不静定力学I

弾性曲線式とモールの定理による解法の応用問題

今回は，これまでに学んだ弾性曲線式による解法とモールの定理による解法の応用問題の解き方について説明します。

弾性曲線式

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

断面2次モーメント

$$I = \iint_S y^2 dydz$$

曲げモーメントと曲率の関係は正負逆になる

まず，復習として，弾性曲線式は，ここに示すような式になりました。

たわみ角とたわみ

曲率 $$\phi(x)=\frac{d^2v(x)}{dx^2}=-\frac{M(x)}{EI}$$

たわみ角 $$\theta(x)=\frac{dv(x)}{dx}=-\int\frac{M(x)}{EI}dx+\underbrace{C_1}_{\text{積分定数}}$$

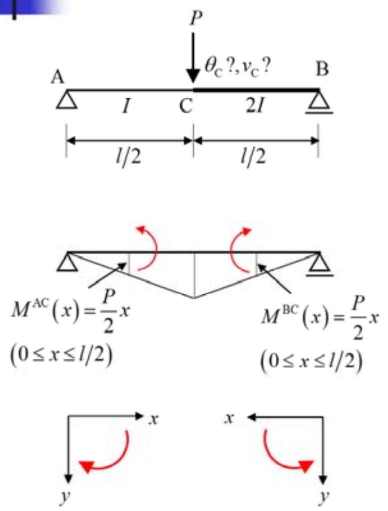
たわみ $$v(x)=-\iint\frac{M(x)}{EI}dx+C_1x+C_2$$

弾性曲線式を積分すると，たわみ角θを求める方程式が求まり，さらに積分すると，たわみvを求める方程式が求まります。

また，不定積分を行うと，積分定数が加わります。たわみ角を求める方程式では1つの積分定数が加わり，たわみを求める方程式では2つの積分定数が加わります。

そして、これらの積分定数は、梁の境界条件によって求められます。

演習問題1の解き方(その1)



AC間

$$\frac{d^2v^{AC}(x)}{dx^2}=-\frac{M^{AC}(x)}{EI}=-\frac{P}{2EI}x$$

$$\theta^{AC}(x)=\frac{dv^{AC}(x)}{dx}=-\frac{P}{4EI}x^2+C_1$$

$$v^{AC}(x)=-\frac{P}{12EI}x^3+C_1x+C_2$$

CB間

$$\frac{d^2v^{BC}(x)}{dx^2}=-\frac{M^{BC}(x)}{2EI}=-\frac{P}{4EI}x$$

$$\theta^{BC}(x)=\frac{dv^{BC}(x)}{dx}=-\frac{P}{8EI}x^2+C_3$$

$$v^{BC}(x)=-\frac{P}{24EIl}x^3+C_3x+C_4$$

それでは、演習問題の解法を示すことで応用問題の解法を説明します。

まず、演習問題[1]は、図のような単純梁で、C点のたわみ角とたわみを求める問題です。

この場合、第1課題の基本的な問題と異なり、AC間とBC間で曲げモーメント関数が別々に定義されます。

ここでは、AC間の曲げモーメント関数は、切って左側の釣合いで求め、BC間の曲げモーメント関数は、切って右側の釣合いで求めるものとします。

この場合、それぞれの曲げモーメント関数の座標系が異なることに注意する必要があります。

ここに示す座標系の定義では、回転角の正の向きが逆になります。すなわち、AC間では時計回りが正、BC間では時計の反対まわりが正です。

右には、AC間とBC間の弾性曲線式とその積分が示されています。この場合、BC間の断面2次モーメントが2Iになることに注意が必要です。

演習問題1の解き方（その2）

AC間

$$\frac{d^2 v^{\mathrm{AC}}(x)}{dx^2} = -\frac{P}{2EI}x$$

$$\theta^{\mathrm{AC}}(x) = -\frac{P}{4EI}x^2 + C_1$$

$$v^{\mathrm{AC}}(x) = -\frac{P}{12EI}x^3 + C_1 x + C_2$$

CB間

$$\frac{d^2 v^{\mathrm{BC}}(x)}{dx^2} = -\frac{P}{4EI}x$$

$$\theta^{\mathrm{BC}}(x) = -\frac{P}{8EI}x^2 + C_3$$

$$v^{\mathrm{BC}}(x) = -\frac{P}{24EIl}x^3 + C_3 x + C_4$$

境界条件（支持条件）

$$\boxed{\begin{aligned} v^{\mathrm{AC}}(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ v^{\mathrm{BC}}(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_4 = 0 \end{aligned}}$$

