不静定力学I

仮想仕事法

本日から，仮想仕事法について勉強します。

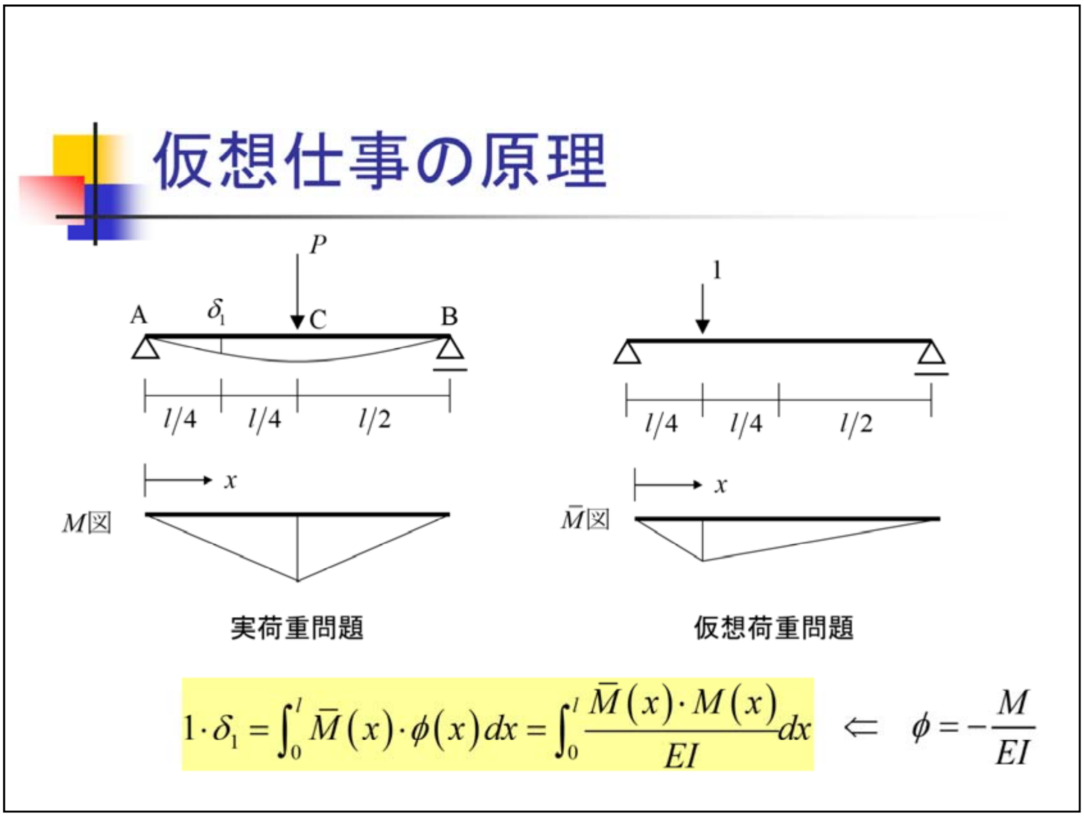
仮想仕事法は，骨組構造の変位を求めることもできますし，不静定骨組問題を解いて，曲げモーメントや軸力を求めることもできます。

仮想仕事の原理(基本原理)

