

24. 法による 3 次元骨組の形状最適化に関する研究

0910920141 垣田修  
指導教員 藤井大地 教授

形状最適化 法 感度解析 骨組構造

1. はじめに

近年、構造解析および施工技術の発達により、幾何学的な形態にとらわれないより不定形で自由な形態の建築物が建築されるようになってきている。また、シェル構造等では、意匠設計者の求める形態に対して、形状最適化手法を用いることにより、意匠的にも構造的にも優れた建築物を建てる方法が発展してきている。

形状最適化技術は、これまで有限要素法を用いたものが数多く提案されてきた<sup>1)</sup>。その中でも、畔上, 下田<sup>2)-3)</sup>らの提案した手法 (Traction method) は、弾性変形にしたがって形状を変更しているため、メッシュのゆがみが生じにくいというメリットがある。

一方、藤井, 垣田<sup>4)</sup>らは、この手法を建築骨組の形状最適化問題に適用する方法を示した。この方法は、鉛直集中荷重下において、骨組配置を変更し、最適形状を求める方法である。手法は、骨組の弾性変形にしたがって形状修正を行うため、どのような骨組構造に対しても、意匠設計者の意図を反映した修正を行うことができる。

しかし藤井らの示した方法は、2 次元骨組問題に対する手法の適用方法、および有効性しか示されておらず、自由曲面を持つシェル構造のような、複雑に入り組んだ建築物では、立体的にとらえなければ接点の位置を決定できないため、2 次元レベルでは形状修正を行うことが困難である。

そこで本研究では、3 次元骨組に対する手法の形状最適化問題に適用する方法を示す。そして、その有効性を示す。

2. 法による形状最適化

本論文では、3 次元骨組の形状最適化問題として、以下のような問題を考える。

目的関数

$$C(\mathbf{q}) = \mathbf{f}^T \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}$$

を最小にする節点座標

$$\mathbf{q} = \{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n\}$$

を求める。

ただし、要素総長さの制約条件

$$L^{\min} \leq L = \sum_{i=1}^m l_i \leq L^{\max}$$

を満足するものとする。

ここに、 $C$  はコンプライアンス、 $\mathbf{f}$  は節点外力ベクトル、

$\mathbf{d}$  は節点変位ベクトル、 $\mathbf{K}$  は全体剛性マトリクス、 $x_i, y_i, z_i$  は  $i$  番目接点の座標値、 $L$  は要素の総長さ、 $l_i$  は  $i$  番目要素の長さ、 $L^{\min}$ 、 $L^{\max}$  は要素長さの制約値、 $n$  は座標変更を行う節点数、 $m$  は要素数である。

手法では、まず、目的関数の各節点の  $x, y, z$  座標に関する感度係数を求め、この感度係数に負号を付けたものを各節点の  $x, y, z$  方向荷重として加える。そして、各節点の変位を求め、この変位に適当な倍率を掛けたものを節点座標の増分  $\Delta \mathbf{q}$  とする。なお、変位に掛ける倍率は、以上の計算を繰り返し、節点座標の増分がほぼ 0 になる解を最適解とする。なお、本論文では、要素長さの平均値、

$$\bar{l} = \frac{L}{m} = \sum_{i=1}^m l_i / m \tag{2}$$

を基準とし、初期 (第 1 ステップ) の節点座標増分の最大値 (絶対値) が  $\alpha \bar{l}$  となるように変更倍率を設定する。また、最適化の総計算ステップ数を  $N_{op}$  とすると、 $N_{op}/\beta$  までは、変更倍率 ( $\alpha \bar{l}$ ) の絞り込みは行わず、それ以降のステップでは  $\alpha \bar{l} / \gamma^{(k-N_{op}/\beta)}$  となるよう絞り込みを行う。ただし、 $k$  はステップ数、 $\gamma$  は 1~1.1 の範囲で与えるものとする。なお、本論文では、 $\alpha$  はデータとして与え、 $\beta=3$ 、 $\gamma=1.01$  としている。