C点における変位の連続条件

$$\boxed{\begin{aligned} \theta^{\mathrm{AC}}\left(\frac{l}{2}\right) = -\theta^{\mathrm{BC}}\left(\frac{l}{2}\right) \quad &\Rightarrow \quad C_1 + C_3 = \frac{3Pl^2}{32EI} \\ v^{\mathrm{AC}}\left(\frac{l}{2}\right) = v^{\mathrm{BC}}\left(\frac{l}{2}\right) \quad &\Rightarrow \quad C_1 - C_3 = \frac{Pl^2}{96EI} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{5Pl^2}{96EI}, \quad C_3 = \frac{Pl^2}{24EI}$$

$$\therefore \theta_{\mathrm{C}} = \theta^{\mathrm{AC}}\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Pl^2}{96EI}\left(\;\right), \quad v_{\mathrm{C}} = \frac{Pl^3}{64EI}(\downarrow)$$

次に、境界条件によって、積分定数を求めます。

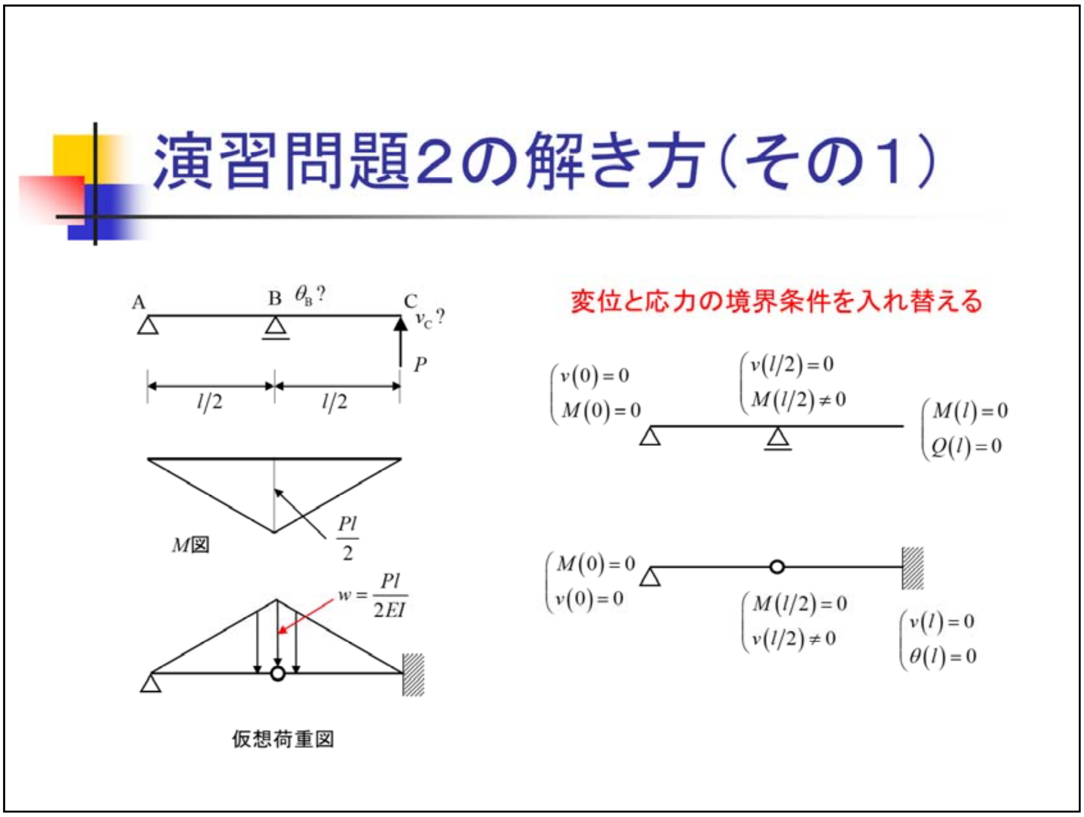
まず、A点の支持条件から、C2=0が求まります。また、B点の支持条件から、C4=0が求まります。

