



不静定力学I

たわみ曲線の微分方程式 (弾性曲線式)


本日から、不静定力学について勉強します。

不静定構造の応力を求めるためには、まず、部材の変位(伸び縮み、たわみ、回転角)を求める必要があります。

このような変位を求める方法として、たわみ曲線の微分方程式を用いる方法、モールの定理を用いる方法、仮想仕事法があります。

まず、これらの方法を順に勉強していきます。

今回は、たわみ曲線の微分方程式(弾性曲線式)を解くことによって、曲げによる変位(たわみ、回転角)を求める方法を学びます。



断面力と変形の関係

軸力と変形の関係	$P = EA\varepsilon$
せん断力と変形の関係	$Q = GA\gamma$
曲げモーメントと変形の関係	$M = ? \phi$ ↑ $-EI$ I は断面2次モーメント

まずは、材料力学の復習です。

軸力と垂直ひずみ度の関係は、せん断力とせん断ひずみ度との関係は、ここに示すように表されましたね。

ここで、**E**はヤング係数、**A**は断面積、**G**はせん断弾性係数でしたね。

さて、それでは、曲げモーメントと曲率(変形)の関係を憶えていますか？

$M = -EI\Phi$ でしたね。

ここで、**I**は断面2次モーメントを表していますが、思い出しましたか？

曲げに対する変形

- 曲率(軸の角度の変化率)

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

曲率
曲率半径
角度の変化率

曲線の曲がり具合は、角度の変化率(曲率)で判断できる

次に、この曲率 Φ について、考えてみると、これは、曲率半径の逆数になることは、すでに材料力学で教えました。それで、単位が $1/\text{mm}$ になるのですよね。

ところで、この曲率というのは、どれくらい曲がっているかを示すものですが、これは、たわみ曲線の角度では表せません。

角度はたわみ曲線の接線の角度なので、 $\theta = dv/dx$ で表されますね。しかし、これは大きく曲がっていても、小さく曲がっていても、最大たわみが生じる点の角度は0になります。

したがって、曲がり具合の大きさは、角度ではなく、角度の変化で表されるわけですね。すなわち、 $d(dv/dx)/dx = d^2v/dx^2$ となり、たわみの x に関する2階微分で表されるわけですね。



たわみ曲線の微分方程式

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

断面2次モーメント

$$I = \iint_S y^2 dydz$$

曲げモーメントと曲率の関係は正負逆になる

そうすると、 $M = -EI\Phi$ は、 $\Phi = -M/EI$ となりますから、ここに示すようなたわみ v に関する微分方程式が成り立つわけです。

この微分方程式を「弾性曲線式」と呼んでいるわけです。今回は、この弾性曲線式を用いて、梁のたわみ v とたわみ角 $\theta (= dv/dx)$ を求めるわけです。

曲げモーメントと曲率の符号


$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

たわみ角が+から-に変化する

なお、ここで、 $-M/EI$ と、マイナスが付く理由を復習しておく、構造力学では、 y 軸が下向きに定義され、曲げモーメントの正は、図の左のように定義されていましたね。

この場合、曲線の角度は、+から-に変化するので減少しています。したがって、角度の変化が曲率ですから、角度の変化が減少しているのですから-になるわけです。

したがって、+の曲げモーメントの時は、曲率は-ですから、この式に-が付くわけです。



たわみ角とたわみ

曲率 $\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$

たわみ角 $\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = -\int \frac{M(x)}{EI} dx + \underbrace{C_1}_{\text{積分定数}}$

