

# CFRP を用いた床スラブの最適補強に関する研究

## OPTIMUM REINFORCEMENT OF FLOOR SLAB BY CFRP USING TOPOLOGY OPTIMIZATION METHOD

中川恭一\*, 森村毅\*\*, 藤井大地\*\*\*  
*Kyoichi NAKAGAWA, Tsuyoshi MORIMURA, Daiji FUJII*

In this paper, the topology optimization method for reinforcement of floor slab using CFRP plates is presented. This method is used to find an efficient layout of CFRP plates on a floor slab. The floor slab reinforced by CFRP plates is modeled by a laminate plate. The laminate plate is analyzed by FEM using solid element. The CFRP layer is separated by a necessary part and an unnecessary part using topology optimization method. The density method is adopted for the topology optimization analysis. By using such method for the reinforcement of floor slabs, it is possible to efficient reinforcement using CFRP plates.

**Keywords:** *CFRP, topology optimization, floor slab, slab with difference level, density approach, solid element.*

炭素繊維板, 位相最適化, 床スラブ, 段差付きスラブ, 密度法, ソリッド要素

### 1. はじめに

近年、社会情勢の悪化に伴い、新築よりも補強・補修によって建物の安全性を確保し、延命を図る方法が多くとられており、また、研究分野においても各構造部材の補強・補修に関する研究が非常に多くなっている。そこで最近では、新素材の研究が進み、炭素繊維をあらかじめ樹脂で硬化させたプラスチック板(以下 CFRP 板)をコンクリート構造物に接着することで補強を行う工法が開発され注目されている。

その補強方法は様々であるが、米奥<sup>1)</sup>らが損傷を一度受けた中高層 RC 造建物の下層階を想定したフレームを対象に、補修および炭素繊維シートによる補強を施して再加力実験を行っている。また、長田<sup>2)</sup>らが、炭素繊維シートを用いた RC 構造物のせん断補強効果に寸法効果の影響があることの懸念に対し、正負交番繰り返し載荷実験を実施した。

また、近年、森村ら<sup>3), 4)</sup>が、中空スラブを対象として、CFRP 板の補強による剛性、強度の変化を調べるための実験的研究を行っている。また、藤井、小泉、森村ら<sup>4)</sup>は、中空スラブにおける CFRP 板の最適な配置を位相最適化手法によって解析的に求める方法を提案し、CFRP 板の貼り方の違い(配置方法)による剛性、強度、振動特性の違いを実験によって検討している。

そこで本研究では、これまでの研究を踏まえ、実際、既存建物における様々な状況および形状の床スラブに対して、どのように CFRP 補強を施せば効率的でなおかつ効果的な補強を行えるのかを解析的に検討を行い、その有効性を確かめる。

本報告第 2 章では、CFRP 板補強を行った床スラブの有限要素解析法を示す。第 3 章では、CFRP 板の最適配置を求めるための位相最適化解析の方法を示す。第 4 章では、正方形床スラブを対象として、実際の様々な存在しうる制約条件下での CFRP 板の最適な貼り方を求め、一般的な補強方法との比較・考察を行う。また、長方形床スラブの縦・横比の変化に対して、CFRP 板の最適配置がどのように変化するかも調査する。第 5 章では、段差付きスラブを対象として、そのような複雑なスラブに対しても位相最適化手法により最適な貼り方を求めることを提案し、一般的な補強方法との比較を行い、最適位相を参考にした補強方法の有効性を検証する。第 6 章では以上のまとめを述べる。

### 2. 積層板の解析法

CFRP 補強を施した床スラブは、積層板にモデル化し、ここでは、これを 8 節点ソリッド要素を用いて解析を行う<sup>5)</sup>。ただし、通常の変位法による 8 節点アイソパラメトリック要素を用いると、要素内で変位が線形に仮定されるため、応力・歪みが要素内で一定値となる。この場合、板厚方向に十分な分割を行わないと応力の精度が得られない。そこで、ここでは、同じ 8 節点要素で、変位も応力も両方線形関数で仮定する応力仮定要素(ハイブリッド要素)<sup>6)</sup>を用いる。

この方法では、要素内の変位と座標は通常のアイソパラメトリック要素と同様に次式で仮定する(図 1 参照)。

\*近畿大学工学部 大学院生

\*\*近畿大学工学部 教授・博士(工学)

\*\*\*近畿大学工学部 助教授・博士(工学)

\* Graduate Student, School of Engineering Kinki Univ.

