7.　音の伝播シミュレーションに関する基礎研究

02168103　　森下　正邦
指導教官　　藤井　大地　助教授

有限要素法　　音波　　　伝播シミュレーション

1. 序論

音波の伝播解析は，室内の音響設計や騒音問題などに対し必要である。しかしながら，音響解析理論は建築分野ではあまり扱われないため，建築技術者にはなかなか理解されにくいのが現状である。そこで本研究では，そのような建築技術者にも容易に利用できる有限要素法を用いた音の伝播解析プログラムの開発を行う。

既往の研究としては，非定常差分法を用いたインパルス応答の計算法について，桐生市市民会館小ホールを対象として，1/10 縮尺模型実験，実物測定の三者のデータを比較する研究[1)]や，ホールなどでは優れた音響効果を得ることを目的としてしばしば用いられている拡散体を，音の入射角度に着目して，拡散体による音波の散乱性能を模型実験を用いて検討する研究[2)]などがされている。

2. 音波と力学の比較

本研究では，建築技術者の理解を容易にするために，力学の基礎式となる弾性論の基礎式と，音波解析の基礎式の比較を試みた。

表 1 は，弾性論の基礎式と音波解析の基礎式の対象関係を示したものである。

表 1　音波理論と弾性論の比較

	音波理論	弾性論
変位	u,v,w	u,v,w
ひずみ	$\Delta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z$
応力	p	$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_x,\tau_y,\tau_z$
ひずみ変位式	$\Delta=\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z$	$\varepsilon_x=\partial u/\partial x$　$\gamma_{xy}=\partial u/\partial y+\partial v/\partial x$ $\varepsilon_y=\partial v/\partial y$　$\gamma_{yz}=\partial v/\partial z+\partial w/\partial y$ $\varepsilon_z=\partial w/\partial z$　$\gamma_{zx}=\partial u/\partial z+\partial w/\partial x$
応力ひずみ式	$p=-K\Delta$	$\sigma_x=E\varepsilon_x$　$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}$ $\sigma_y=E\varepsilon_y$　$\tau_{yz}=G\gamma_{yz}$ $\sigma_z=E\varepsilon_z$　$\tau_{zx}=G\gamma_{zx}$
力の釣合式	$\rho(\partial^2u/\partial t^2)=-(\partial p/\partial x)$ $\rho\left(\partial^2v/\partial t^2\right)=-(\partial p/\partial y)$ $\rho\left(\partial^2w/\partial t^2\right)=-\partial p/\partial z$	$\rho\left(\partial^2u_x/\partial t^2\right)=-\left(\partial\sigma_x/\partial x+\partial\tau_{xy}/\partial y+\partial\tau_{zx}/\partial z\right)$ $\rho\left(\partial^2u_y/\partial t^2\right)=-\left(\partial\tau_{xy}/\partial x+\partial\sigma_y/\partial y+\partial\tau_{yz}/\partial z\right)$ $\rho\left(\partial^2u_z/\partial t^2\right)=-\left(\partial\tau_{zx}/\partial x+\partial\tau_{yz}/\partial y+\partial\sigma_z/\partial z\right)$
仮想仕事式	$\iiint_\Omega(p\delta\Delta)d\Omega-\iiint_\Omega\left(\overline{X}\delta u+\overline{Y}\delta v+\overline{Z}\delta w\right)d\Omega$ $-\left(\overline{t}_x\delta u+\overline{t}_y\delta v+\overline{t}_z\delta w\right)dS=0$	$\iiint_\Omega\begin{pmatrix}\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z\\+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx}\end{pmatrix}d\Omega$ $-\iiint_\Omega\left(\overline{X}\delta u+\overline{Y}\delta v+\overline{Z}\delta w\right)d\Omega$ $-\left(\overline{t}_x\delta u+\overline{t}_y\delta v+\overline{t}_z\delta w\right)dS=0$

3. 有限要素法による音波解析

音波理論と弾性論の比較（表 1）から，力学解析の有限要素法の式を音波の式に変換する。

表 1 の音波の仮想仕事式を部分積分すると次式が得られる。

$$\iiint_\Omega\left(\rho\ddot{u}\delta u+\rho\ddot{v}\delta v+\rho\ddot{w}\delta w\right)d\Omega-\iiint_\Omega p\delta\Delta d\Omega+\iint_{S_\sigma}\left(\overline{p}_x\delta u+\overline{p}_y\delta v+\overline{p}_z\delta w\right)dS=0 \tag{1}$$