- 外力がなした仕事量と内力のなした仕事量が釣り合うという原理
- 内力のなした仕事量は，(内力)×(変形)を構造全体で積分することによって求められる。

仮想仕事の原理は，外力のなした仕事量と構造内部に働く内力(軸力，曲げモーメント，せん断力)のなした仕事量が釣り合うという原理です。

また，内力のなした仕事量は，構造内部に生じる内力と，内力に対応する変形(軸方向歪み，曲率，せん断歪み)を掛けた量を積分することによって求められます。



ここで用いる仮想仕事の原理では、変位を求めたい点に大きさ1の仮想荷重を加える問題を別に考えます。

そして、この場合の仮想仕事の原理は、次のようになります。

（仮想荷重）×（実変位）＝（仮想荷重の対する内力）×（実荷重に対する変形）

仮想荷重は1で、その点のたわみはδ1となり、仮想荷重に対する内力はMに上付きバーが付いた曲げモーメントで、実荷重に対する変形は曲率Φになります。

この時、Φ=－M/EIとなりますから、これを代入して、0からlで積分すると、ここに示すような式になるわけです。

ただし、内力の積分は内力仕事量なので符号は正にしています。

これを，図に示すような単純支持梁の例題で説明します。この例題は，左図のたわみδ1を求める問題です。

この場合，左図の問題の他に，右図に示すように変位を求めたい点に大きさ1の外力（単位力）が加わる問題を考えます。

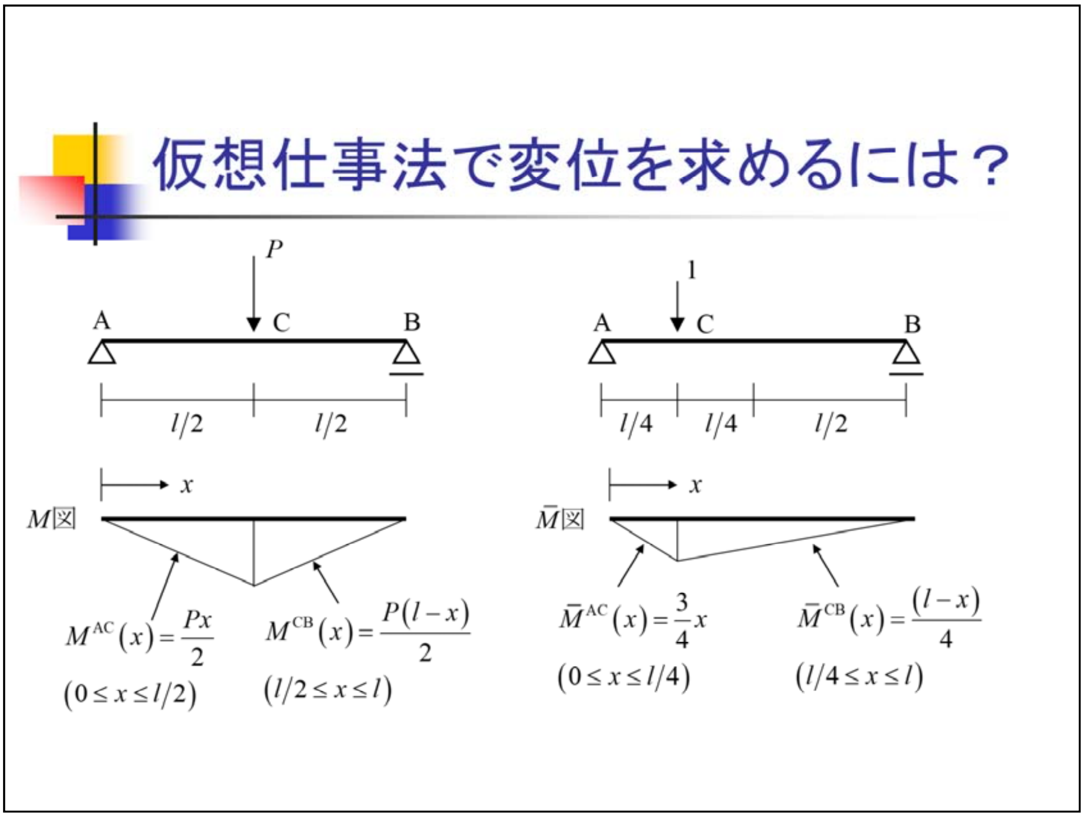
そして，これらの二つの問題の内力と外力を交差して仮想仕事の原理を適用します。

まず，外力のなす仕事では，右図の問題の外力（1）と左図の問題の変位（δ1）を掛け合わせます。

次に，内力のなす仕事では，右図の問題の内力（曲げモーメント）と，左図の問題の変形（曲率φ）を掛けたものを長さlで積分します。

また，左図の問題の曲率は，M/EIで表されますので，これを代入することで，図に示すような式が得られます。

このような応用的な原理を用いることで，任意点の変位（たわみ）を仮想仕事の原理を用いて計算することができます。



以上の仮想仕事の原理を用いて、変位δ1を求めるために、まず、各区間の曲げモーメント関数を求めます。

ここでは、左端を原点にして、右方向にxを定義しています。

