36. Hamiltonian MPS 法を用いた建築構造の弾性解析

1310920032　　山下真輝
指導教員　　藤井大地　教授

Hamiltonian MPS 法，弾性解析，形態創生，動的解析，粒子法

1. はじめに

３次元の設計領域から自由な形態を創生できる手法として，ボクセル有限要素法を用いた位相最適化手法がある．この方法を用いて，建築構造の形態創生を試みている．ただし，得られる形態には座屈しやすい部材が現れる場合がある．そこで本研究ではボクセル有限要素法の代わりに，非線形弾性体の解析のため鈴木，越塚によって開発された粒子法で菊池らが改良した Hamiltonian MPS 法 [1)] を用いて幾何学的非線形を考慮した建築構造の形態創生手法を開発することを目指している．

しかしながら，これまで建築構造の解析に粒子法が適用された例はほとんど無いため、本論文では，HMPS 法のプログラムを作成し，建築構造解析の基本となる軸方向変形，せん断変形，曲げ変形についての解析精度を検証する．なお，静的弾性解析を動的に行う方法としては，荷重を徐々に増加させて目的の荷重に到達させる方法（以下，動的荷重増分法と呼ぶ）も考えられる．本論文では，この方法で静的荷重を衝撃力として与える方法（以下，動的緩和法と呼ぶ）と比較し，動的緩和法の有効性を検証する．

2. HMPS法の概要

弾性体における粒子iの支配方程式は次式である．

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{1}$$

ここで，ρ_iは粒子iの密度，$\mathbf{v}_i$は粒子iの速度，$\mathbf{r}_\mathrm{i}$は粒子iの変位である．

$$W_i = \sum_j \Pi_j : \mathbf{F}_j \tag{2}$$

W_iはひずみエネルギー関数であり，第1Piola-Kirchhoff応力テンソル$\mathbf{\Pi}$は

$$\Pi_i = \mathbf{F}_i \mathbf{S}_i \tag{3}$$

で与えられる．$\mathbf{F}_i$は変形勾配テンソル，$\mathbf{S}_i$は第2Piola-Kirchhoff応力テンソルである．

$\mathbf{r}_{ij}$は現在時刻の粒子i,j間の相対位置ベクトル，$\mathbf{r}_{ij}^0$は初期時刻の相対位置ベクトルとし，重み関数w_{ij}^0を次式で定義する．

$$w_{ij}^0\left(\left|\mathrm{r}_{ij}^0\right|\right) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{r}_e}{\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|} - 1 & \left(0 < \left|\mathbf{r}_{ij}^0\right| < r_e\right) \\ 0 & \left(r_e \le \left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) \end{cases} \tag{4}$$

ここで，r_eは影響半径を表し，粒子間距離の2～4倍に設定する．(小さいほど相互作用する粒子の数が減るので計算時間が短くなるが，小さすぎると不安定になる)．

HMPS法では変形勾配テンソル$\mathbf{F}_i$を重みつき最小二乗近似により次式で求める．

$$\mathbf{F}_i = \left[\sum_j \mathbf{r}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0\right] \mathbf{A}_i^{-1} \tag{5}$$

と得られる．ただし記号$\otimes$はテンソル積を示し

$$\mathbf{A}_i = \sum_j \mathbf{r}_{ij}^0 \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0 \tag{6}$$

また，$\mathbf{S}$は第2Piola-Kirchhoff応力テンソルであり，次式で表される．

$$\mathbf{S}_i = 2\mu \mathbf{E}_i + \lambda \mathrm{tr}(\mathbf{E}_i)\mathbf{I} \tag{7}$$

ここに，μはせん断弾性係数，λはlaméの定数で，E_iはGreen-Lagrange ひずみである．$\mathbf{I}$は2階の恒等テンソルであり，$\mathrm{tr}(\mathbf{E}_i)$は成分で表すと次式になる．以上より，粒子iの運動方程式を

$$\mathbf{f}_{i,HMPS} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \sum_j \left(\mathbf{F}_i \mathbf{S}_i \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{r}_{ij}^0 + \mathbf{F}_j \mathbf{S}_j \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{r}_{ij}^0\right) w_{ij}^0 \tag{9}$$

