32.　アイソジオメトリック有限要素法の基礎的研究

0710920074　　垣田仁
指導教員　　藤井大地　教授

有限要素法　CAD　B-spline 曲線　Isogeometric 解析

1. はじめに

近年，コンピュータの発展に伴い，工学分野を中心に構造解析に有限要素法 [1]が利用されるようになった．有限要素法は有限要素モデルさえ準備すれば解が得られるという便利さを持つが，その反面 CAD と有限要素法では形状の表現方法が異なるため, CAD で作成されたデータに対して有限要素法を用いる際には，有限要素モデルを作成するメッシュ生成が必要になる. メッシュ生成は，長年研究され続けているが，現在でも完全自動化されておらず，大変な労力が必要になり，設計工程において遅延を生じる原因となっている．

また，有限要素法は変位を近似する試行関数に 1 次や 2 次等の低次数の関数を用いているため，一端メッシュ生成を行ってしまうと CAD で表現された滑らかな形状を完全に表現することができず，厳密に形状を保持したまま解析精度改善のためのリファインメントを行う際には，元の CAD の形状データを参照する必要がある．

このような問題に対して Hughes et al.が Isogeometric 解析を提案した [2]．この解析は CAD の形状表現である B-spline[4]を用いて試行関数を表す解析手法で， CAD で表現された形状を保持したまま解析を行うことができる．また， B-spline は幾何形状を保持したまま曲線を構成するパラメータを変更することが可能であり，この性質を利用して元の形状を保持したまま試行関数の近似精度の改善を行えることが Isogeometric 解析の利点である．

Isogeometric 解析は有限要素法の形状表現を CAD の形状表現にするため，一般に境界条件や荷重条件の設定が難しいという問題がある．それらの問題は多次元になるほど複雑になってくる．

そこで，本研究では離散化手法に有限要素法を用い，定式化が容易な 1 次元問題で，境界条件，荷重条件などの問題を検討し，Isogeometric 解析の有効性を検証する．

2. CAD の形状表現の概要

2.1 B-spline 曲線

B-spline の曲線式 $\boldsymbol{P}(t)$は次式で表わされる

$$\mathbf{P}(t)=N_{0,M}(t)\mathbf{Q}_0+N_{1,M}(t)\mathbf{Q}_1+\cdots\cdots\cdots\cdots N_{n,M}(t)\mathbf{Q}_n \tag{1}$$

$\mathbf{Q}_0\cdots\cdots\cdots\mathbf{Q}_n$: 制御点，　$N_{0,M}\cdots\cdots N_{n,M}$: B-spline 基底関数

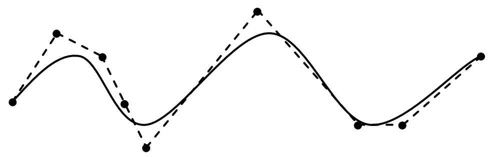
ここに，**Q** の下添字は制御点の番号を表し，n は曲線の次数，M は階数を表す． $N_{j,M}$ は下記の再帰的な関係式で表すことができる．

$$N_{j,M}(t)=\frac{t-t_j}{t_{j+M-1}-t_j}N_{j,M-1}(t)+\frac{t_{j+M}-t}{t_{j+M}-t_{j+1}}N_{j+1,M-1}(t) \tag{2}$$

$$N_{j,1}(t)=1 \quad if \quad t_j\le t<t_{j+1}$$
$$N_{j,1}(t)=0 \quad otherwise$$

(2)式の t_j はノットと呼ばれ，ノットはノットベクトルと呼ばれる一様増加するノットの列で与えられる．

$$\mathrm{T}=[t_0\ \ t_1\ \ t_2\cdots\cdots t_{M+N-1}] \qquad N:\text{制御点数} \tag{3}$$



$\mathrm{T}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 7\ \ 7]$

図 1　B-spline **曲線**（ $N=9$, $M=3$ ）

2.2 ノットの挿入，多重度

ノットの挿入とは幾何形状を保持したまま B-spline 曲線を構成するパラメータを変更する方法の 1 つである．図 **1** は $M=3$ ，制御点数 $N=3$ ，ノットベクトル $\mathbf{T}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$ の B-spline 曲線に対してノットの挿入を 2 回行った例を示してある．ノットの挿入によりノットベクトルが $\mathbf{T}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0.3\ \ 0.3\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$ と変更され，それに伴い制御点の座標値，数が $N=5$ に変化するが，基底関数の階数は $M=3$ が保持される．同じ値のノットが複数ある時，その数を多重度という．このノットベクトルの場合では両端で多重度 3 の多重ノットを持ち， $t=0.3$ で多重度 2 の多重ノットをもっているという．この多重度をうまく利用すれば，曲線上に制御点を持ってくることができる．図 2 の $\hat{\hat{\mathbf{Q}}}_3$ も曲線上にある．多重度 $(M-1)$ にすれば，そのパラメータ上に制御点を曲線上にすることができる．