この場合、仮想荷重問題の曲げモーメント関数も

仮想仕事式の計算

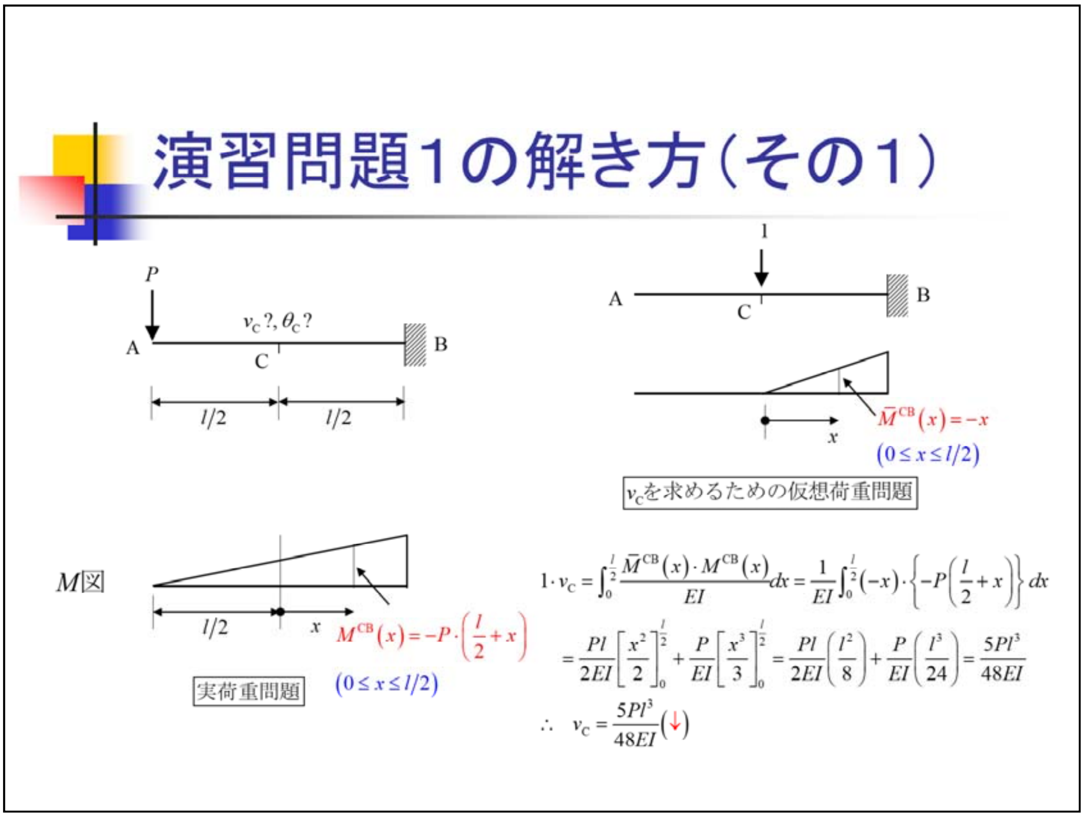
$$1\cdot\delta_1=\int_0^l \bar{M}(x)\cdot\phi(x)dx=\int_0^l\frac{\bar{M}(x)\cdot M(x)}{EI}dx$$

$$\delta_1=\frac{1}{EI}\left(\int_0^{\frac{l}{4}}\frac{Px}{2}\cdot\frac{3}{4}xdx+\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}}\frac{Px}{2}\cdot\frac{(l-x)}{4}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{P(l-x)}{2}\cdot\frac{(l-x)}{4}dx\right)$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\int_0^{\frac{l}{4}}\frac{3Px^2}{8}dx+\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}}\frac{Px(l-x)}{8}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{P(l-x)^2}{8}dx\right)$$

$$=\frac{11Pl^3}{768EI}$$

以上の曲げモーメント関数を仮想仕事式に代入して，積分を行います。
ただし、この場合，3つの区間に分けて積分を行う必要があります。
積分計算を行うと，δ1が，ここに示すように計算されます。



次に、演習問題1の解き方について解説します。

この問題は、片持ち梁中央のたわみとたわみ角を求める問題です。

まず、実荷重問題の曲げモーメント関数を求めます。

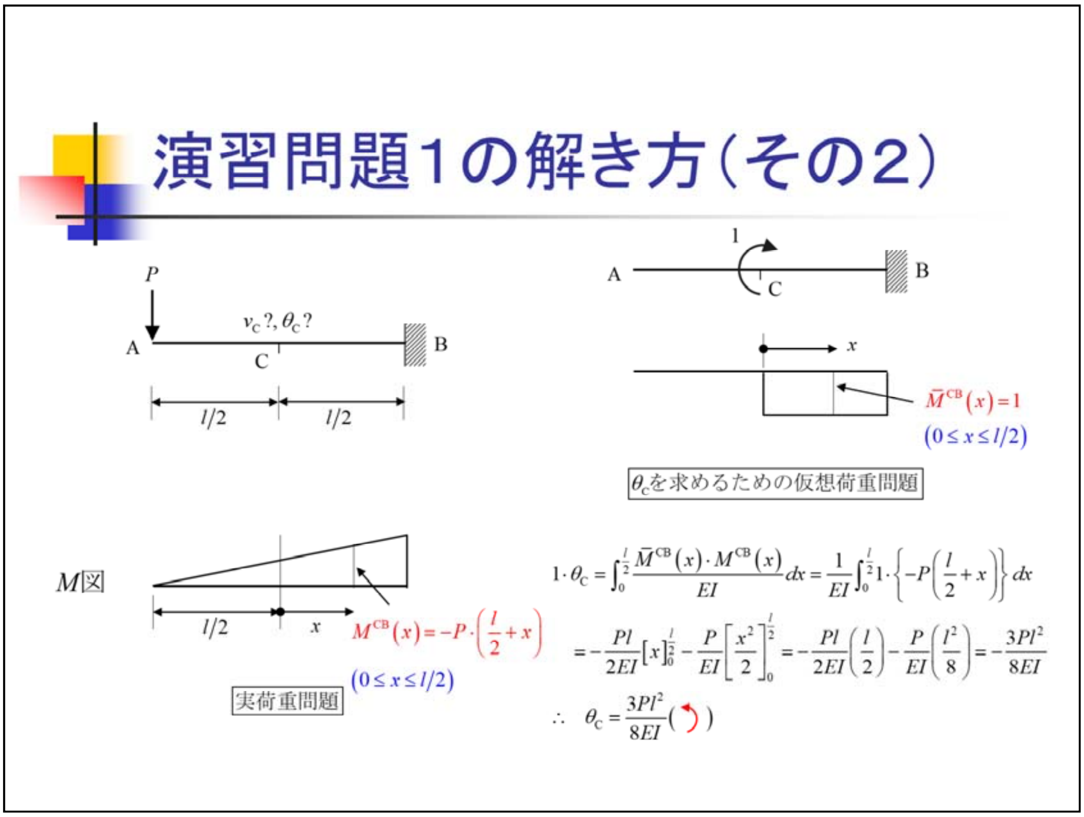
ただし、この場合、右の図の仮想荷重問題を見てもらうと、AC間には曲げモーメントが存在しないので、積分を容易にするために、xの原点を梁中央とします。