たわみ $v(x) = -\iint \frac{M(x)}{EI} dx + C_1x + C_2$

さて、この弾性曲線式で、たわみ角 θ と、たわみ v を求めるにはどうしたらよいか？
 なお、ここでは、 x の関数となるものには、 (x) を付けています。

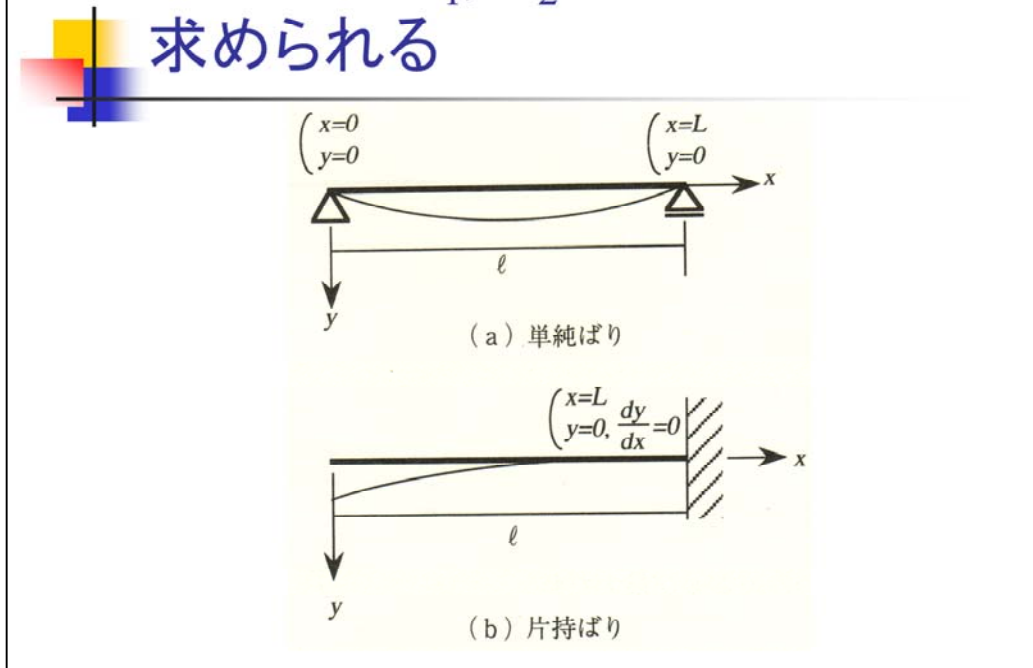
基本的に微分方程式は、積分することによって解が求められるわけですね。

ただし、この場合は、不定積分なので、積分定数という未定定数を加えておく必要があります。

要は、たわみ角の式を微分すると曲率の式になり、たわみの式を微分するとたわみ角の式になりますね。

定数は、微分すると0になるので、積分した場合、その定数項を加えておく必要があるわけですね。

積分定数 C_1, C_2 は境界条件から 求められる



それでは、先ほどの積分定数 C_1 と C_2 は、どのように求まるのでしょうか？

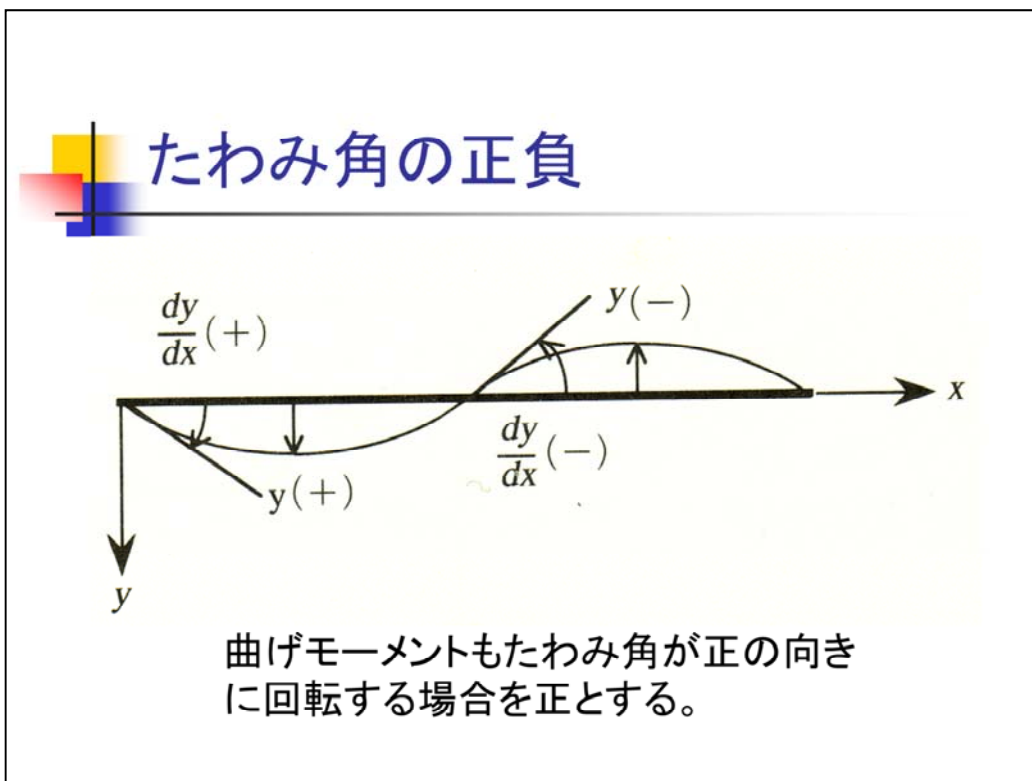
これは、境界条件によって求められるわけです。

この境界条件は、図(a)に示す単純ばりでは、左端のピン支持点で、 $v(0)=0$ 。右端のローラ支持点で $v(l)=0$ の境界条件となります。

すなわち、 $x=0$ のとき、 $v=0$ 、 $x=l$ のとき、 $v=0$ の条件となるわけです。(ただし、図には v を y で示されています。)

また、図(b)に示す片持ばりでは、 $x=l$ のとき、 $v=0$ 、 $\theta=0$ となりますから、 $v(l)=0$ 、 $\theta(l)=0$ となるわけです。

これらの2つの条件によって、 C_1 と C_2 が求められるわけですね。