(1)式が有限要素法で離散化する場合の基礎式となる。

次に，有限要素法の定式化を示す。有限要素法（変位法）では，対象とする物体を要素（小領域）に分割する。ここでは，8 節点アイソパラメトリック要素を用いる。この場合，要素内の変位と座標は要素の節点変位と節点座標を用いて，次式のように表される。

$$\mathbf{u}=\mathbf{N}_d\mathbf{d}^e,\quad \mathbf{X}=\mathbf{N}_d\mathbf{X}^e \tag{2}$$

$$\mathbf{X}=\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix},\mathbf{u}=\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix},\mathbf{X}^e=\begin{Bmatrix}\mathbf{x}^e\\\mathbf{y}^e\\\mathbf{z}^e\end{Bmatrix},\mathbf{d}^e=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^e\\\mathbf{v}^e\\\mathbf{w}^e\end{Bmatrix},\quad \mathbf{N}_d=\begin{bmatrix}\mathbf{N}&&\\&\mathbf{N}&\\&&\mathbf{N}\end{bmatrix} \tag{3}$$

ここに，u,v,w は x,y,z 方向の変位，$\mathbf{x}^e,\mathbf{y}^e,\mathbf{z}^e$ は節点座標ベクトル，$\mathbf{u}^e,\mathbf{v}^e,\mathbf{w}^e$ は節点変位ベクトル，$\mathbf{N}$ は形状関数を表す。

(2)式をひずみー変位関係式（表 1）に代入すると，

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}\mathbf{u}^e+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}\mathbf{v}^e+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\mathbf{w}^e=\mathbf{B}\mathbf{d}^e \tag{4}$$

ここに，

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}&\dfrac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}&\dfrac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\end{bmatrix} \tag{5}$$

(4)式を応力ーひずみ式(表 1)に代入すると

$$p=-K\Delta=-K\mathbf{B}\mathbf{d}^e \tag{6}$$

要素領域 Ω^e で(1)式が成り立つとして，(2), (4), (6)式を代入し，$\delta\mathbf{d}^e$ が任意であることにより，次式が得られる

$$\mathbf{m}^e\ddot{\mathbf{d}}^e+\mathbf{k}^e\ddot{\mathbf{d}}^e=\mathbf{f}^e \tag{7}$$

ただし，

$$\mathbf{m}^e=\iiint_{\Omega^e}\rho\mathbf{N}_d{}^T\mathbf{N}_d d\Omega,\ \mathbf{k}^e=\iiint_{\Omega^e}K\mathbf{B}^T\mathbf{B}d\Omega,\ \mathbf{f}^e=-\iint_{S_\sigma{}^e}\mathbf{N}_d{}^T\overline{\mathbf{p}}\,dS$$

(8),(9),(10)

ここに，$\mathbf{m}^e$ は要素質量マトリクス，$\mathbf{k}^e$ は要素剛性マトリックス，$\mathbf{f}^e$ は要素の等価節点圧力ベクトルである。

(7)式を節点変位の連続性を考慮して，領域を分割したすべての要素について重ね合わせを行うと，次式の領域全体の運動方程式が得られる。

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{d}}+\mathbf{k}\mathbf{d}=\mathbf{f} \tag{11}$$

一般には，(11)式の運動方程式に減衰項が付加されて次式の運動方程式を解くことになる。

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{d}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{d}}+\mathbf{k}\mathbf{d}=\mathbf{f} \tag{12}$$

上式を時々刻々積分することにより，音波の変位，速度，加速度応答を求めることができる。なお，本研究では，数値積分には平均加速度法を用いる。

4. 解析条件

4.1　解析精度の検証

本節では，本研究で開発したプログラムの解析精度の検証

を行う。プログラムに影響を与えるものは，平均加速度法で用いる数値積分の時間増分と，領域の要素分割数である。そこで，この 2 つのパラメーターについて，音波の周期および波長に対してどれだけの分割を行ったらよいかを調査する。

図 1 は，一次元解析モデルを示す。領域の長さは，1 波長に相当する 0.8mとする。解析条件は，音源の周波数 440Hz（周期 0.0023s），音源発生時間 0.1s，媒質（空気）の体積弾性率 140000Pa，単位体積質量 1.182kg/m^{3}とする。なお，音速は，344.1m/sとしている。

平均加速度法の時間増分は，1 周期を，それぞれ 6，8，10，20，30，40，50，60，70，80，90 で分割したものと，100 分割したものを比較する。図 2 は，20 分割と 100 分割における t=T 時刻の変位と音圧分布を示している。図より，時間増分 20 分割とすれば，ほぼ十分な解析精度が得られることがわかる。

領域の要素分割数は，1 波長を 6，8，10，12，16，20，30，40，50，60，70，80，90 分割したものと，100 分割したものを比較する。図 3 は，16 分割と 100 分割における t=T 時刻の変位と音圧分布を示している。図より，領域の要素分割を 16 分割とすれば，ほぼ十分な解析精度が得られることがわかる。したがって，以下の解析では，平均加速度の時間増分は周期 20 分割，領域の要素分割数は 1 波長を 16 分割とする。