本論文では、(1)式の要素長さの制約条件を、要素長さをその許容値で除して 1 を引いた値の 2 乗和に初期コンプライアンスと正の定数 (重み係数) を乗じたもの (ペナルティ関数) を (3.1)式の目的関数へのペナルティとする (3)式の問題に(1)式を変換し、満たしている。

目的関数

$$f_{obj}^{(k)}(\mathbf{q}) = C^{(k)} + w_1 C_0 \left( \frac{L^{(k)}}{L^{\max}} - 1 \right)^2 + w_2 C_0 \left( \frac{L^{\min}}{L^{(k)}} - 1 \right)^2$$

if  $\frac{L^{(k)}}{L^{\max}} \leq 1$  then  $w_1 = 0$

if  $\frac{L^{\min}}{L^{(k)}} \leq 1$  then  $w_2 = 0$

を最小にする節点座標

$$\mathbf{q} = \{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n\}$$

を求める。

ただし、 $L^{(k)}$  の計算に使用される要素は任意

ここに、 $C^{(0)}$  は初期形状のコンプライアンス、 $L^{\max}$ 、 $L^{\min}$  は要素総長さの上限値と下限値、 $w_1$ 、 $w_2$  は上限値、下限値に関する重み係数、 $x_i, y_i, z_i$  は  $i$  番目節点の座標値であ

る。なお、本論文では、 $w_1, w_2$  は入力データとして与えている。

### 3. 感度解析法

コンプライアンス  $C$  の節点座標に関する微分（感度係数）の計算法を示す。

まず、(1)式の目的関数の関係式より、

$$\frac{\partial C}{\partial q_j} = \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} \mathbf{d} + 2\mathbf{d}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial q_j} \quad (4)$$

また、次式の剛性方程式

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (5)$$

の両辺を  $q_j$  で微分すると、

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} \mathbf{d} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial q_j} = 0 \quad (6)$$

ここで、(6)式の関係式を(4)式に代入すると、

$$\frac{\partial C}{\partial q_j} = -\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} \mathbf{d} \quad (7)$$

ここで、全体剛性マトリクス  $\mathbf{K}$  は、要素剛性マトリクスを用いて次のように表すことができる。

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^m \mathbf{L}_i^T \mathbf{T}_i^T \mathbf{k}_i^e \mathbf{T}_i \mathbf{L}_i \quad (8)$$

ここに、 $\mathbf{T}_i$  は  $i$  番目要素の座標変換マトリクス、 $\mathbf{k}_i^e$  は  $i$  番目要素の要素固有の座標系における要素剛性マトリクスである。また、 $\mathbf{L}_i$  は  $i$  番目要素の剛性マトリクスを全体剛性マトリクスに割り当てる 0 と 1 の成分で構成される収集行列で、次式の関係がある。

$$\mathbf{d}_i^e = \mathbf{L}_i \mathbf{d} \quad (9)$$

ただし、 $\mathbf{d}_i^e$  は要素の全体座標系の節点変位ベクトルである。

また、全体座標系の節点外力ベクトル  $\mathbf{f}$  は、要素の要素座標系の節点力ベクトル  $\hat{\mathbf{f}}_i$  または全体座標系の節点力ベクトル  $\mathbf{f}_i^e$  を用いて次のように表すことができる。

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^m \mathbf{L}_i^T \mathbf{T}_i^T \hat{\mathbf{f}}_i = \sum_{i=1}^m \mathbf{L}_i^T \mathbf{f}_i^e \quad (10)$$