たわみ角の正負も、曲げモーメントと同様に時計まわりを正として定義します。
 (時計の反対まわりの回転角は負になります。)

例題1

(a)

(b)

たわみ曲線の微分方程式

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{M}{EI}x$$

積分により

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{M}{2EI}x^2 + C_1$$

$$v(x) = \frac{M}{6EI}x^3 + C_1x + C_2$$

それでは、図(a)に示すような単純ばりの例題を解いてみましょう。

たわみ曲線の微分方程式(弾性曲線式)を用いる方法では、まず、曲げモーメント関数 $M(x)$ を求める必要があります。

これを求めるために、まずは、図(a)のA点とB点の反力を求める必要があります。この場合、A点の反力は $-M/l$ 、B点の反力は M/l ですね。

次に、A点から x の距離のところで断面を切って、曲げモーメントの釣合式を立てると、 $-M(x) - (M/l)x = 0$ となって、結局、 $M(x) = -(M/l)x$ になりますね。

これをたわみ曲線の微分方程式に代入すると、一番上の式になります。

これを積分すると、下の2式が導かれます。

補足

反力の計算

$$\sum M_A = 0: M - V_B l = 0 \rightarrow V_B = \frac{M}{l}$$

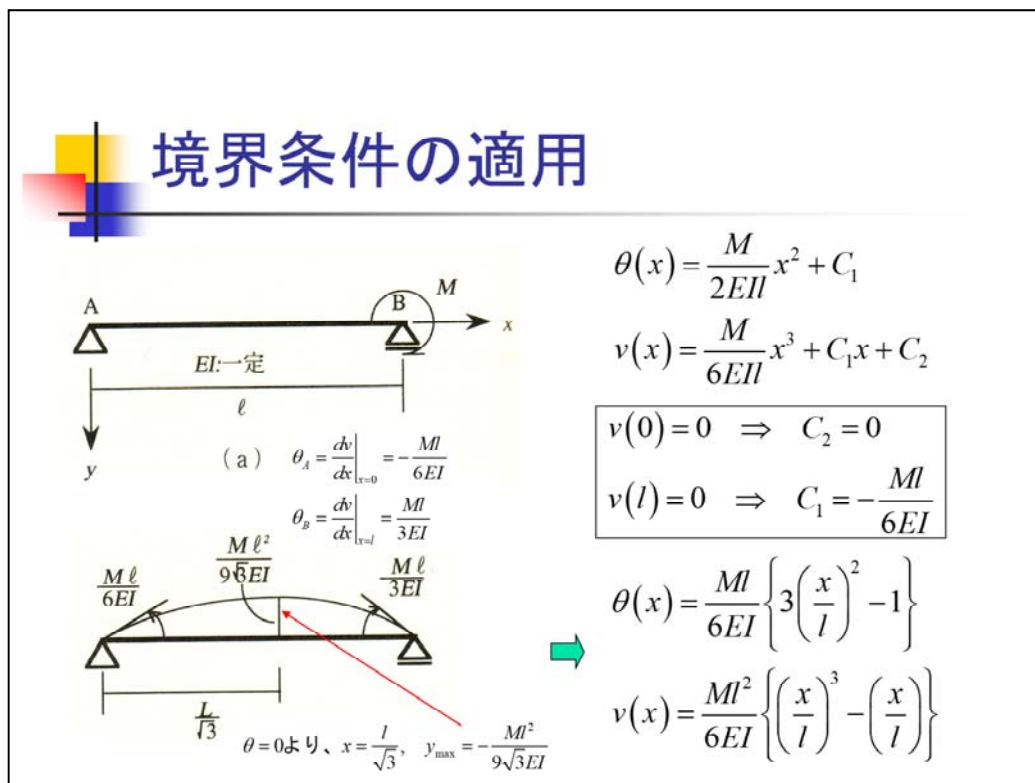
$$\sum Y = 0: V_A + V_B = 0 \rightarrow V_A = -\frac{M}{l}$$