そしてこの場合、これら2つの条件の他に、C点における変位の連続条件が加わります。

ここで注意すべきは、AC間とBC間でたわみ角の正負が逆になることです。

以上の条件から、積分定数が求まり、C点のたわみ角とたわみが求まります。

ここで、C点のたわみ角をAC間のたわみ角関数で求めると、時計回りが正ですから、負だと時計の反対まわりになります。



次に、第2課題の応用問題を解きます。

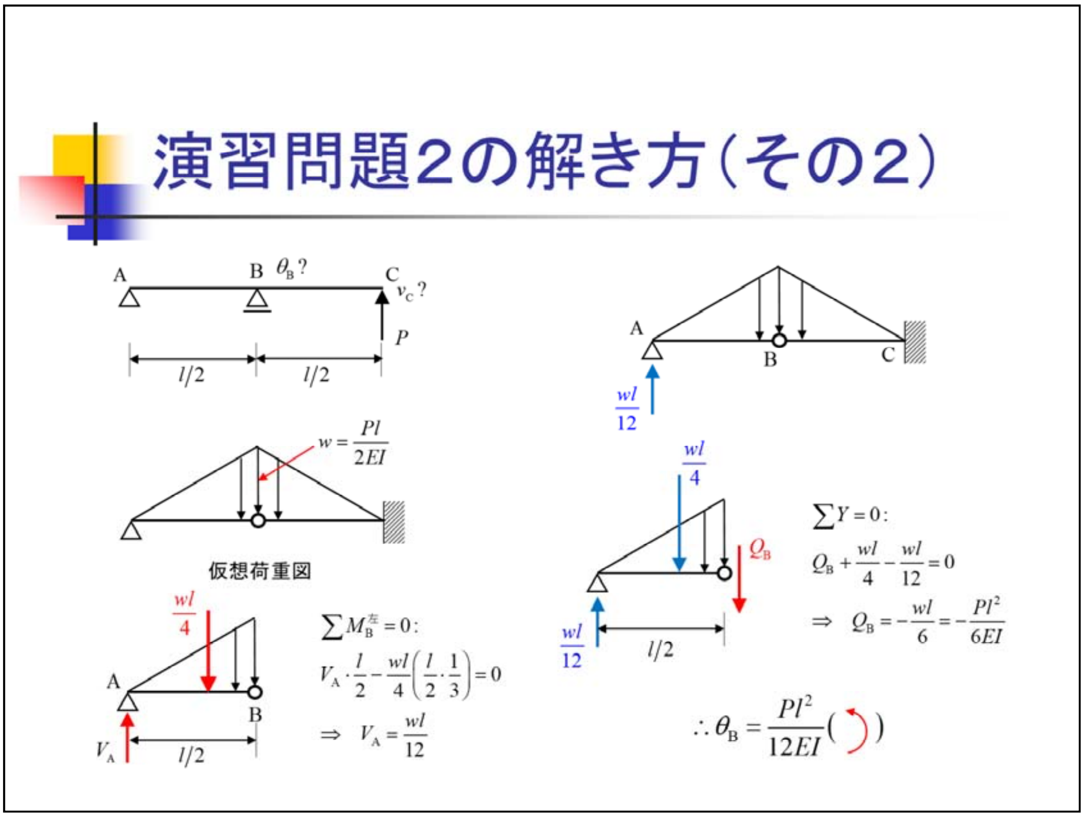
この問題は、図に示すような張り出し張りのB点のたわみ角とC点のたわみをモールの定理によって求める問題です。