\*\*Professor., School of Engineering Kinki Univ., Dr. Eng

\*\*\* Associate Prof., School of Engineering Kinki Univ., Dr. Eng.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}^e & x &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) x^e \\ v(x, y, z) &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{v}^e & y &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) y^e \\ w(x, y, z) &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{w}^e & z &= \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) z^e \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $u, v, w$  は  $x, y, z$  方向の変位、 $\mathbf{N}$  は形状関数、 $\mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e, \mathbf{w}^e$  と  $x^e, y^e, z^e$  は、節点変位と座標のベクトルである。

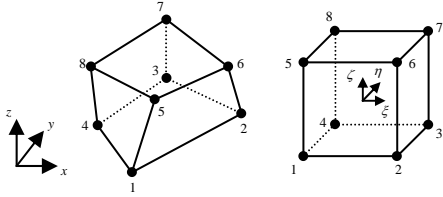


図1 8節点アイソパラメトリック要素

また、応力も次式のように仮定する。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (3)$$

この場合、(1)式と(3)式から2つの歪みベクトル

$$(1) \text{式から得られる歪み} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (4)$$

$$(3) \text{式から得られる歪み} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (5)$$

が得られる。ここに、 $\boldsymbol{\varepsilon}$  は歪みベクトル、 $\mathbf{B}$  は歪み-変位マトリクス、 $\mathbf{D}$  は弾性マトリクスである。これら2つの歪みを適合させるため、次式の条件を課す。

$$\iiint_{\Omega^e} \delta \boldsymbol{\sigma}^T [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{d}^e] d\Omega = 0 \quad (6)$$

(6)式の $\boldsymbol{\sigma}$ に(3)式を代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{M}_B \mathbf{d}^e \quad (7)$$

ただし、

$$\mathbf{M}_s = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s d\Omega, \quad \mathbf{M}_B = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{B} d\Omega \quad (8)$$

また、(5)式より、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{M}_B \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}^e \quad (9)$$

したがって、要素剛性マトリクスは次式より得られる。

$$\mathbf{k}^e = \iiint_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} d\Omega = \mathbf{M}_B^T \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{M}_B \quad (10)$$

(10)式の剛性マトリクスを用いる解析では、未知数は通常のアイソパラメトリック要素と同じ $\mathbf{d}^e$ となる。したがって、解析自由度は同じで、しかも、(3)式で示されるように垂直応力が座標に関して線形で仮定されるため、板厚方向の分割をしなくても通常の板曲げ要素と同等の精度が得られる。

### 3. 位相最適化問題の定式化

本問題は、図2に示すように積層板の表面にCFRP材料の層を設定し、重量の制約の下に、CFRP材料の要素密度を最適化することで、CFRPの最適位相を求める問題となる。したがって、本問題の設計変数は、CFRP材料要素の密度、制約条件はCFRP材料の総重量となる。また、最適化の目的は、CFRP補強によりスラブの剛性を高めることとし、目的関数をコンプライアンス(歪みエネルギーの2倍)として、これを最小化する。以上の最適化問題を定式化すると次式となる。

$$\begin{aligned} \min \quad & C(\mathbf{x}) = \mathbf{d}^T \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i^{eT} x_i^p \mathbf{k}_i^e \mathbf{d}_i^e \\ \text{subject to} \quad & W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i v_i^e \leq \bar{W} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $C$  はコンプライアンス、 $\mathbf{k}$  は全体剛性マトリクス、 $\mathbf{d}$  は節点変位ベクトル、 $x_i$  は0以上1以下の要素密度を表す設計変数、 $n$  は設計変数の総数、 $\mathbf{d}_i^e, \mathbf{k}_i^e$  は  $i$  番目要素の節点変位ベクトルと剛性マトリクス、 $W$  は総重量、 $v_i^e$  は  $i$  番目要素の体積、 $\bar{W}$  は重量の制約値を表す。また、 $p$  は、0と1の間の中間的な密度を防ぐためのペナルティ係数である(通常2~3で与える)。

目的関数と制約条件の設計変数に関する感度係数は、次式から計算される。

$$\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -p x_i^{(p-1)} (\mathbf{d}_i^{eT} \mathbf{k}_i^e \mathbf{d}_i^e), \quad \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_i} = v_i^e \quad (12)$$