曲げモーメント関数の計算

$$\sum M_x = 0: -M(x) - \frac{M}{l}x = 0 \rightarrow M(x) = -\frac{M}{l}x$$

以上の図は、反力の計算と応力の計算を復習したものです。

境界条件の適用



次に、 C_1 と C_2 を求めるために、 $\theta(x)$ の式と $v(x)$ の式に境界条件を入れる必要があります。

先ほど説明したように、単純ばりの境界条件は、 $v(0)=0$ と $v(l)=0$ の2つですから、この条件を上での $v(x)$ の式に代入すると、 $C_2=0$ と $C_1=-Ml/(6EI)$ が求められます。

この C_1 と C_2 を一番上の2式に代入すると $\theta(x)$ と $v(x)$ が求められるわけです。

そうすると、A点のたわみ角は $\theta(0)$ から求められ、B点のたわみ角は $\theta(l)$ から求められます。

さらに、最大曲げモーメントは、 $\theta(x)=0$ の条件から $x=l/\sqrt{3}$ が求められ、これから $v(l/\sqrt{3})$ を計算すれば、最大たわみ v_{\max} が求められるわけです。

例題2

(a)

$M_x = -\frac{wx^2}{2}$

(b)

たわみ曲線の微分方程式

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{w}{2EI}x^2$$

積分により

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{w}{6EI}x^3 + C_1$$

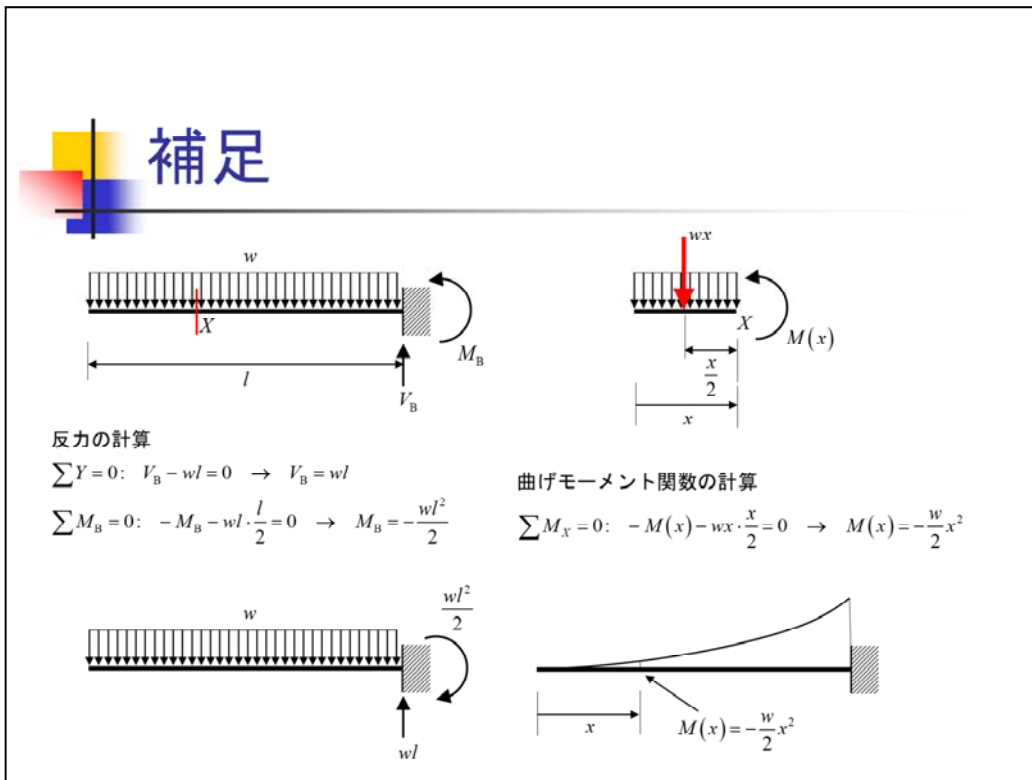
$$v(x) = \frac{w}{24EI}x^4 + C_1x + C_2$$

