不静定力学I

モールの定理

今回は，曲げに対する変位（たわみ角，たわみ）を求める方法として，モールの定理を用いる方法について説明します。

モールの定理を用いる方法は，たわみ曲線の微分方程式（弾性曲線式）を用いる方法に比較して，より簡単にたわみ角やたわみを求めることができます。

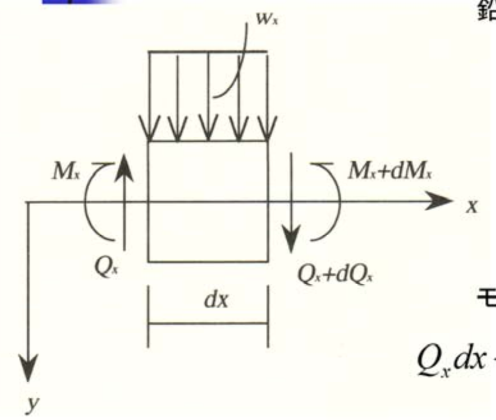
たわみ曲線の微分方程式

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv(x)}{dx}\right) = \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{M(x)}{EI}$$

まず，モールの定理について説明していきます。
モールの定理は，弾性曲線式の性質をうまく利用したものです。
まず，弾性曲線式をここに示すように変形します。
そうすると，たわみ角関数θ(x)と曲げモーメント関数M(x)の関係式が得られます。

せん断力と荷重
曲げモーメントとせん断力の関係



鉛直方向の釣合から

$$w_x dx - Q_x + \left(Q_x + dQ_x\right) = 0$$

⇩

$$\boxed{\frac{dQ_x}{dx} = -w_x}$$

モーメントの釣合から

$$Q_x dx + M_x - \left(M_x + dM_x\right) - \underline{w_x dx\left(dx/2\right)} = 0$$

dxが微小であるため無視できる

⇩

$$\boxed{\frac{dM_x}{dx} = Q_x}$$

次に，梁に働くせん断力と曲げモーメントの関係式を導きます。

左の図は，梁の一部（幅dx）を取り出して，両断面の曲げモーメントのせん断力を示したものです。

ただし，この梁には，wxの鉛直等分布荷重が加わっているものとします。

右の断面では，左の断面に比較して，すこし断面力が変化していますから，dMxとdQxが加えられています。

この図において，鉛直方向（y方向）の力の釣合から，右上の式が導かれます。

また，モーメントの釣合から右下の式が導かれます。

曲げモーメント、せん断力、荷重の関係

$$\frac{dQ_x}{dx} = -w_x \qquad \frac{dM_x}{dx} = Q_x$$

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dM_x}{dx}\right) = \frac{dQ_x}{dx} = -w_x$$

以上で得られたせん断力に関する式を，曲げモーメントを2回微分した式に代入すると，下のような式が導かれます。

たわみ曲線式との比較

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\boxed{v(x)}}{dx}\right)=\frac{d\boxed{\theta(x)}}{dx}=-\boxed{\frac{M(x)}{EI}}$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\boxed{M(x)}}{dx}\right)=\frac{d\boxed{Q(x)}}{dx}=-\boxed{w(x)}$$