4.2　室内の音の伝播シミュレーション

次に，二次元モデルにより，室内の音の伝播シミュレーションの有効性を確かめる。

図 4(Case2)および図 5(Case3)は，高さ 3m，幅 8mの室内をモデル化したものである。ただし図 5 の室内中央には，音を遮る仕切りを設置している。音源および空気媒体の解析条件は，前節と同じにする。また，Case3 の仕切りは，ヤング係数 10000kN/m^2，単位体積質量 400 kg/m^{2}の檜を使用する。図には，t=T（図 4 のみ），2T，3T，4T，5T（図 5 のみ）時刻の音圧分布を示している。

図 4，5 より，時刻 t=2T までは，ほぼ同一の位相となっているが，図 4 の t=3T 以降では，天井および壁からの反射の影響があらわれ，図 5 の t=3T 以降では，仕切りの影響があらわれている。

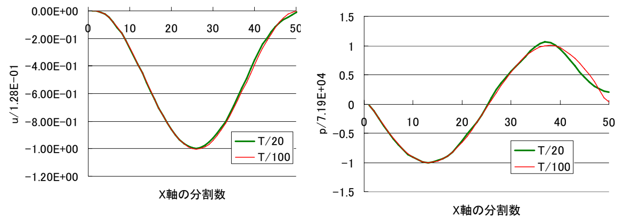
5. まとめ

本研究では，建築技術者にも容易に利用できる有限要素法を用いた音の伝播解析プログラムの開発を行った。一次元の解析例により，時間積分の時間増分を，1 周期の 1/20，領域の要素分割数を，1 波長の 1/16 とすれば，十分な解析精度が得られることがわかった。また，二次元の解析例により，室内の音の伝播がシミュレートできることがわかった。

参考文献

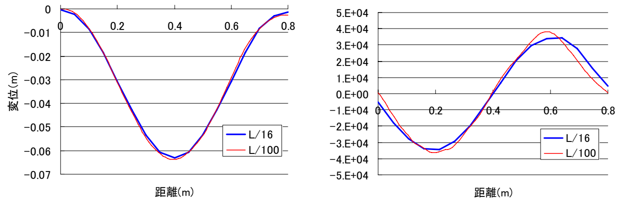
1) 坂本慎一，伊藤清之，清宮拓磨，大脇雅直，橘秀樹：ホールの差分法解析および縮尺模型実験と実物測定との対応，建築大会梗概集，環境工学 I，D-1,pp.69-70,1999
2) 横田考俊，坂本慎一，橘秀樹：壁面拡散体の効果に関する検討－その 1　拡散体による音波散乱に関する実験－，建築大会梗概集，環境工学 I，D-1,pp.37-38,1998

図 1　解析モデル(Case1)



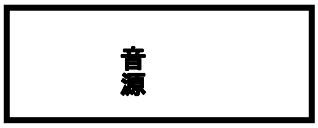
a)　変位の比較(時間増分)　　b)　音圧分布の比較(時間増分)

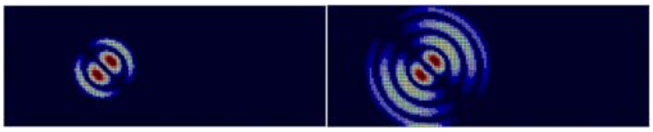
図 2　時間増分の比較



c)　変位の比較（領域の分割数）　d)　音圧分布の比較(領域の分割数)

図 3　領域の要素分割数の比較




a)　t=1T　　　b)　t=2T

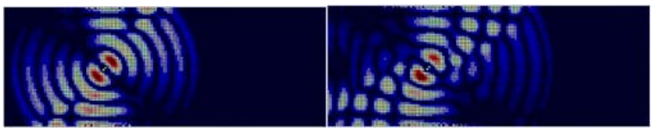
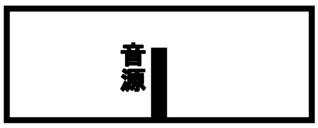
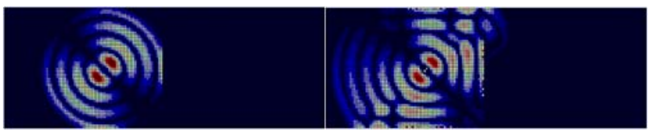

c)　t=3T　　　d)　t=4T

図 4　二次元解析結果(Case2)




a)　t=2T　　　b)　t=3T

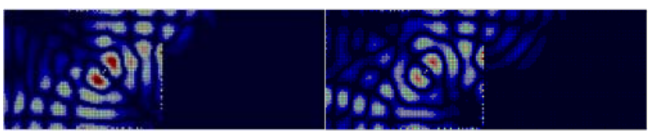

c)　t=4T　　　d)　t=5T

図 5　二次元(仕切りあり)解析結果(Case3)