次に、仮想荷重問題の曲げモーメント関数を求めます。この場合、実荷重問題とxの原点と方向を一致させる必要があることに注意してください。

そして、仮想仕事式を立てると、ここに示すようになります。なお、AB間の積分は0になるので省略しています。

積分範囲が0~l/2になることに注意してください。

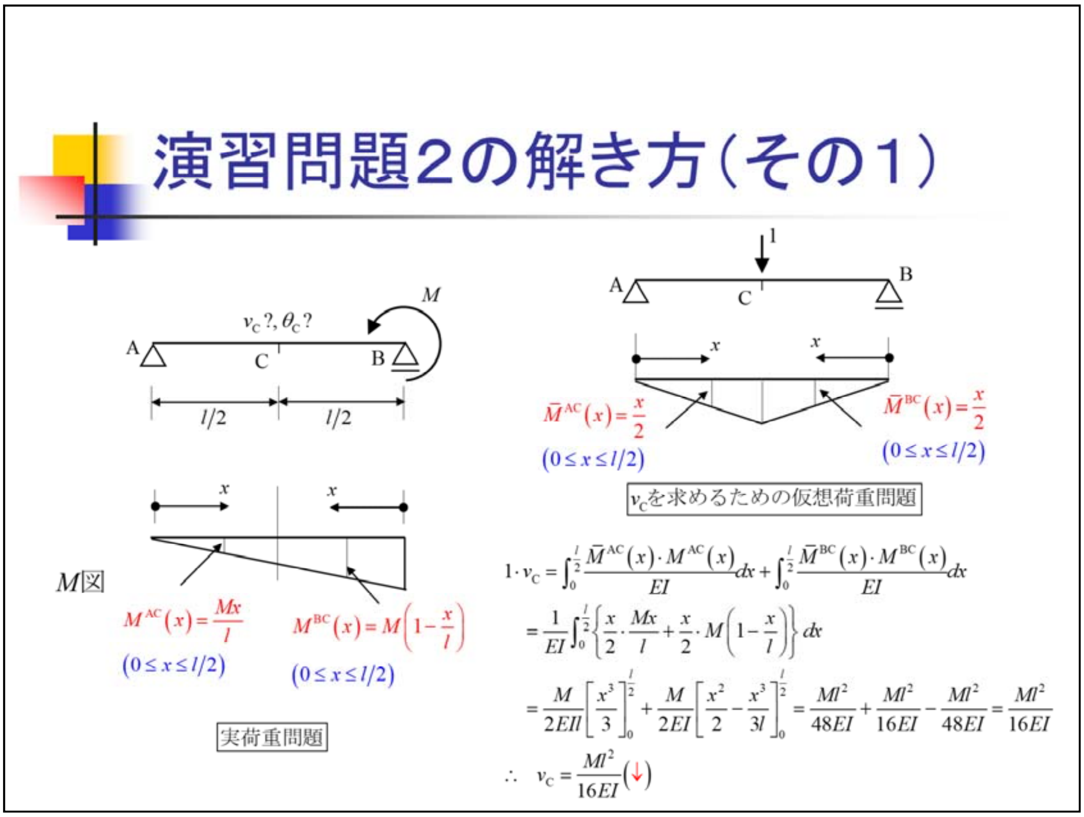
この場合は、答えが＋ですから、たわみの向きは下向きになります。



次に、たわみ角を求めるための仮想荷重問題を定義し、曲げモーメント関数を求めます
。

仮想仕事式を立てるとここに示すようになります。