また、繰り返し計算の各ステップでは、設計変数に変動幅(move limit)の制約を課す必要がある。すなわち、

$$x_i^{(k-1)} - \zeta \leq x_i^{(k)} \leq x_i^{(k-1)} + \zeta \quad (13)$$

ここに、 $k$  は最適化計算の繰り返しステップ、 $\zeta$  はムープリミットを表す(通常0.1以下で与える)。

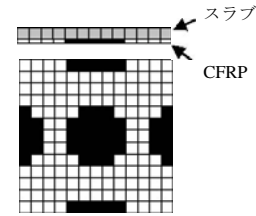


図2 CFRPの最適配置を求める最適化問題

### 4. 正方形床スラブの補強に関する検討

ここでは、正方形床スラブを対象として、CFRP板の最適な補強方法(配置)および補強効果について検討する。

#### 4.1 解析モデルおよび解析条件

図3は、床スラブの解析モデルを示している。解析は、1/4領域で行い、要素分割数は20×20分割とする。また、板厚方向は、床スラブの層とCFRP板の層に分ける。境界条件は、周辺固定と周辺ピン支持の2種とし、荷重は、10kN/m<sup>2</sup>の鉛直等分布荷重とする。なお、周辺ピン支持の場合は、床スラブ層を2分割し、中立面の周辺節点のみを固定する。また、床スラブのヤング係数は2.27×10<sup>4</sup>N/mm<sup>2</sup>、ポアソン比0.25、CFRP板のヤング係数は1.5×10<sup>5</sup>N/mm<sup>2</sup>、ポアソン比は0.3とする。

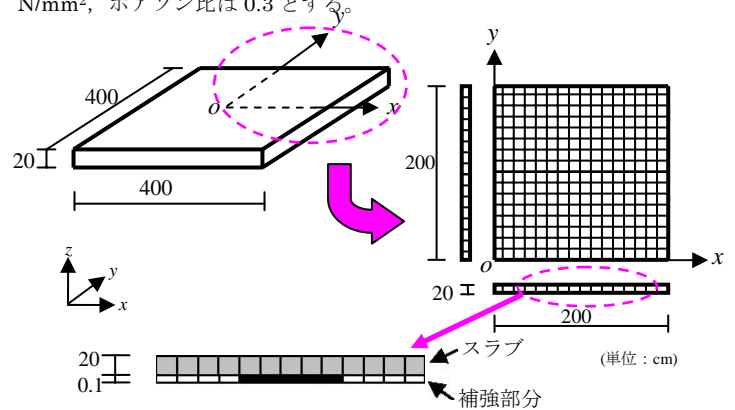


図3 解析モデル

#### 4.1 CFRP 板の最適位相（貼り方）に関する検討

ここでは、図 4, 5 の a)~i)は、周辺固定、周辺ピン支持の場合で、CFRP 板の補強量を床全面に貼る場合の 10%~90%（10%間隔）とした場合の最適位相を示す。

##### a) 周辺固定支持

周辺固定した床スラブに関しては、端部、中央部ともにバランスよく補強しなければならないのが解析結果よりわかる。

また、CFRP 補強量がスラブ面の 60%を超えた辺りから図 4 の f)のようにせん断応力に対しても補強するような位相が見られた。

##### b) 周辺ピン支持

周辺ピン支持の床スラブに関しては、隅角部と床中央部を補強する必要があることがわかり、主に中央部への補強を必要とすることが図よりわかる。

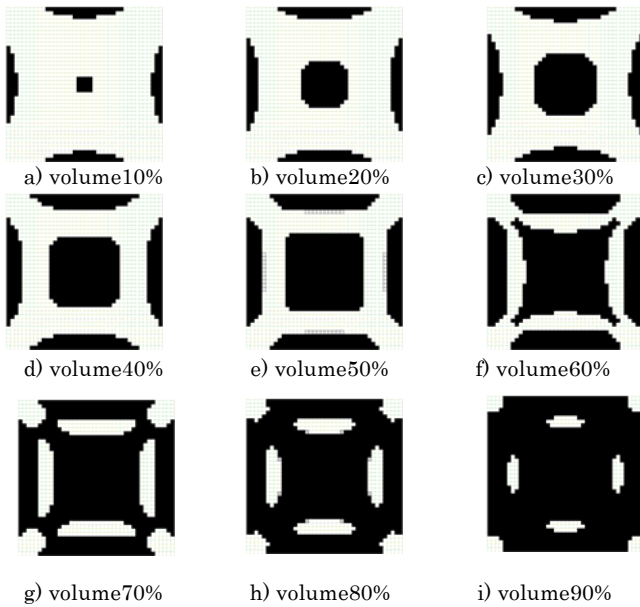


図 4 最適位相(周辺固定支持)