と導くことができる．さらに，Symplectic性のある時間積分を

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_i^k + \Delta t [\partial \mathbf{v}_i / \partial t]^k \tag{10}$$

$$\mathbf{r}_i^{k+1} = \mathbf{r}_i^k + \Delta t \mathbf{v}_i^{k+1} \tag{11}$$

と行えば，エネルギー保存性のよい解析ができる．

本研究では動的解析における計算の安定化を図るため，単位体積ごとに次式のMPS法の粘性力を与えることで粒子の速度を減衰させた．

$$\mathbf{f}_{i,visco} = \rho v_{\mathrm{MPS}} \frac{2d}{\lambda n^0} \sum_j \left(\mathbf{v}_\mathrm{j} - \mathbf{v}_\mathrm{i}\right) w_{ij}^0 \tag{12}$$

ここで，ρは密度[kg/m³]，v_{MPS}は粘性力の係数[m²/s]，$\mathbf{v}$は粒子の速度ベクトルである．また，λおよびn^0はMPS法におけるラプラシアンモデルの係数であり，全ての粒子で共通の値を用いる．

3. 解析結果

図1は，基本的な静的弾性解析である軸方向変形の解析例で，解析結果が表1である．解析モデルはX軸0.04[m],

Elastic Analysis of Building Structure Using Hamiltonian MPS Method

YAMASHITA Masaki
構造解析研究室

Y軸0.01[m]，Z軸0.01[m]となり，拘束粒子(X軸方向のみ)をX軸方向に1層，外力(P)を5000[N]，ヤング率 210×10^9 [N/m^2]，粒子密度7850[Pa]，粒子間距離0.001[m]，ポアソン比0.3となっている．

次に図2のモデルはせん断変形の解析例で，表2は解析結果となる．解析モデルはX軸0.02[m]，Y軸0.02[m]，Z軸0.02[m]，拘束粒子(X,Y,Z軸)をX軸方向に4層，外力(P)を2000[N]，ヤング率 210×10^9 [N/m^2]，粒子密度7850[Pa]，粒子間距離0.001[m]，ポアソン比0.3となっている．

次に図4の片持ち梁モデルは曲げ変形の解析例で，図3が動的緩和法での粘性係数の変化，表3が粒子間距離を変えた場合と部材長を変化させた2つの解析です．解析モデルはY軸0.02[m]，Z軸0.02[m]となり，拘束粒子(X，Y，Z軸)をX軸方向に4層，ヤング率 210×10^9 [N/m^2]，粒子密度7850[Pa]，粒子間距離0.001[m]，ポアソン比0.3となっている．粘性係数変化の解析ではX軸0.16[m]，粒子間距離変化の解析では，X軸は表3の通りとなっている．

最後に図5は両端固定梁と単純梁の大変形解析の例である．外力(P)はそれぞれ210[kN]と420[kN]である．

表1　軸方向変形の解析結果

	動的緩和法	動的荷重増分法
理論解Ve[m]	9.286×10^{-6}	
解析結果V[m]	9.135×10^{-6}	9.133×10^{-6}
V/Ve	0.9838	0.9835
理論解 σ_e [N/m^2]	5.0×10^{7}	
解析結果 σ_x [N/m^2]	5.085×10^{7}	4.983×10^{7}
σ_x / σ_e	1.0171	0.9965

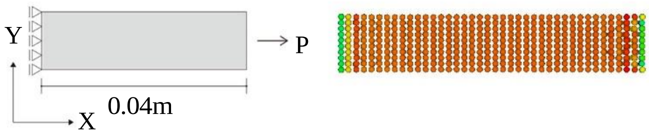

図1　軸方向変形の解析モデルとミーゼス応力分布

表2　せん断変形の解析結果

	動的緩和法	動的荷重増分法
理論解Ve[m]	1.238×10^{-6}	
解析結果V[m]	1.250×10^{-6}	1.249×10^{-6}
V/Ve	1.0092	1.0088
理論解 τ_e [N/m^2]	5.0×10^{6}	
せん断応力 τ [N/m^2]	4.997×10^{6}	4.995×10^{6}
τ / τ_e	0.9993	0.9990

