^{(i,0)} + \delta\lambda^{(i,1)}, \quad \Delta\mathbf{U}^{(i,1)} = \Delta\mathbf{U}^{(i,0)} + \delta\mathbf{U}^{(i,1)} \tag{8.26}$$

また，

$$\delta \mathbf{U}^{(i,2)} = \delta\lambda^{(i,2)} \mathbf{U}_B^{(i,1)} + \delta \mathbf{U}_C^{(i,1)} \tag{8.27}$$

ここに，

$$\mathbf{K}^{(i,1)} \mathbf{U}_B^{(i,1)} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{K}^{(i,1)} \delta \mathbf{U}_C^{(i,1)} = \mathbf{p}^{(i,1)} \tag{8.28}$$

が成り立つから，(8.25)式と(8.27)式より，

$$\delta\lambda^{(i,2)} = -\frac{\Delta \mathbf{U}^{(i,1)} \delta \mathbf{U}_C^{(i,1)}}{\Delta \mathbf{U}^{(i,1)^T} \mathbf{U}_B^{(i,1)} + \Delta\lambda^{(i,1)}} \tag{8.29}$$

が得られる。これが図 8.1 の B(3)点である。以下，(8.23)式から(8.29)式を不釣合ベクトル $\mathbf{p}^{(i,n)}$ のノルムが十分小さくなるまで繰り返す。そして，収束したら(8.13)式に戻って荷重増分ステップを更新する。

なお，実際には，$\Delta\lambda$ は変位の大きさに依存するため，(8.6)式は次式のように置く（計算力学ハンドブック，日本機械学会編）。

$$\Delta \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{U} + \Delta\lambda^2 \phi^2 \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \Delta r^2 \tag{8.30}$$

ここに，ϕ はスケーリングパラメータである。このとき，(8.16)，(8.22)，(8.29)式はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta\lambda^{(i,0)^2} = \frac{\Delta r^2}{\left(\phi^2 \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{U}_A^{(i,0)^T} \mathbf{U}_A^{(i,0)}\right)} \tag{8.31}$$

$$\delta\lambda^{(i,1)} = -\frac{\Delta \mathbf{U}^{(i,0)} \delta \mathbf{U}_C^{(i,0)}}{\Delta \mathbf{U}^{(i,0)^T} \mathbf{U}_B^{(i,0)} + \Delta\lambda^{(i,0)} \phi^2 \mathbf{F}^T \mathbf{F}} \tag{8.32}$$

$$\delta\lambda^{(i,2)} = -\frac{\Delta \mathbf{U}^{(i,1)} \delta \mathbf{U}_C^{(i,1)}}{\Delta \mathbf{U}^{(i,1)^T} \mathbf{U}_B^{(i,1)} + \Delta\lambda^{(i,1)} \phi^2 \mathbf{F}^T \mathbf{F}} \tag{8.33}$$

したがって，この場合，弧長半径 Δr とスケーリングパラメータ ϕ が与えられることになる。

付録A　x, y に関する２階の偏微分の導出法

まず，ξ, η に関する２階の偏微分を次のように置く。

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \xi \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_1 \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} + \mathbf{C}_2 \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial xy} \end{Bmatrix} \tag{A.1}$$

ここに，$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi \eta} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \overline{\mathbf{N}}}{\partial \xi^2} \mathbf{x} & \dfrac{\partial^2 \overline{\mathbf{N}}}{\partial \xi^2} \mathbf{y} \\ \dfrac{\partial^2 \overline{\mathbf{N}}}{\partial \eta^2} \mathbf{x} & \dfrac{\partial^2 \overline{\mathbf{N}}}{\partial \eta^2} \mathbf{y} \\ \dfrac{\partial^2 \overline{\mathbf{N}}}{\partial \xi \eta} \mathbf{x} & \dfrac{\partial^2 \overline{\mathbf{N}}}{\partial \xi \eta} \mathbf{y} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

$$
\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} + \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \xi}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{x} & \mathbf{y}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \xi}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{y} & 2\mathbf{x}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \xi}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \eta}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{x} & \mathbf{y}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \eta}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{y} & 2\mathbf{x}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \eta}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \xi}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{x} & \mathbf{y}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{y} & \mathbf{x}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \xi}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \eta}\mathbf{y} + \mathbf{x}^T \dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \eta}\dfrac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi}\mathbf{y} \end{bmatrix}
\tag{A.3}
$$