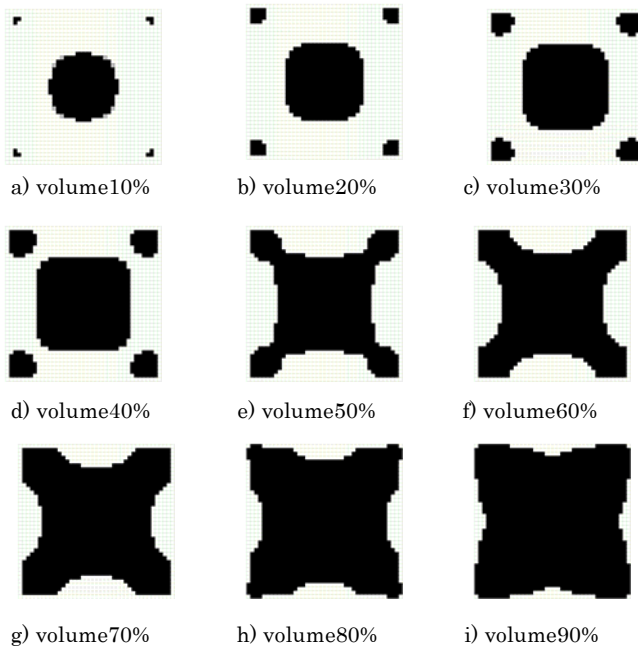


図 5 最適位相(周辺ピン支持)

#### 4.2 CFRP 板の補強効果に関する検討

ここでは、剛性低下させたスラブに対してどの程度の CFRP 板の補強で、元の剛性への復元が可能かを位相最適化により求めた貼り方と従来の CFRP をスラブに一方方向に貼り付ける補強と比較し検証する。また、使用する CFRP 板の厚さは、2, 4, 6,mm とし、テープ幅を 5cm とし、板厚比に対する効果も検討する。なお、4.1 節に示した最適位相は、CFRP 板の厚さには依存しないため、CFRP 板の配置は厚さに対しては同じにしている。

図 6, 7 は、剛性を 20%低下させたスラブを対象として、周辺固定とピン支持の場合で、CFRP 板の補強量（床全面に貼る場合に対する面積比率）に対する床中央部のたわみ比（ $\delta_0$  は剛性低下前の無補強床スラブの中央たわみ）の変化を示したものである。なお、図中の実線は、最適位相による値、破線は、従来型の貼り方による値を示す。図 6 より、周辺固定支持の場合、最適位相による補強では、4mm で 20%、6mm で 10%程度の補強で元の剛性に回復できるのに対して、従来型では、4mm で 70%、6mm で 55%程度補強しないと剛性が回復できない。また、図 7 より、周辺ピン支持の場合も、剛性回復のために、最適位相による補強では、4mm で 24%、6mm で 12%程度に対して、従来型では、4mm で 65%、6mm で 58%程度の補強が必要であることがわかる。また、最適位相による補強では、少ない補強量で効率のよい補強が可能であるのに対して、従来型では、50%以上貼らないと効果が薄いこともわかる。また、2mm の CFRP 板補強では、床スラブの 20%以上の剛性低下を回復することができないこともわかる。

図 8, 9 は、4mm 厚の CFRP を補強して、剛性を 10%~40%まで低下させた各床スラブに対して、何%の補強量で元の剛性に回復できるかを示した図である。図から、最適位相による貼り方では、10%の剛性低下で 10%の補強量、20%で 25%の補強量、30%で 60%の補強量、40%以下では、全面に補強しても元の剛性への回復ができないことがわかる。また、従来型では、10%の剛性低下で 30%の補強量、20%で 70%の補強量、30%以上の剛性低下したスラブに関しては、全面に補強しても元の剛性への回復はできないことがわかる。

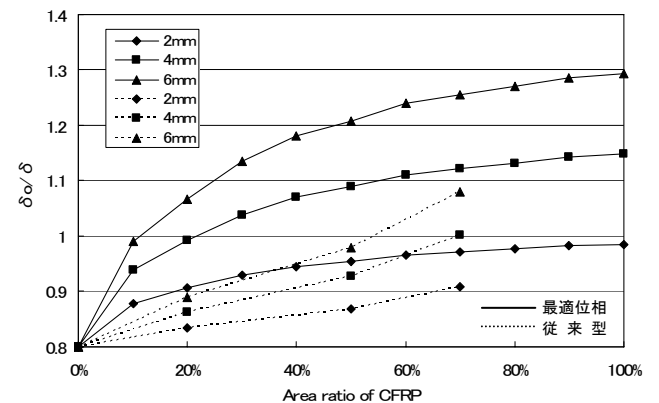


図 6 CFRP 板の補強量と床中央部のたわみ比の関係(周辺固定)