この場合は、答えがーになりますから、たわみ角の回転方向は時計の反対回りになります。

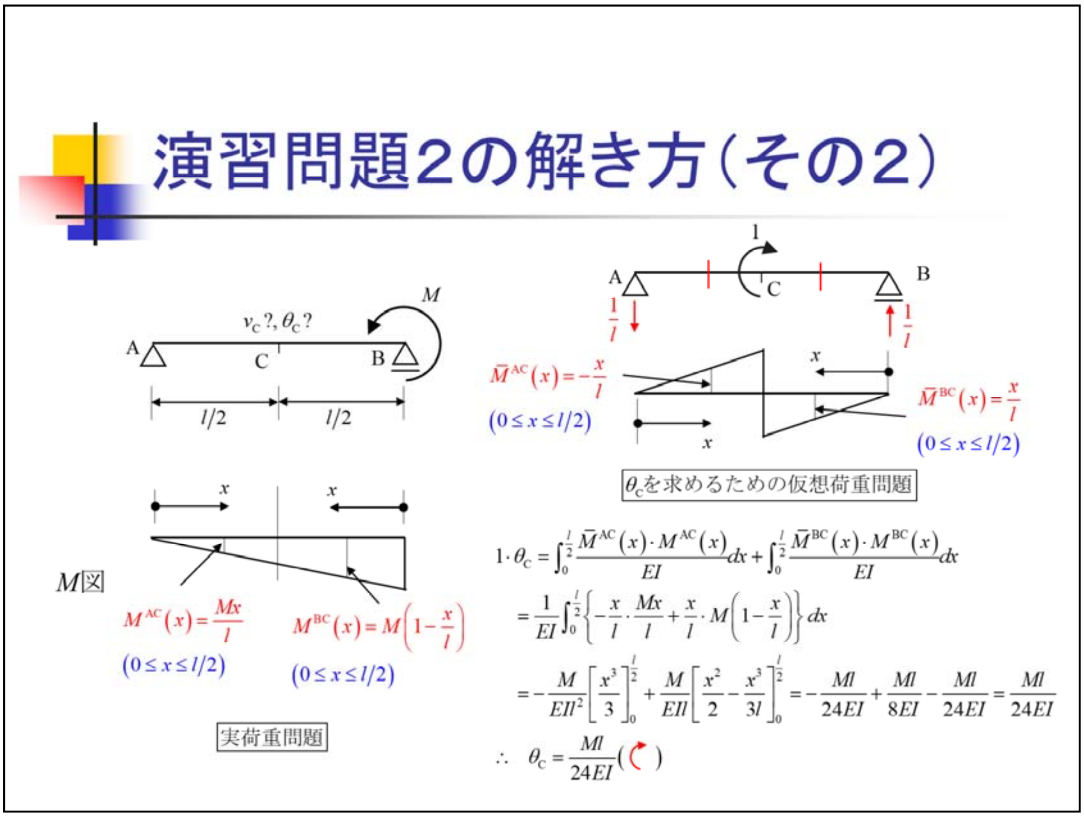


次は、単純梁の中央のたわみとたわみ角を求める問題です。

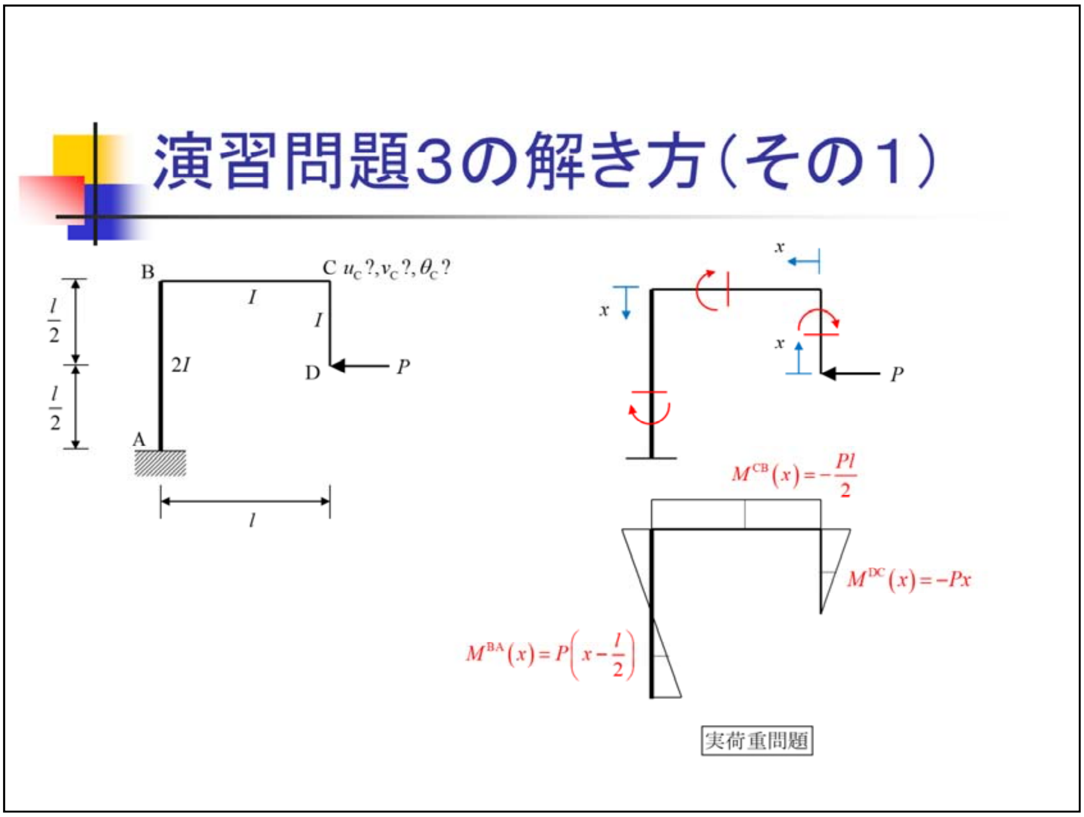
まず、たわみvcを求める仮想荷重問題を考えると、右の図のようになります。

この場合は、AC間はA点を原点とし、BC間はB点を原点にする方が関数が簡単になるため、実荷重の座標も同様に定義します。

後は、仮想仕事式を立てて曲げモーメント関数を代入すれば、たわみvCが求まります。