この場合のM図は、図のようになり、最大値はPl/2となります。

次に、仮想荷重図ですが、原問題の変位と応力の境界条件を入れ替えると、左端のピン支持条件は同じピン支持条件となり、右の自由端の条件は固定端の条件になります。

問題は、中央のローラ支持条件ですが、原問題では、v=0ですが、Mは0になりません。したがって、仮想荷重問題では、M=0になりますが、たわみvは0にならない条件となります。
これは、ヒンジの条件となります。

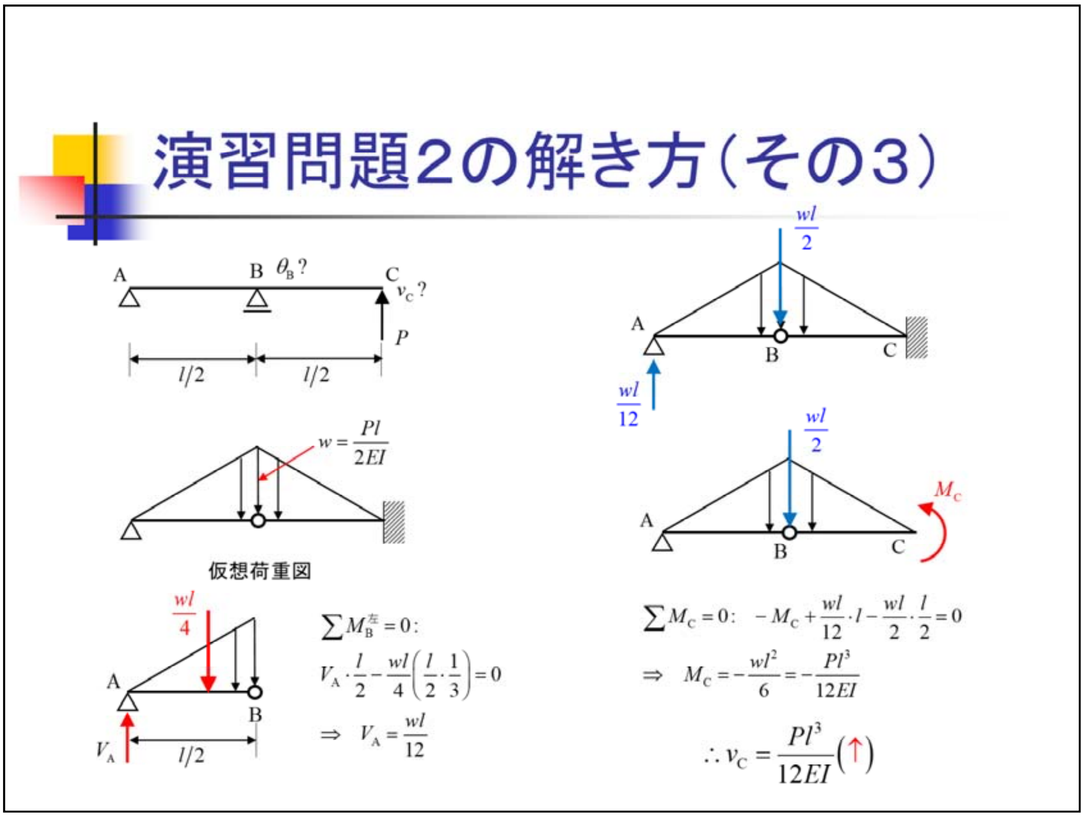
したがって、仮想荷重図は、左の下に示すようなものになります。



この仮想荷重問題を解くためには、まず、B点のヒンジまわりのモーメントが0になる条件を利用して、A点の反力を求めます。

次に、B点のたわみ角を求めるために、B点のせん断力QBを求めます。
この時、せん断力を正の向きに定義することに注意してください。

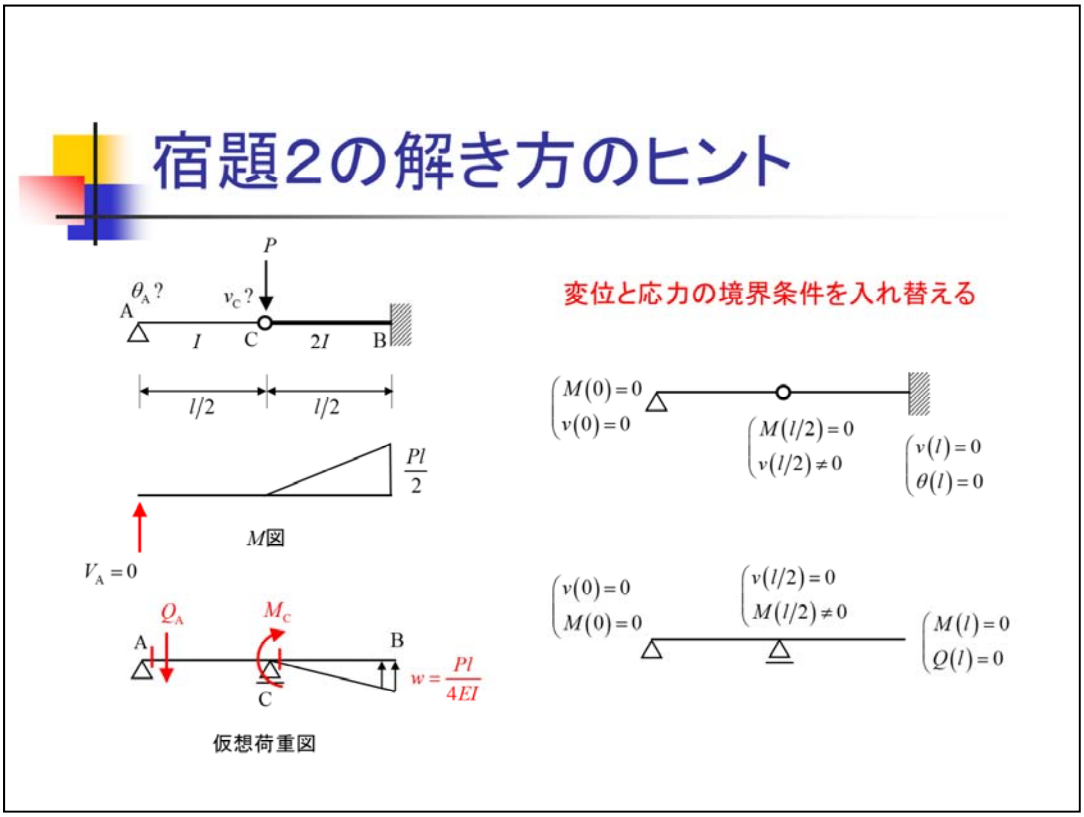
この場合、せん断力が負ですから、たわみ角は時計の反対回りになります。



この仮想荷重問題を解くためには、まず、B点のヒンジまわりのモーメントが0になる条件を利用して、A点の反力を求めます。

最後にC点のたわみvCを求めるために、C点の曲げモーメントMCを求めます。

符号のたわみの向きに注意してください。この場合は、負なので上向きです。



最後に宿題[4]の仮想荷重図について、解説しておきます。

まず、この場合の原問題の曲げモーメントを求めるには、C点で切って左側の釣合いから、A点の反力VAを求めます。

この場合、AC間に力が無いため、VA=0になります。

次に仮想荷重問題の境界条件は、先ほどの問題と逆になるため、図のようになります。

後は、CB間の断面2次モーメントが2Iになっていることに注意すれば、図のような仮想荷重図が求まります。

この場合は、まず、A点とC点の反力を求める必要があります。

最後に、A点の近傍で切って、A点のせん断力を求め、これからA点のたわみ角が求まります。

次に、C点の近傍を切って、C点の曲げモーメントを求めれば、C点のたわみが求まります。

この時、せん断力と曲げモーメントを正の向きに定義することに気をつけてください。