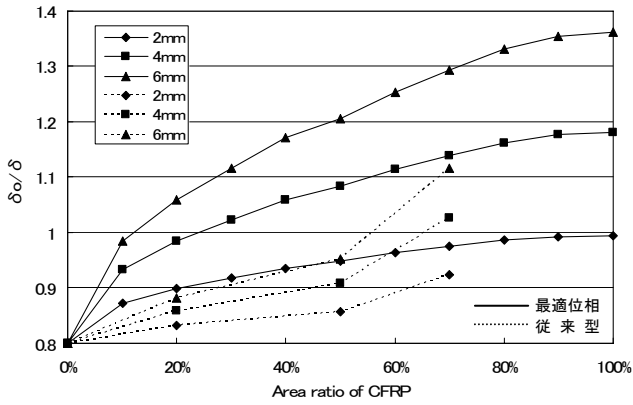


図7 CFRP 板の補強量と床中央部のたわみ比の関係(周辺ピン)

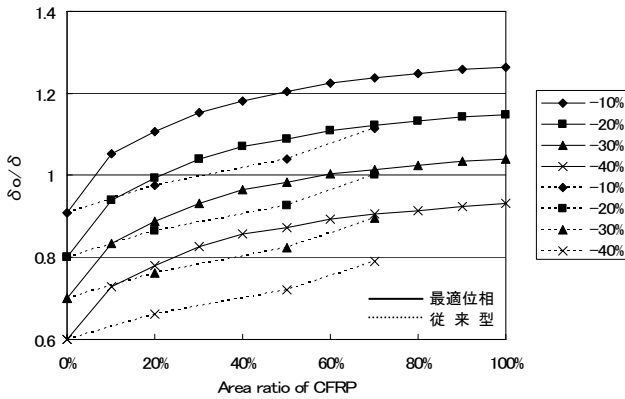


図8 床スラブの剛性低下と CFRP 板補強量の関係(周辺固定)

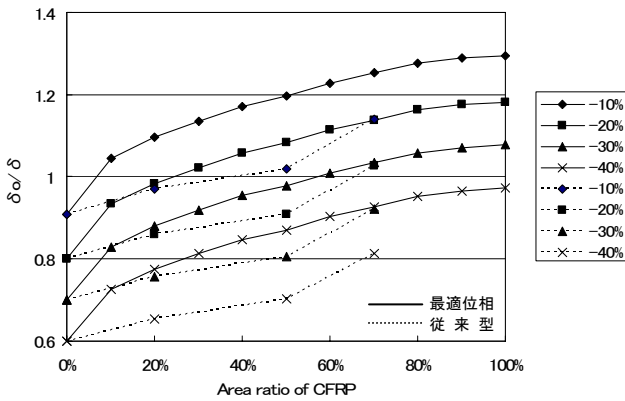


図9 床スラブの剛性低下と CFRP 板補強量の関係(周辺固定)

### 4.3 アスペクト比による最適位相

次に、長方形の床スラブの縦横比が変化した場合の CFRP 板の配置(貼り方)について検討を行う。以下の図 10 は、床スラブのアスペクト比 1:1,1:1.5,1:2,1:3 の最適位相を示す。なお、境界条件は、周辺固定支持としている。解析結果より、アスペクト比が大きくなるにしたがって、端部の補強に関しては、短辺方向に補強する量が多くなり、長辺方向は短辺方向に反比例する形で少なくなっていくのがわかる。また、図 11 は、床スラブのアスペクト比と床スラブ中央部、境界長辺部、境界短辺部の CFRP 板補強比率(面積比率)の関係をグラフにしたものである。