同様に、θCを求めるための仮想荷重問題は、右図に示すようになりますから、曲げモーメント関数を求めて、仮想仕事式を立てると、たわみ角θCが求められます。



次は、ラーメンの問題です。

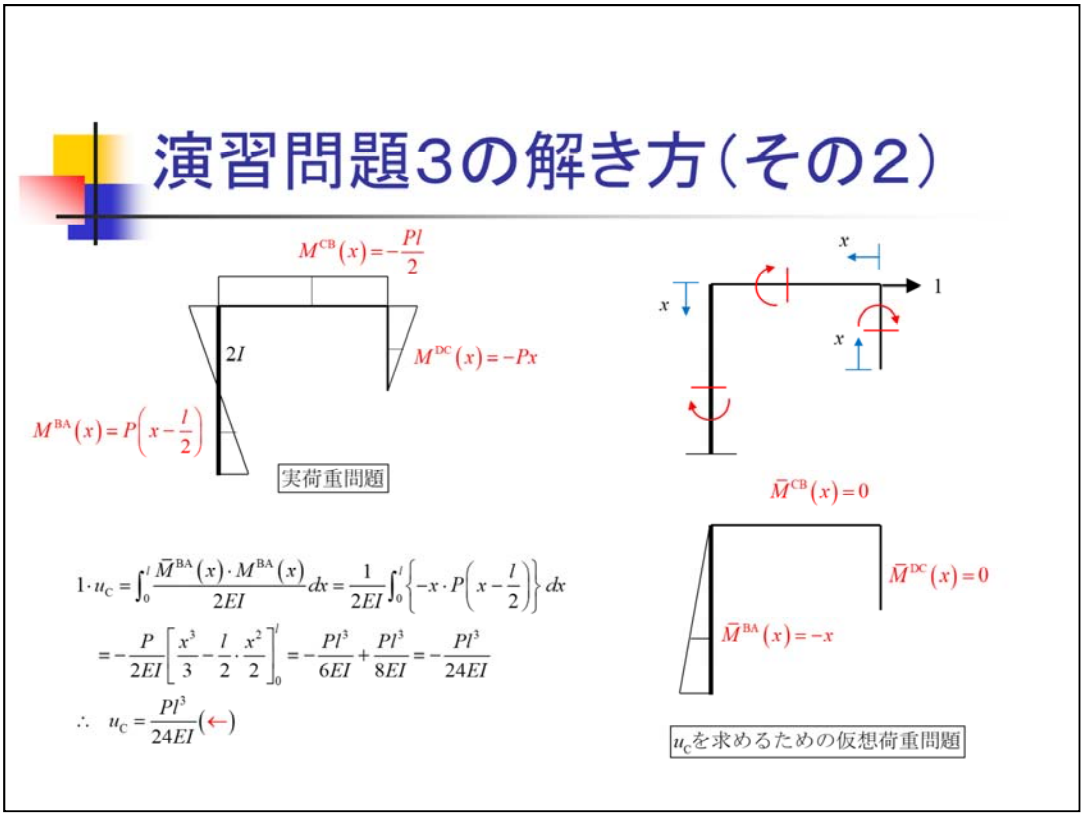
この問題では、C点の水平変位uC、鉛直変位vC、回転角θCを求める必要があります。

まず、実荷重問題の曲げモーメントを求めます。

それぞれの部材の座標、すなわち、部材を切った時の曲げモーメント関数の定義は、実荷重問題と仮想荷重問題で同じにする必要があります。

この問題は、片持梁なので、DC、CB、BAの順に曲げモーメント関数を求めます。

(このように切れば、A点の反力計算をせずに済みます。)