次に、図(a)に示す等分布荷重が加わる片持ばりの例題を解いてみます。

まず、曲げモーメント関数 $M(x)$ を求めるために、A点から x の距離の断面で切り、 $M(x)$ を定義して、モーメントの釣合式を立てると、 $-M(x) - wx \cdot (x/2) = 0$ となりますから、これから $M(x) = -wx^2/2$ が求まります。

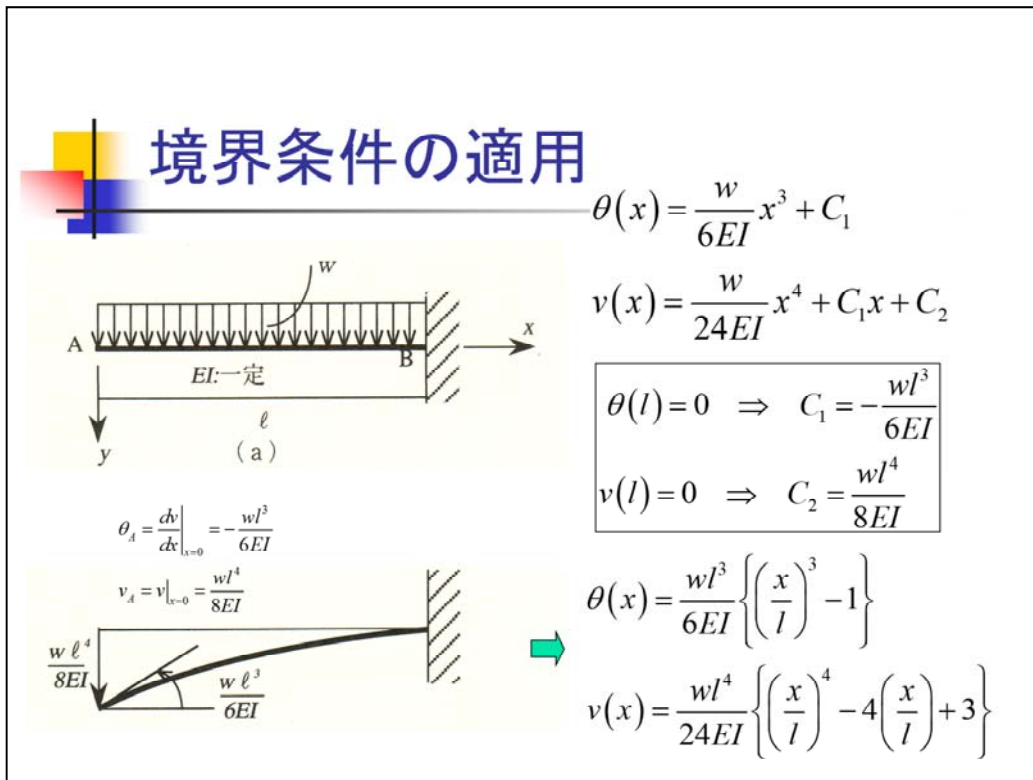
これをたわみ曲線の微分方程式(弾性曲線式)に代入すると、一番上の式になります。

それを積分すると、下の式になります。



以上の図は、反力の計算と応力の計算を復習したものです。

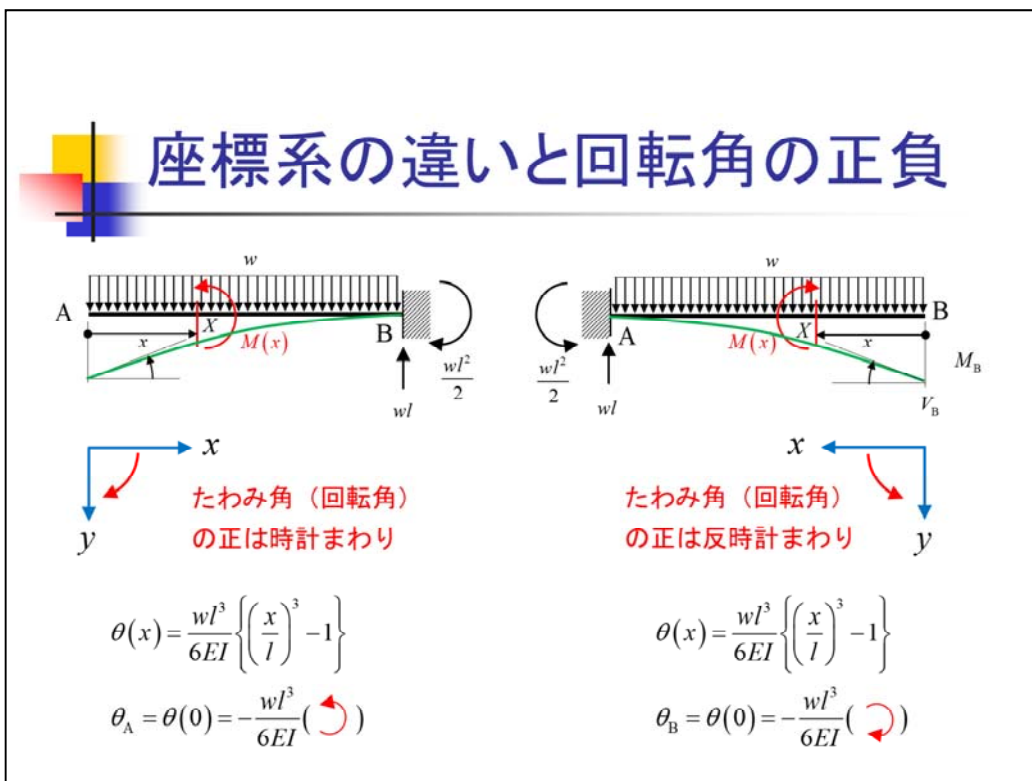
境界条件の適用



次に、この場合の境界条件は、 $\theta(l)=0$ と $v(l)=0$ ですから、これから、**C1**と**C2**が求められます。

これを上の式に代入すると、たわみ曲線式が求められるわけです。

例えば、この式から**A**点のたわみとたわみ角を求めるには、 $\theta(0)$ と $v(0)$ を求めれば良いわけですね。



最後に、 x 軸が、これまでの問題のように左端を原点に右向きに定義される場合と、右図のように右端を原点に左向きに定義される場合の違いについて説明します。ただし、 y 軸は、両方下向きに定義します。

この場合、回転角の正は、 x 軸から y 軸に向かう方向が正の定義になりますから、左図の座標系では時計回り、右図の座標系では反時計まわりになります。

ところで、この問題では、どちらの $M(x)$ も同じ関数になり、境界条件も、 $v(l)=0$ 、 $\theta(l)=0$ で同じ条件となるため、得られるたわみ角の関数も同じになります。

したがって、どちらの自由端の回転角も同じ解になります。しかしながら、回転の向きは、逆になることに注意してください。この場合、図の緑線が変形曲線だとすると、回転の向きは合っていることがわかると思います。

このように、弾性曲線式では、座標の向きによって回転角の正負の向きが異なることに注意してください。