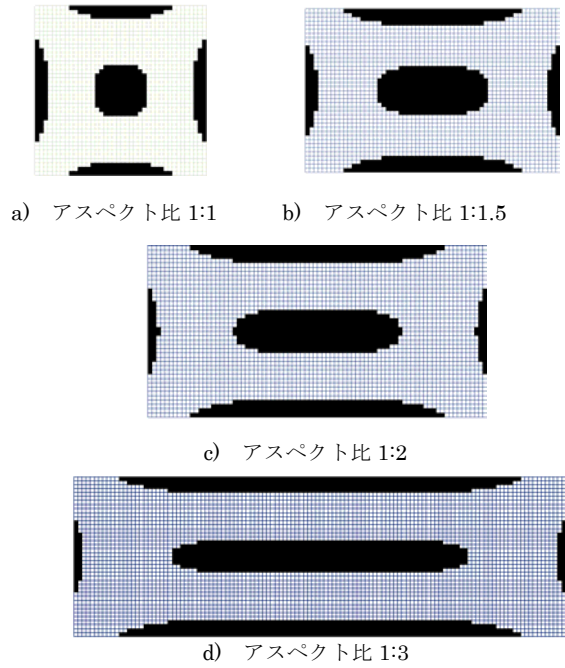


図 10 アスペクト比による最適位相の変化(volume25%)

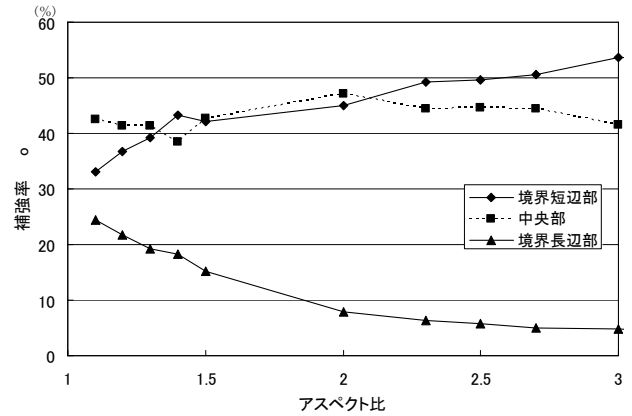


図 11 アスペクト比と CFRP 補強率の関係(volume25%)

## 5. 段差付き床スラブの補強に関する検討

集合住宅などでは、配管や設備ゾーンを設けるために、段差を有するスラブが使用されている。本章は、そのような複雑なスラブにおいても位相最適化手法を用いて最適な貼り方を求めることを提案し、検討を行う。

### 5.1 解析モデルおよび解析条件

ここでは、段差付きスラブの解析例として、文献<sup>9)</sup>を参考に、図 12 に示す解析モデルを作成した。なお、図 12 は、1/2 領域を示している。解析モデルの要素分割数は、40×20 分割とし、板厚方向に 4 層分割している。境界条件は周辺固定とし、荷重は 10kN/m<sup>2</sup> を鉛直等分布荷重としてかけている。なお、段差部分は、段差空間に相当する部分の要素のヤング係数を小さくすることによって対応している。なお、図 12 は、解析モデルにおける CFRP の貼り方を示している。すなわち、板厚方向に 4 分割し、下部スラブは、上部スラブの補強に対する CFRP 領域の確保のため、2 分割している。

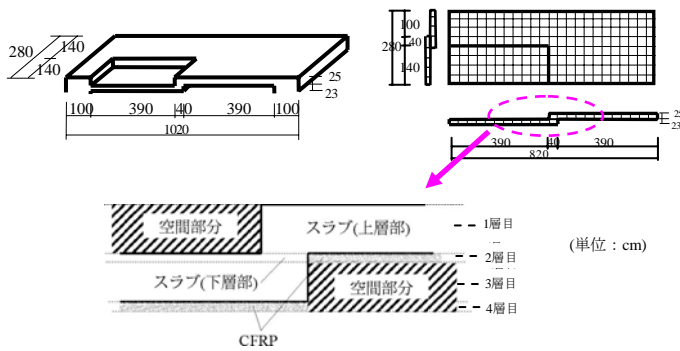


図12 段差付きスラブ解析モデル

### 5.2 段差を有するスラブにおける最適位相(貼り方)の検討

下図 13a)~c)は、設計対象の要素(全要素で100%)のうち10%,30%,70%で補強した場合のそれぞれの下層部分と上層部分の最適位相を示したものである。図13より、比較的是っきりした位相が求まっており、このような段差付きスラブにおいても、CFRPの貼り方をこのような位相から求められることがわかる。また、図13より、下層部分の補強に関しては、主に段差部分に補強しなければならないことがわかる。上層部分に関しては、端部および中央部に補強しなければならないことがわかる。