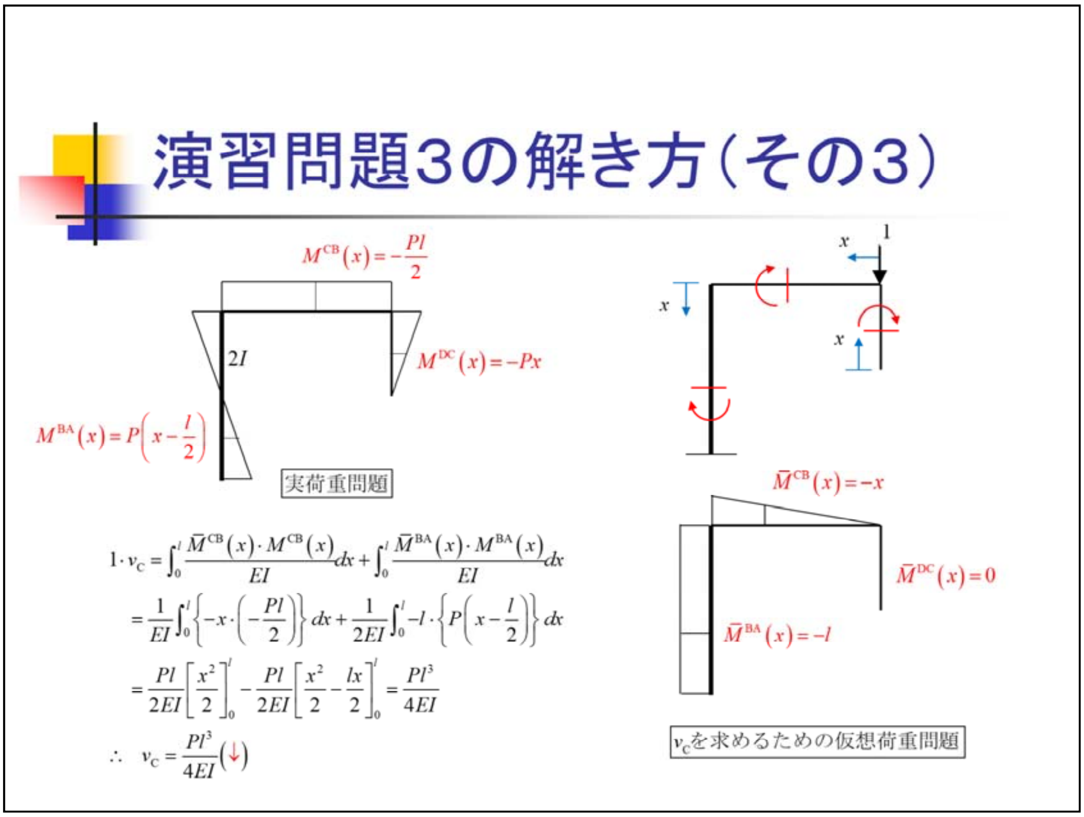


まず、図の右に、uCを求めるための仮想荷重問題を定義し、その曲げモーメント関数を求めています。

各部材の切断面の曲げモーメント関数の定義（座標系）は、実荷重問題と同じにしています。

この場合、仮想荷重問題の曲げモーメントはBA間にしかないので、仮想仕事式を立てると、左下のようになります。

ここでは、解がマイナスで求まったので、変位の方向は、仮想荷重の向きと逆向きになります。