たわみ関数$v(x)$が曲げモーメント関数$M(x)$

たわみ角関数$\theta(x)$がせん断力関数$Q(x)$に対応することがわかる。

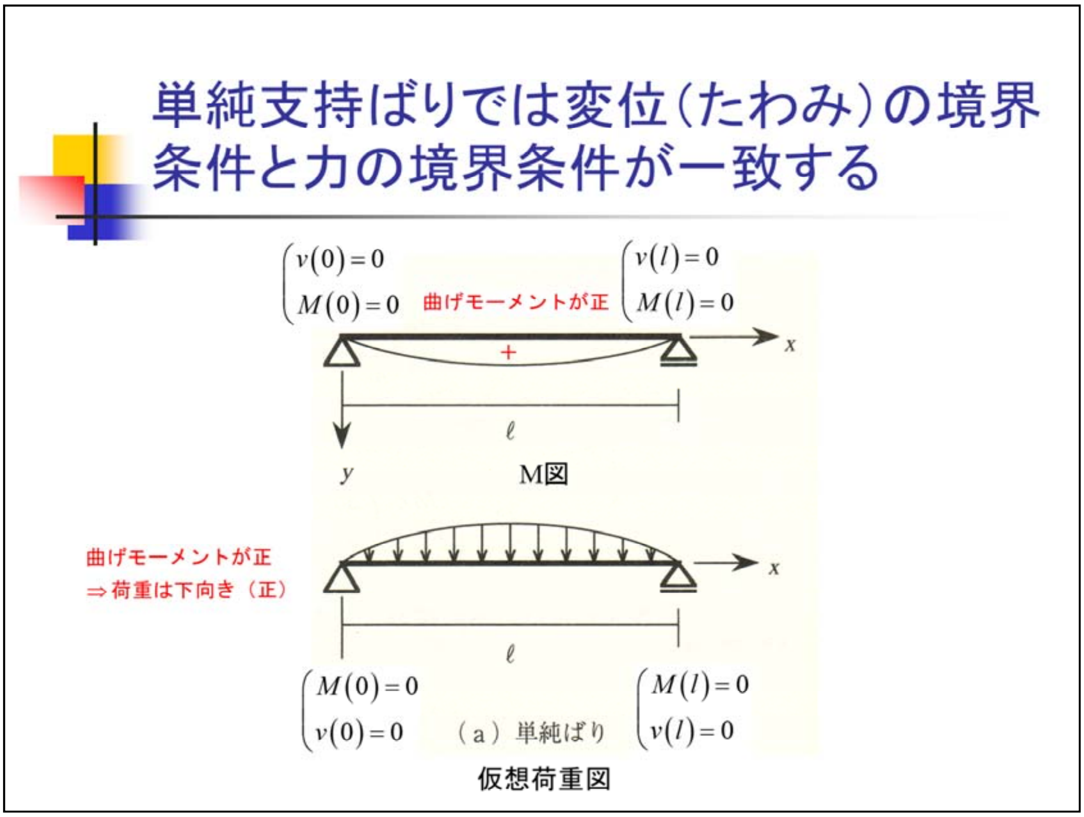
曲げモーメントとせん断力からたわみvと回転角θが求まる

弾性曲線方程式と，今導かれた曲げモーメントを2回微分した方程式を比較してみると，上の式は，変位の微分方程式で，下の式は応力の微分方程式になりますが，全く同じ形になっていることがわかります。

すなわち，この両式を比較すると，弾性曲線方程式のたわみ関数v(x)はもう一つの式の曲げモーメント関数M(x)に，たわみ角関数θ(x)はせん断力関数Q(x)に，-M(x)/EIは分布荷重関数-w(x)に対応していることがわかります。

したがって，下の力の式の荷重w(x)をM(x)/EIに置き換えて，曲げモーメント関数M(x)とせん断力関数Q(x)を求めれば，それがすなわち，たわみ関数v(x)とたわみ角（回転角）θ(x)を求めたことになることがわかります。

これが，モールの定理と呼ばれるものです。



ただし，モールの定理では応力の微分方程式を解くことになるので，変位の境界条件と応力の境界条件が入れ替わります。

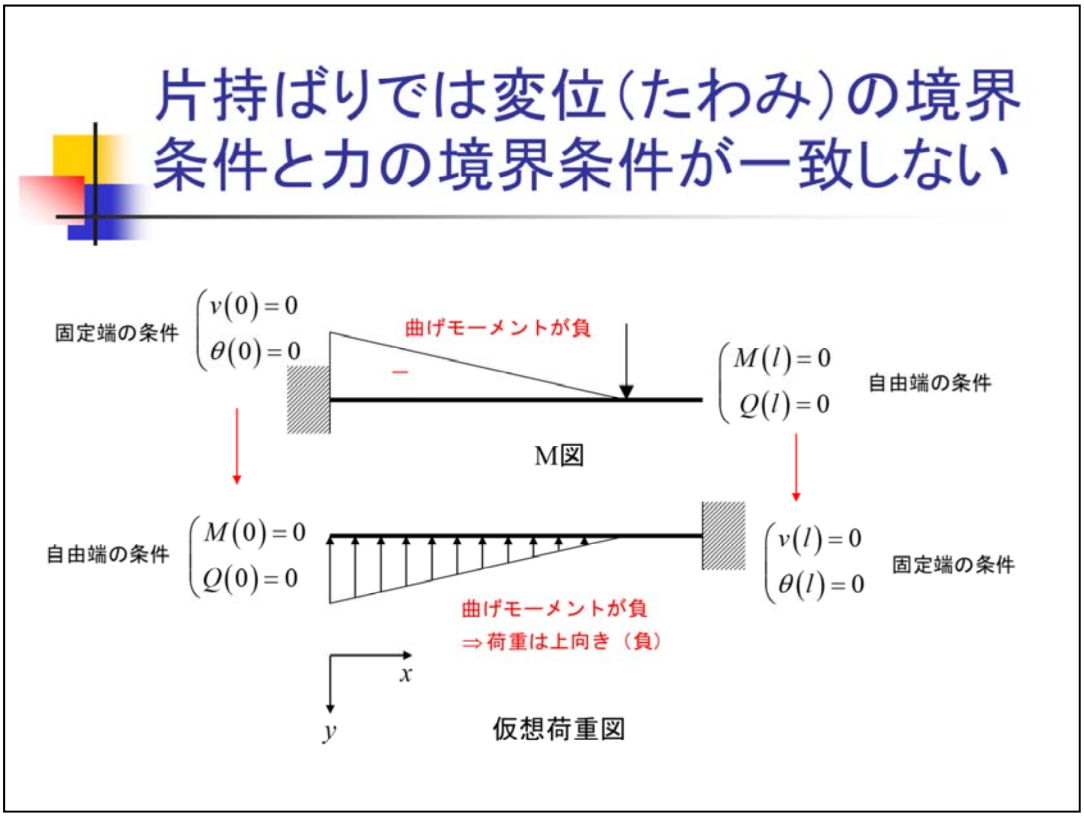
上の元の問題での境界条件は、x=0とlで、それぞれたわみvと曲げモーメントMが0となる条件となります。