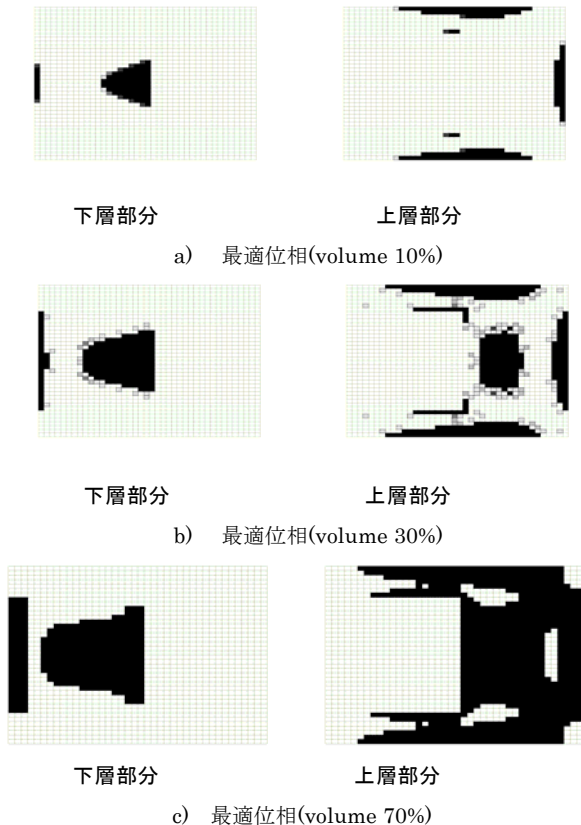


図13 段差を有するスラブにおける最適位相

### 5.3 段差を有するスラブにおけるCFRP板の補強効果の検討

段差を有するスラブにおいても、正方形板床スラブと同様に位相最適化により求めた最適位相の有効性を検討するため、従来の一方向に貼り付ける補強と比較し検証を行った。また、使用するCFRP板の厚さは、2,4,6,mmとし、テープ幅を5cmとし、板厚比に対する効果も検討する。なお、5.2節に示した最適位相は、CFRP板の厚さには依存しないため、CFRP板の配置は厚さに対しては同じにしている。

図14は、剛性を20%低下させたスラブを対象として、CFRP板の補強量に対する床中央部のたわみ比の変化を示している。なお、図中の実線は、最適位相による値、破線は、従来型の貼り方による値を示す。

図14より、段差を有するスラブにおいても、位相最適化により求めた貼り方による補強の方が、従来の一方向に貼り付ける補強に比べて剛性が高くなることがわかった。

次に、図15は、段差を有するスラブにおいて、剛性を10%~40%まで低下させた場合スラブに対して、何%の補強量で元の剛性に回復できるかを示した図である。図15より、最適位相による貼り方では、10%の剛性低下で10%の補強量、20%で50%の補強量、30%以下では、全面に補強しても元の剛性への回復ができないことがわかる。また、従来型では、10%の剛性低下で50%の補強量、20%で75%の補強量、30%以下では、全面に補強しても元の剛性への回復はできないことがわかる。

以上の結果から、段差を有するスラブの場合も、最適位相による補強方法では、同じ補強量で、従来法に比較して10~20%程度剛性を高めることができ、また、その効果は特に補強量が少ない場合(床面積の50%以下)で大きいことがわかる。

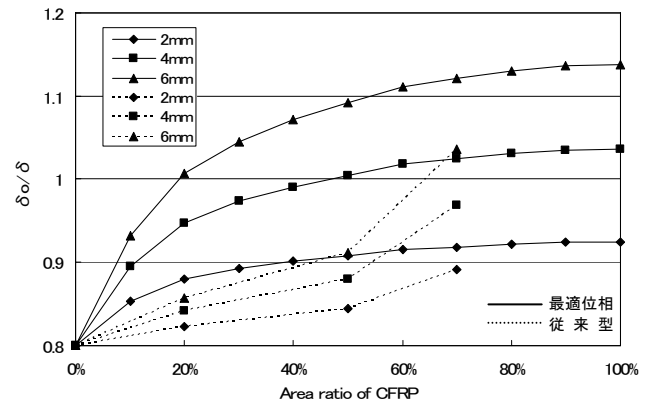


図14 CFRP板の補強量と最大たわみ比の関係(周辺固定)