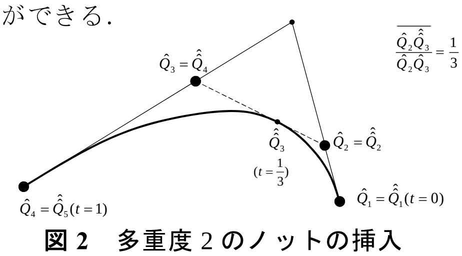


図 2　多重度 2 **のノットの挿入**

Fundamental study on Isogeometric Finite Element Method

KAKITA Jin

構造解析研究室

3. 有限要素法への適用

通常の有限要素解析では，変位関数ψを形状関数と各節点ごとの自由度$\mathbf{d}^e$の積として近似し，剛性マトリクス$\mathbf{k}^e$を作り，仮想仕事の原理より得た次式で離散化する．

$$\mathbf{k}^e\mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \qquad \mathbf{f}^e\text{：外力ベクトル} \tag{4}$$

Isogeometric 解析では離散化する際に形状関数に B-spline 基底関数を用いて制御点に相当する自由度の積として次式で近似し離散化する．

$$\psi = \sum_{i=1}^{ncp} N_{i,M}(t)\mathbf{d}_i \qquad \psi = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{d}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \end{Bmatrix} \tag{5}$$

ncp : 制御点数

しかし， Isogeometric 解析では形状関数に B-spline 基底関数を用いるため, 制御点が要素上にあるとは限らず, 制御点に相当する自由度ごとに境界条件を適応しても物理的に変位境界条件，荷重条件が満たされるかは不明である．

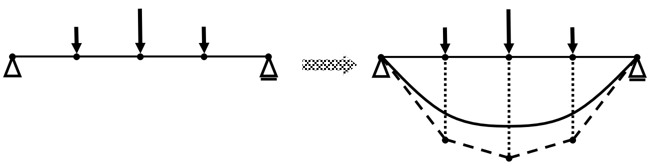


図 3　境界条件，荷重条件が満たされていない例

そこで 2.2 節に示すノットの挿入と多重度の概念を利用し境界条件および荷重条件を満たした．

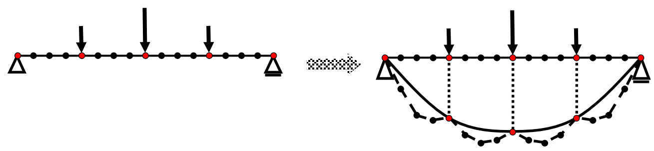


図 4　境界条件，荷重条件が満たされた例

これ以降の定式化は，試行関数が(5)式の形式で表されているため，有限要素法と同様の手順で離散化できる．

なお，曲げ問題では変位関数v, θを独立に近似する Timoshenko はりの理論を用いた．

4. 解析手法としての有効性の検討

今回は自作した Isogeometric 解析の解析プログラムを用いて，それぞれの例題に対して数値計算を行った．また，比較のために文献 5)の梁理論に基づく，せん断変形を考慮した有限要素法で解析した．

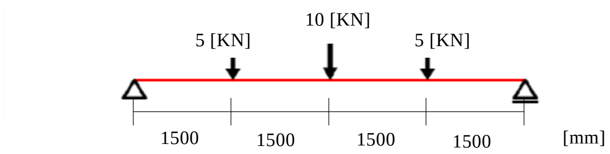


図 5　解析例

断面は H-300×150×6.5×9 で弾性率 $E = 205000$ [N/mm^2], $G = 78846.15$ [N/mm^2]，断面積 $A = 4678$ [mm^2]，断面 2 次モーメント $I = 72100000$ [mm^2]，そして，パラメータtを全体で$0 \le t \le 1$の範囲にし制御点 3 点を$t = \{0.25, 0.5, 0.75\}$で新たに要素上に挿入し解析した．

表 1 は，挿入した 3 点と両端の節点変位v, θを基底関数の階数が$M = \{3,5,10,20,30\}$の 5 パターンの Isogeometric 解析と有限要素法と比較してまとめたものであるが，Isogeometric 解析と通常の有限要素法の解はほぼ一致していることが分かる．

表 1　変位v, θ（上v，下θ）

		Isogeometric 解析					FEM
	M	3	5	10	20	30	
X 座標 mm	1500	3.56409	3.65607	3.65607	3.65607	3.65607	3.65607
	3000	5.06070	5.19868	5.19868	5.19868	5.19868	5.19868
	4500	3.56409	3.65607	3.65607	3.65607	3.65607	3.65607

		Isogeometric 解析					FEM
	M	3	5	10	20	30	
X 座標 mm	0	0.00266	0.00266	0.00266	0.00266	0.00266	0.00266
	1500	0.00190	0.00190	0.00190	0.00190	0.00190	0.00190
	3000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	4500	-0.0019	-0.0019	-0.0019	-0.0019	-0.0019	-0.0019
	6000	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027

5. 結論

本研究では, Isogeometric 解析で発生する問題を 1 次元問題に単純化し，その解決方法を示した．また，Isogeometric 解析の有効性の検討をするため, はりの曲げ問題で通常の有限要素法による解の比較を行った．その結果，両手法の解はほぼ一致し， Isogeometric 解析の有効性が検証された．

参考文献

1) J. Fish, T. Belytschko: A First Course in Finite Elements, Wiley, 2007.
2) T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.
3) J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, Y. Bazilevs, Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA, Wiley. 2010.
4) 三浦曜，中嶋孝行，大野敏則, CAD･CG 技術者のための NURBS 早わかり，工業調査会, 1994.
5) 鷲津久一郎，宮本博，山田嘉昭，山本善之，川井忠彦，山本格，有限要素法ハンドブック，培風館, 1981