(5.14)式より,

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}
\tag{A.4}
$$

上式を(A.1)に代入すると,

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \xi \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_1 \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + \mathbf{C}_2 \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial xy} \end{Bmatrix}
\tag{A.5}
$$

ここで, x, y に関する偏微分を次式のように置く。

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_1 \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_2 \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \xi \eta} \end{Bmatrix}
\tag{A.6}
$$

上式に(A.3)式を代入すると,

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial xy} \end{Bmatrix} = \left(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{J}^{-1}\right) \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_2 \mathbf{C}_2 \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial xy} \end{Bmatrix}
\tag{A.7}
$$

上式より, $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ は $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ から次のように求められる。

$$
\mathbf{T}_2 = \mathbf{C}_2^{-1}
\tag{A.8}
$$

$$
\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{J}^{-1}
\tag{A.9}
$$

なお, $\bar{\mathbf{N}}$ の ξ, η に関する 1 階の偏微分係数は(4.13)式から計算され, 2 階の偏微分係数は次式とな

る。

$$\frac{\partial^2\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi^2}=\mathbf{0},\quad \frac{\partial^2\bar{\mathbf{N}}}{\partial^2\eta}=\mathbf{0},\quad \frac{\partial^2\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi\eta}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix} \tag{A.10}$$

したがって，この場合$\mathbf{C}_1$は次式となる。

$$\mathbf{C}_1=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi^2}\mathbf{x} & \frac{\partial^2\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi^2}\mathbf{y}\\ \frac{\partial^2\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta^2}\mathbf{x} & \frac{\partial^2\bar{\mathbf{N}}}{\partial\eta^2}\mathbf{y}\\ \frac{\partial^2\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi\eta}\mathbf{x} & \frac{\partial^2\bar{\mathbf{N}}}{\partial\xi\eta}\mathbf{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \frac{1}{4}\left(x_1-x_2+x_3-x_4\right) & \frac{1}{4}\left(y_1-y_2+y_3-y_4\right)\end{bmatrix} \tag{A.11}$$

付録B　$\bar{\mathbf{N}}^b$ のξ,ηに関する偏微分

ξに関する 1 階偏微分

$$\frac{\partial\bar{N}_1^b}{\partial\xi}=\frac{1}{8}(1-\eta)\left(-3+\eta+3\xi^2+\eta^2\right) \qquad \frac{\partial\bar{N}_7^b}{\partial\xi}=-\frac{1}{8}(1+\eta)\left(-3-\eta+3\xi^2+\eta^2\right)$$
$$\frac{\partial\bar{N}_2^b}{\partial\xi}=-\frac{1}{8}(1-\eta)^2(1+\eta) \qquad \frac{\partial\bar{N}_8^b}{\partial\xi}=-\frac{1}{8}(1+\eta)^2(1-\eta)$$
$$\frac{\partial\bar{N}_3^b}{\partial\xi}=-\frac{1}{8}\left(-1-2\xi+3\xi^2\right)(1-\eta) \qquad \frac{\partial\bar{N}_9^b}{\partial\xi}=-\frac{1}{8}\left(-1+2\xi+3\xi^2\right)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial\bar{N}_4^b}{\partial\xi}=-\frac{1}{8}(1-\eta)\left(-3+\eta+3\xi^2+\eta^2\right) \qquad \frac{\partial\bar{N}_{10}^b}{\partial\xi}=\frac{1}{8}(1+\eta)\left(-3-\eta+3\xi^2+\eta^2\right)$$
$$\frac{\partial\bar{N}_5^b}{\partial\xi}=\frac{1}{8}(1-\eta)^2(1+\eta) \qquad \frac{\partial\bar{N}_{11}^b}{\partial\xi}=\frac{1}{8}(1+\eta)^2(1-\eta) \tag{B.1}$$
$$\frac{\partial\bar{N}_6^b}{\partial\xi}=-\frac{1}{8}\left(-1+2\xi+3\xi^2\right)(1-\eta) \qquad \frac{\partial\bar{N}_{12}^b}{\partial\xi}=-\frac{1}{8}\left(-1-2\xi+3\xi^2\right)(1+\eta)$$