また、上図の曲げモーメントをEIで割ったものを仮想荷重とした下図（仮想荷重図）では、vの条件がMの条件に、Mの条件がvの条件に入れ替わります。

そうすると、上の図の境界条件と下の図の境界条件は、同じ条件になります。

したがって、単純梁では、同じ支持条件で、仮想荷重問題を解くことになります。

なお、この場合、曲げモーメントが正ですから、仮想荷重問題の分布荷重は、y軸の正の方向、すなわち、下向きになることに注意してください。

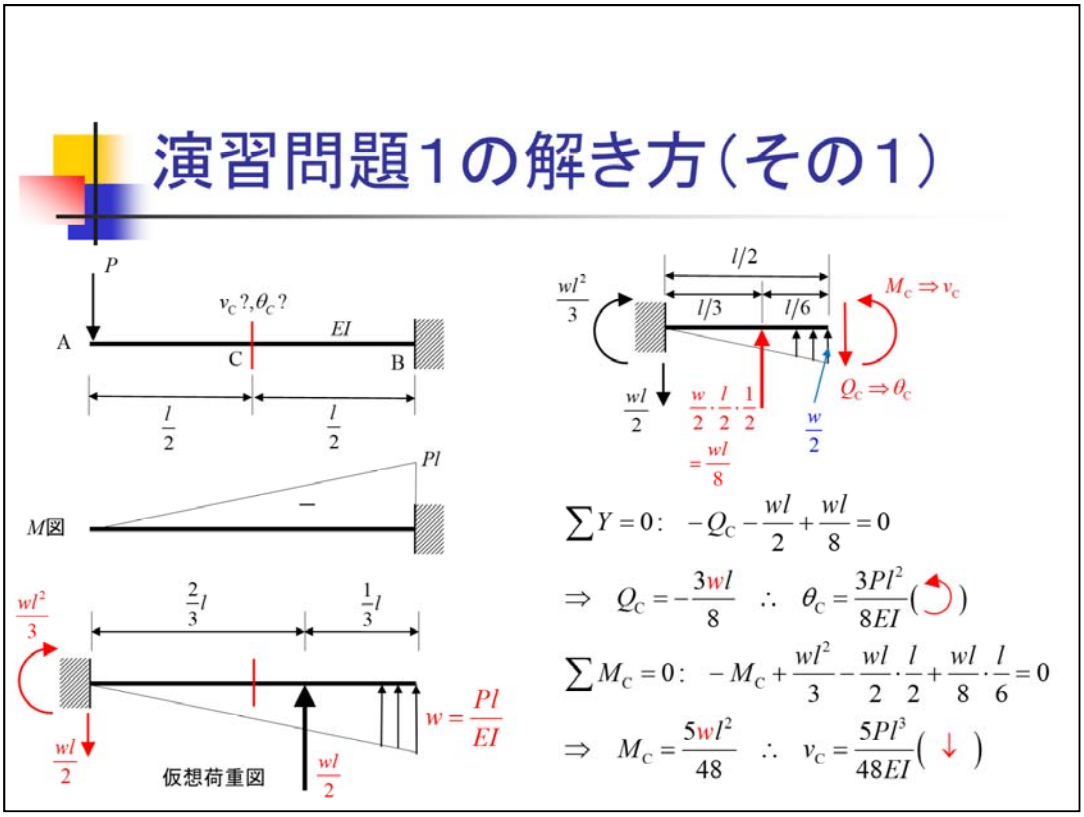


一方、片持梁の問題では、上の元の問題では、左端の固定端側はvとθが0になり、右端の自由端側はMとQが0になる条件となります。

この場合、下の仮想荷重問題では、固定端の条件は自由端の条件になり、自由端の条件は固定端の条件に変わることになります。

したがって、上の原問題と下の仮想荷重問題では、固定端が反対に入れ替わることになります。