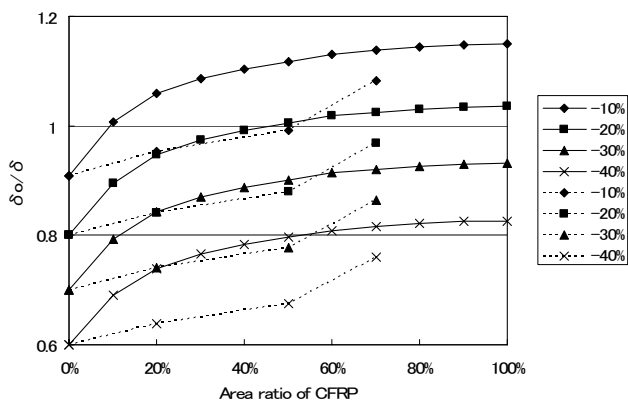


図 15 床スラブの剛性低下と CFRP 補強量の関係(周辺固定)

## 6. まとめ

本報では、CFRP板による床スラブの補強を効率よく行うために、位相最適化手法を用いてCFRPの適切な貼り付け位置を求める方法を提案し、その有効性を検証した。

そこで、第4章では、正方形板床スラブにおいて、CFRPの体積変化に対する最適位相の変化、および床スラブのアスペクト比に対する最適位相の変化を調査し、最適な補強方法について検討した。その結果、以下のことが明らかとなった。

- 1) CFRPの体積変化による最適補強に関しては、周辺固定されたスラブの場合では、スラブ端部および中央部をバランスよく補強する必要があるとわかった。一方、周辺ピン支持のスラブ場合では、ほぼスラブ中央部に補強する必要があるとわかった。
- 2) アスペクト比変化による最適補強に関しては、アスペクト比に比例して短辺方向の端部の補強量が増加することがわかった。一方、長辺方向側の端部の補強量は、アスペクト比に反比例して減少していくことがわかった。
- 3) 位相最適化手法によって求められた貼り方での補強効果の有効性を確かめるため、解析上で剛性を低下させたスラブにおいて従来の一方向に貼り付ける補強と比較を行った結果、位相最適化手法によって求められた貼り方が従来の貼り方比べて同等のCFRP量で剛性が高くなるという結果が得られた。

第5章では、段差を有するスラブにおいて位相最適化手法を用いて最適な貼り方を求めることを提案し、その有効性の検討を行った。その結果、次のようなことが明らかになった。

- 4) 段差を有するスラブにおいての最適位相に関しては、下層部分には、主に段差部に補強しなければならないことがわかった。一方、上層部分には、スラブ端部、そして、スラブ中央部に補強が必要になることがわかった。
- 5) また、段差を有するスラブにおいても、従来の貼り方による補強効果との比較を行った結果、フラットスラブと同様に位相最適化手法によって求められた貼り方が従来の貼り方比べて同等のCFRP量で剛性が高くなるという結果が得られ、また

CFRP厚に比例して補強効果が大きくなることがわかった。

以上より、段差を有するスラブにおいても有用な最適位相が求められることが確かめられた。

## 参考文献

- 1) 米奥久貴, 瀧川正四郎, 中出睦: 炭素繊維によるRCフレーム柱の補強効果に関する実験的研究, コンクリート工学年次論文集, Vol23, No.1, pp871-876, 2001
- 2) 長田光司, 井ヶ瀬良則, 須田久美子, 池田尚治: 炭素繊維シートを用いた実物大鉄筋コンクリート柱部材のせん断補強効果, コンクリート工学年次論文集, Vol23, No.1, pp877-882, 2001
- 3) 森村毅, 在永末徳: 鉄筋コンクリート梁・スラブの炭素繊維補強に関する研究, 日本建築学会中国支部研究報告第24巻, pp29-32, 2001.3
- 4) 森村毅, 在永末徳: 周辺拘束鉄筋コンクリート合成スラブの炭素繊維補強に関する研究, 日本建築学会中国支部研究報告第25巻, pp121-124, 2002.3
- 5) 藤井大地, 小泉智彦, 森村毅, 位相最適化手法を用いたCFRPによる中空スラブの最適補強, 日本建築学会構造系論文集, 第585号, pp.109-114, 2004.11
- 6) 関口美奈子, 菊池昇, 混合的有限要素剛性マトリックスの導き方に関する一考察—Clough 1960年の論文を中心として—, 計算工学講演会論文集, 4(1), pp.131-134, 1999
- 7) C. Fleury and V. Braibant: Structural Optimization: A new dual method using mixed variables, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.23, pp.409-428, 1986
- 8) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣, 最適化手法CONLINを用いた骨組構造の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.548, 2001.10
- 9) 鴨川直昌, 中岡章郎, 魚住正志, 常松豪, 榎田聡太郎, 段差付きPRCスラブの長期たわみに関する実験的研究, 日本建築学会大会学術梗概集, pp.371-372, 2003.9