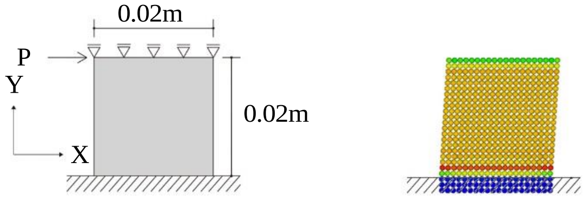

図2　せん断変形の解析モデルとミーゼス応力分布

表3　粒子間距離変化の解析結果

X軸[m]	理論解[m]	粒子間距離(l_0)の解析解[m]		
		$l_0=0.004$m	$l_0=0.002$m	$l_0=0.001$m
0.04	3.18×10^{-11}	1.53×10^{-10}	5.06×10^{-11}	4.67×10^{-11}
0.08	3.05×10^{-10}	5.23×10^{-10}	3.52×10^{-10}	3.27×10^{-10}
0.16	2.44×10^{-9}	3.46×10^{-9}	2.70×10^{-9}	2.52×10^{-9}

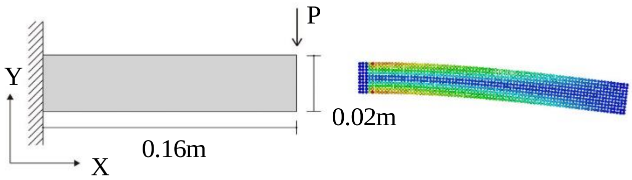

図4　曲げ変形の解析モデルとミーゼス応力分布

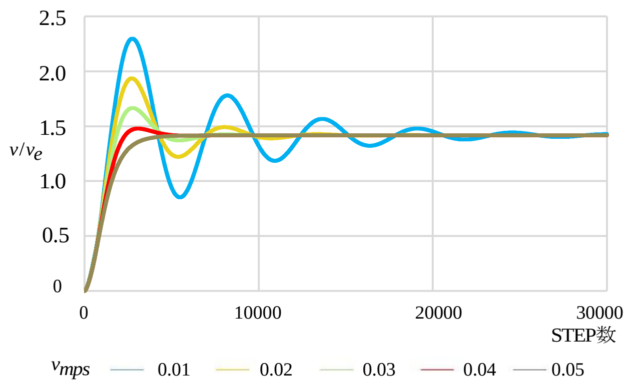

図3　粘性係数変化の解析結果

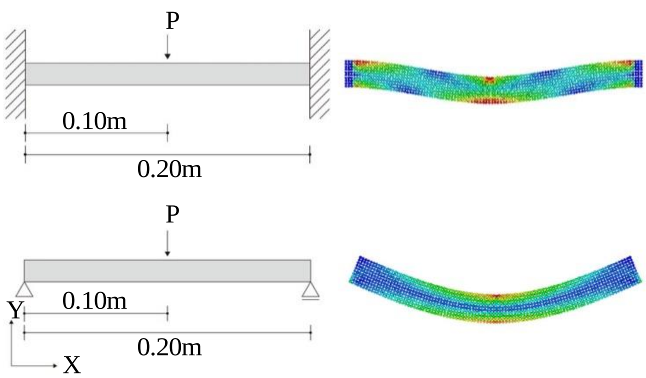

図5　両端固定梁と単純梁の大変形解析

4. 考察・まとめ

今回の解析では，軸方向，せん断，曲げ変形と基本的な例題が理論解と近い解析解がでた．加えて粒子間距離や粘性係数の変化による解析解の変化もわかった．これにより，HMPS法での3次元弾性解析の有効性と大変形にも対応できることが証明できたと思う．

参考文献

1) 菊池貴博，道脇幸博，越塚誠一，神谷哲，長田尭，神野暢子，外山義雄，壁境界条件としてペナルティ法を導入したHamiltonian MPS法による超弾性体モデルの単軸圧縮シミュレーション，日本計算工学会論文集，Paper No.201400

構造解析研究室