なお、この場合の、曲げモーメントが負ですから、仮想荷重問題の分布荷重は、y軸の負の方向、すなわち、上向きになることに注意してください。



それでは、実際に演習問題1を解いてみましょう。

この問題は、片持梁中央のたわみvcとたわみ角θcを求める問題です。また、曲げ剛性はEIとなっています。

まず、M図を求め、次にこれから仮想荷重図を描きます。この場合、曲げモーメントは負ですから、荷重も負の方向、すなわち上向きになります。したがって、荷重は、曲げモーメントを上下逆転して、分布荷重を描くことになります。

また、右端の分布荷重値は、PlをEIで割ったものになります。ここでは、これをwと置いています。

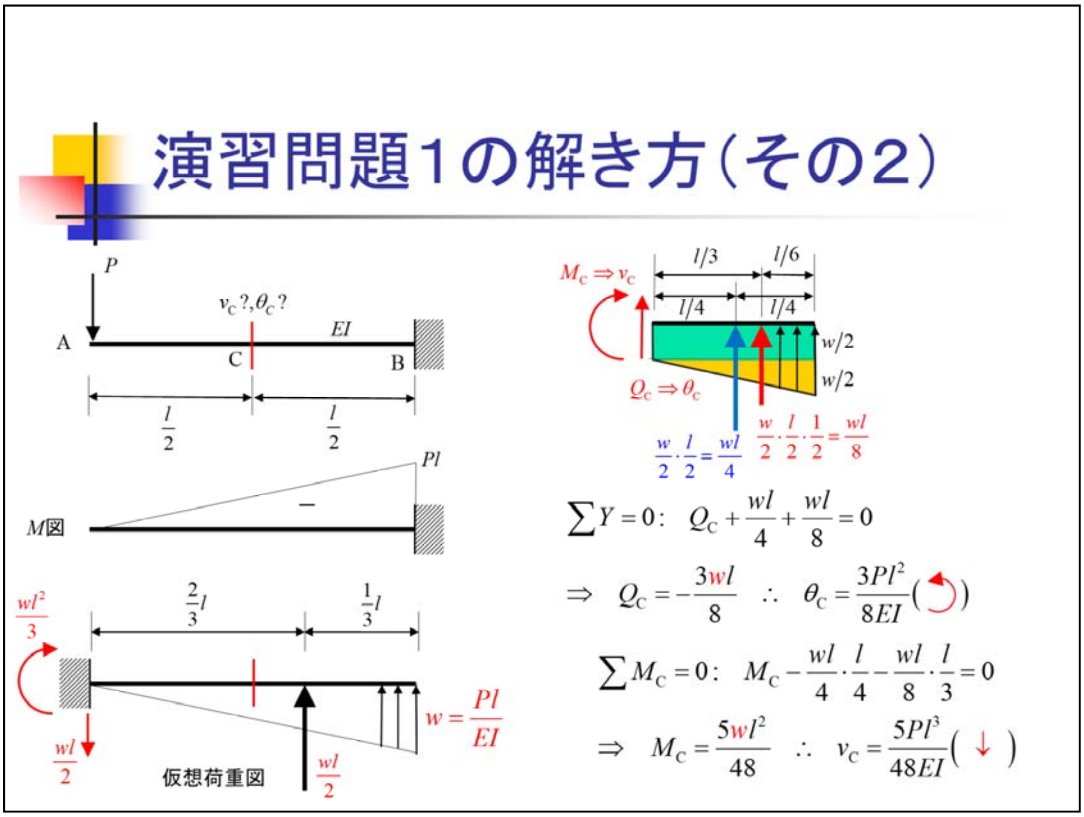
また、片持はりの場合、自由端は固定端になり、固定端は自由端になりますから、図のように固定端が入れ替わります。