図 1 に示すように  $s$  番目節点の座標が変化すると、 $s$  番目節点に接続する  $s_1 \sim s_4$  番目の要素のみが変化し、その他の要素は変化しない。したがって、この場合、 $s$  番目節点の  $x, y, z$  座標に関する(9)式の感度係数は(8)(9)(10)式を考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_s} &= -\sum_{i=s_1}^{s_4} \left\{ \mathbf{d}_i^{eT} \frac{\partial (\mathbf{T}_i^T \mathbf{k}_i^e \mathbf{T}_i)}{\partial x_s} \mathbf{d}_i^e \right\} \\ \frac{\partial C}{\partial y_s} &= -\sum_{i=s_1}^{s_4} \left\{ \mathbf{d}_i^{eT} \frac{\partial (\mathbf{T}_i^T \mathbf{k}_i^e \mathbf{T}_i)}{\partial y_s} \mathbf{d}_i^e \right\} \\ \frac{\partial C}{\partial z_s} &= -\sum_{i=s_1}^{s_4} \left\{ \mathbf{d}_i^{eT} \frac{\partial (\mathbf{T}_i^T \mathbf{k}_i^e \mathbf{T}_i)}{\partial z_s} \mathbf{d}_i^e \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $x_s, y_s, z_s$  は、 $s$  番目節点の  $x, y, z$  座標を示す。

### 4. 解析例

図 2 は、推動シェルを基に作成した解析モデルである。骨組の支持点以外を  $x, y, z$  方向に移動させ、内側の接点

に 10kN の荷重をかけている。部材断面は全て  $A=0.01\text{m}^2$  とし、それぞれのヤング係数は  $E=2.05 \times 10^8 \text{KN/m}^2$ 、せん断弾性係数は  $G=7.9154 \times 10^6 \text{KN/m}^2$  とする。

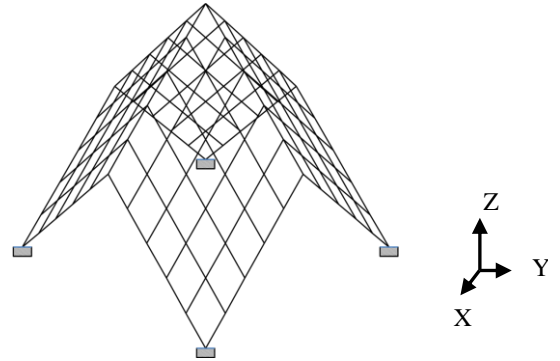
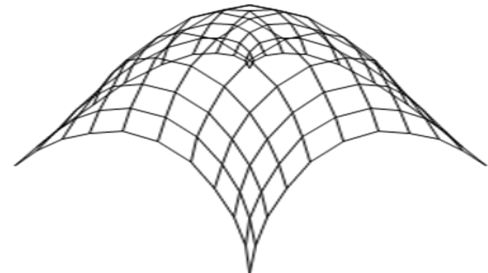


図 2 解析モデル初期形状

図 3 は力法の解析結果を示したものである。ただし、要素総長さ制約値は  $L^{\min} = 0.5 L^{(0)}, L^{\max} = 2.0 L^{(0)}$  で、最適化の繰り返し計算回数は 20000 回としている。また、力法の初期変更倍率係数  $\alpha$  は 0.1、重み係数  $w$  は 0 としている。図中の  $C_r$  は収束解と初期形状のコンプライアンスの比を示し、 $L_r$  は収束解と初期形状の要素総長さの比を示す。



$C_r = 0.02739, L_r = 1.014$

図 3 解析結果

図 3 より、力法の解析によって、シェルの曲面がうまく表現できており、コンプライアンスも下がっている。

### 4. 結論

本論文では、力法を 3 次元建築骨組の形状最適化問題に適用する方法を示し、また、その有効性を示した。

力法では、設計者が意図する形態が得られ、コンプライアンスも改善されることを示した。また、3次元化することで、より明瞭に、形状修正を行えることを示した。

### 参考文献

- 1) 畔上秀幸：形状最適化問題の解法，計算工学，Vol.2, No.4, pp.27-35, 1997
- 2) 下田昌利，呉志強，畔上秀幸，桜井俊明：汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法（力法によるアプローチ），日本機械学会論文集，A 編，60 巻，pp.2418-2425, 1994.10
- 3) 畔上秀幸：線形弾性問題における領域最適化解析（力法によるアプローチ），日本機械学会，A 編，60 巻，pp.2312-2318, 1994
- 4) 藤井大地，垣田仁：力法による骨組構造の形状最適化，日本建築学会構造系論文集，第 77 巻，第 682 号，pp.1881-1886, 2012.12