ηに関する 1 階偏微分

$$\frac{\partial\bar{N}_1^b}{\partial\eta}=\frac{1}{8}(1-\xi)\left(-3+\xi+\xi^2+3\eta^2\right) \qquad \frac{\partial\bar{N}_7^b}{\partial\eta}=-\frac{1}{8}(1+\xi)\left(-3-\xi+\xi^2+3\eta^2\right)$$
$$\frac{\partial\bar{N}_2^b}{\partial\eta}=\frac{1}{8}(1-\xi)\left(-1-2\eta+3\eta^2\right) \qquad \frac{\partial\bar{N}_8^b}{\partial\eta}=\frac{1}{8}(1+\xi)\left(-1+2\eta+3\eta^2\right)$$
$$\frac{\partial\bar{N}_3^b}{\partial\eta}=\frac{1}{8}(1-\xi)^2(1+\xi) \qquad \frac{\partial\bar{N}_9^b}{\partial\eta}=\frac{1}{8}(1+\xi)^2(1-\xi)$$

$$\frac{\partial\bar{N}_4^b}{\partial\eta}=\frac{1}{8}(1+\xi)\left(-3-\xi+\xi^2+3\eta^2\right) \qquad \frac{\partial\bar{N}_{10}^b}{\partial\eta}=-\frac{1}{8}(1-\xi)\left(-3+\xi+\xi^2+3\eta^2\right)$$
$$\frac{\partial\bar{N}_5^b}{\partial\eta}=\frac{1}{8}(1+\xi)\left(-1-2\eta+3\eta^2\right) \qquad \frac{\partial\bar{N}_{11}^b}{\partial\eta}=\frac{1}{8}(1-\xi)\left(-1+2\eta+3\eta^2\right) \tag{B.2}$$
$$\frac{\partial\bar{N}_6^b}{\partial\eta}=-\frac{1}{8}(1+\xi)^2(1-\xi) \qquad \frac{\partial\bar{N}_{12}^b}{\partial\eta}=-\frac{1}{8}(1-\xi)^2(1+\xi)$$

ξ に関する 2 階偏微分

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \bar{N}_1^b}{\partial \xi^2} = \frac{3}{4}\xi(1-\eta) && \frac{\partial^2 \bar{N}_7^b}{\partial \xi^2} = -\frac{3}{4}\xi(1+\eta) \\
&\frac{\partial^2 \bar{N}_2^b}{\partial \xi^2} = 0 && \frac{\partial^2 \bar{N}_8^b}{\partial \xi^2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \bar{N}_3^b}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{4}(-1+3\xi)(1-\eta) && \frac{\partial^2 \bar{N}_9^b}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{4}(1+3\xi)(1+\eta) \\
&\frac{\partial^2 \bar{N}_4^b}{\partial \xi^2} = -\frac{3}{4}\xi(1-\eta) && \frac{\partial^2 \bar{N}_{10}^b}{\partial \xi^2} = \frac{3}{4}\xi(1+\eta) \\
&\frac{\partial^2 \bar{N}_5^b}{\partial \xi^2} = 0 && \frac{\partial^2 \bar{N}_{11}^b}{\partial \xi^2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \bar{N}_6^b}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{4}(1+3\xi)(1-\eta) && \frac{\partial^2 \bar{N}_{12}^b}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{4}(-1+3\xi)(1+\eta)
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