次に、はり中央の曲げモーメントとせん断力を計算するために、はり中央で切って、そこにせん断力Qcと曲げモーメントMcを定義します。

そして、力の釣合いにより、QcとMcを求めると、これがたわみ角θcとたわみvcになります。

この時、負のせん断力は、時計の反対まわりのたわみ角に、正の曲げモーメントは下向きのたわみになることに注意してください。

また、分布荷重wを、もとのPl/EIに戻すことを忘れないでください。

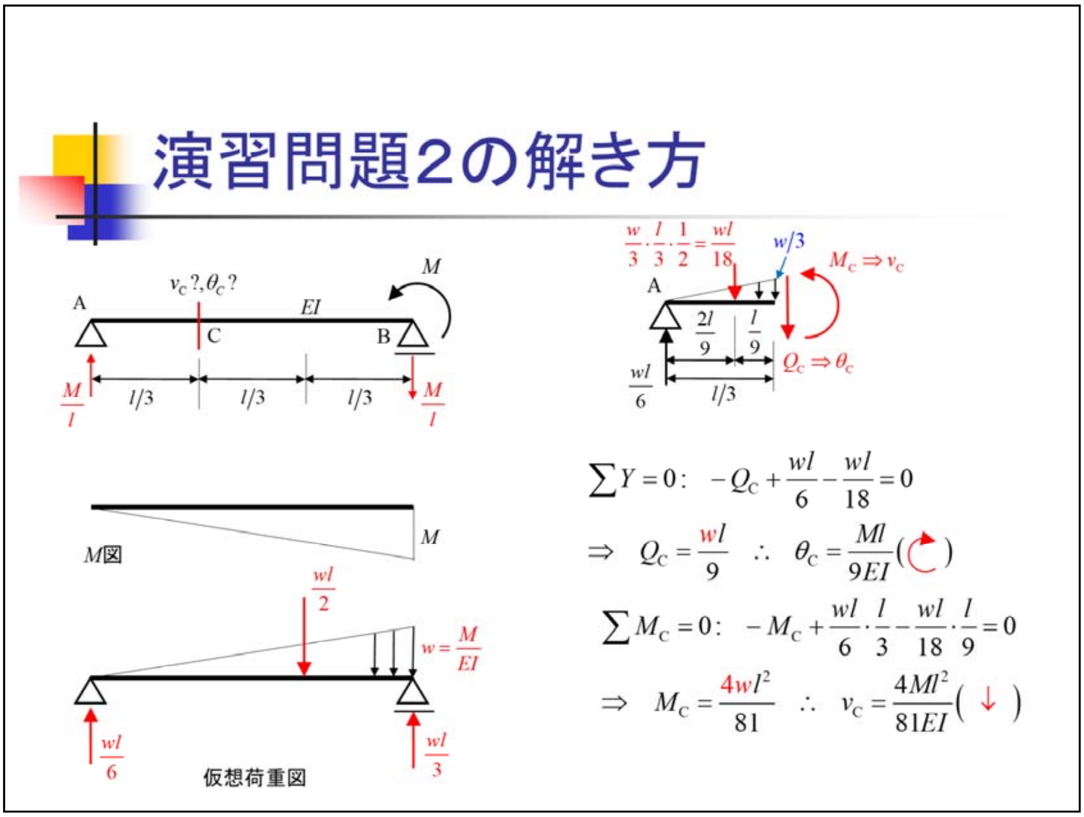


先ほどの解法では、はり中央で切って左側(AC間)の力の釣合いでせん断力と曲げモーメントを求めていましたが、はり中央で切って右側の釣合いでせん断力と曲げモーメントを求めることもできます。

この場合は、図に示すように台形の分布荷重になります。このような場合、台形を長方形の等分布荷重と三角形の分布荷重に分離して考えます。

そして、長方形の分布荷重の合力は中央に加わり、三角形の分布荷重は、2/3と1/3の長さの比のところに加わることになります。

以上に注意して、合力の大きさを求め、力の釣合いにより、せん断力と曲げモーメントを求めれば、先ほどの解法と同じ答えが得られることがわかります。



次に、演習問題2は、単純梁の例題です。

まず、M図を描いて、次に、M図を上下逆ににして、右端のMをEIで割ったものを分布荷重wと置きます。ここまでは片持梁と同じです。

次に、単純梁の場合、支持点の反力を計算する必要があるので、三角形分布荷重の合力を書いて、これから反力を計算します。

そして、C点のせん断力と曲げモーメントを求めるために、左端からl/3のところで切って、QcとMcを正の向きに定義します。ただし、この場合、右端の分布荷重値がw/3になることに注意してください。

後は、力の釣合いにより、Qc、Mcを求めれば、それがC点のたわみ角θcとたわみvcになります。

なお、この場合も、wをM/EIに直すことと、回転角とたわみの向きを正確に書いてください。

ちなみに、この問題でも、CB間の釣合いで曲げモーメントとせん断力を求めることができますが、分布荷重が台形になるため、こちらの解法の方が容易に解けます。

以上のように、弾性曲線式を用いる方法も、モールの定理も、数学的な方法であるため、応力の正負の定義を正確に行う必要があります。