η に関する 2 階偏微分

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{N}_1^b}{\partial \eta^2} = \frac{3}{4}(1-\xi)\eta && \frac{\partial \bar{N}_7^b}{\partial \eta^2} = -\frac{3}{4}(1+\xi)\eta \\
&\frac{\partial \bar{N}_2^b}{\partial \eta^2} = \frac{1}{4}(1-\xi)(-1+3\eta) && \frac{\partial \bar{N}_8^b}{\partial \eta^2} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+3\eta) \\
&\frac{\partial \bar{N}_3^b}{\partial \eta^2} = 0 && \frac{\partial \bar{N}_9^b}{\partial \eta^2} = 0 \\
&\frac{\partial \bar{N}_4^b}{\partial \eta^2} = \frac{3}{4}(1+\xi)\eta && \frac{\partial \bar{N}_{10}^b}{\partial \eta^2} = -\frac{3}{4}(1-\xi)\eta \\
&\frac{\partial \bar{N}_5^b}{\partial \eta^2} = \frac{1}{4}(1+\xi)(-1+3\eta) && \frac{\partial \bar{N}_{11}^b}{\partial \eta^2} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+3\eta) \\
&\frac{\partial \bar{N}_6^b}{\partial \eta^2} = 0 && \frac{\partial \bar{N}_{12}^b}{\partial \eta^2} = 0
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

ξ,η に関する偏微分

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{N}_1^b}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8}\left(4-3\xi^2-3\eta^2\right) && \frac{\partial \bar{N}_7^b}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8}\left(4-3\xi^2-3\eta^2\right) \\
&\frac{\partial \bar{N}_2^b}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8}\left(1+2\eta-3\eta^2\right) && \frac{\partial \bar{N}_8^b}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8}\left(-1+2\eta+3\eta^2\right) \\
&\frac{\partial \bar{N}_3^b}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8}\left(-1-2\xi+3\xi^2\right) && \frac{\partial \bar{N}_9^b}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8}\left(1-2\xi-3\xi^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{N}_4^b}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{8}\left(-4+3\xi^2+3\eta^2\right) && \frac{\partial \bar{N}_{10}^b}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{8}\left(-4+3\xi^2+3\eta^2\right)\\
&\frac{\partial \bar{N}_5^b}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{8}\left(-1-2\eta+3\eta^2\right) && \frac{\partial \bar{N}_{11}^b}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{8}\left(1-2\eta-3\eta^2\right)\\
&\frac{\partial \bar{N}_6^b}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{8}\left(-1+2\xi+3\xi^2\right) && \frac{\partial \bar{N}_{12}^b}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{8}\left(1+2\xi-3\xi^2\right)
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

付録Ｃ　要素剛性マトリックスの座標変換

(7.10)式の要素剛性マトリックスの座標変換の Fortran プログラミング例を以下に示す。

```
      Subroutine ctrans(ekm,t)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension ekm(24,24),t(3,3),ekms(3,3),ekmt(3,3)
      do ni = 1,4
      do nj = 1,4
      ib= 3*(ni-1)
      jb= 3*(nj-1)
c
      do i = 1,3
      do j = 1,3
      ekms(i,j) = ekm(ib+i,jb+j)    ! ekm : 要素剛性マトリックス
      end do
      end do
c
c     [L]^T[kninj]
c
      do i = 1,3
      do j = 1,3
      s = 0.d0
      do k = 1,3
       s = s + t(k,i)*ekms(k,j)      ! t : 座標変換マトリックス[L]
      end do
      ekmt(i,j) = s                  ! [L]^T[kninj]
      end do
      end do
c
c     [L]^T[kninj][L]
c
      do i = 1,3
      do j = 1,3
      s = 0.d0
      do k = 1,3
       s = s + ekmt(i,k)*t(k,j)
      end do
      ekm(ib+i,jb+j) = s             ! [L]^T[kninj][L]
      end do
      end do
c
      end do
      end do
      return
      end
```