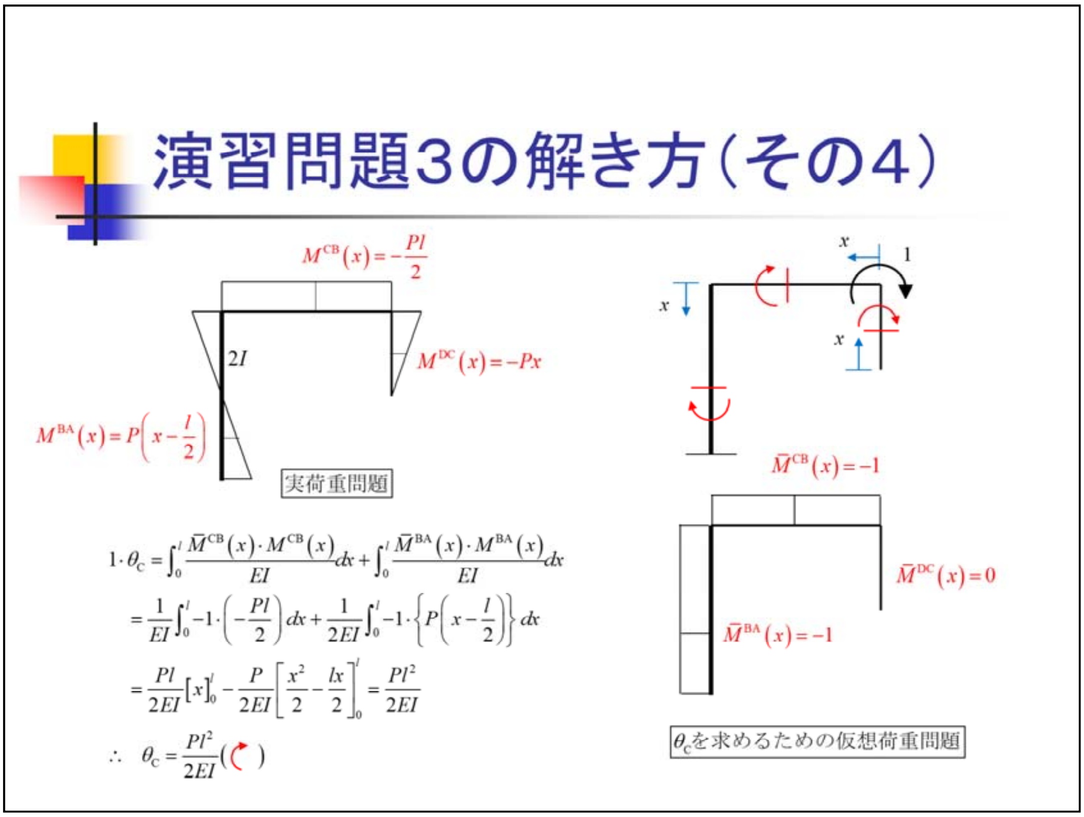


次に、vCを求めるための仮想荷重問題を定義し、曲げモーメント関数を求めます。

この場合は、CB間とBA間で積分が必要になります。

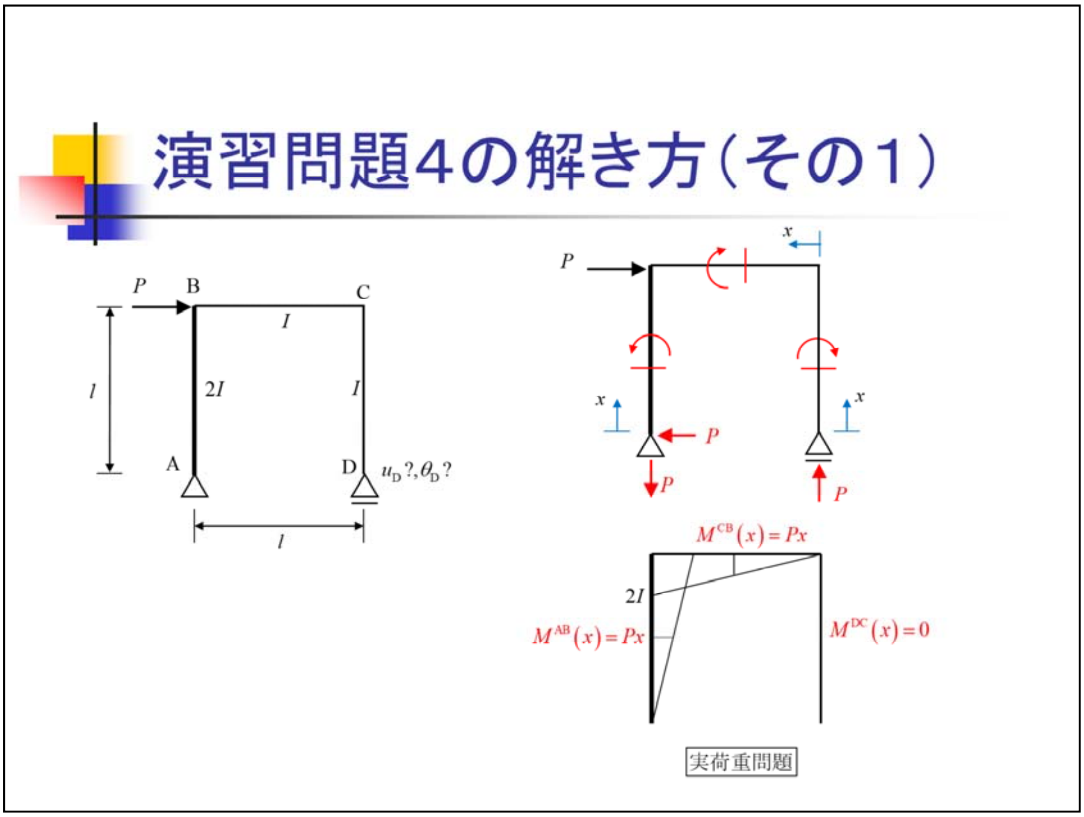
仮想荷重式を立てて積分を行うと、左下のようになります。

この場合の解はプラスなので、仮想荷重と同じ向き（下向き）になります。



最後に、θCを求めるための仮想荷重問題を定義し、曲げモーメント関数を求めます。

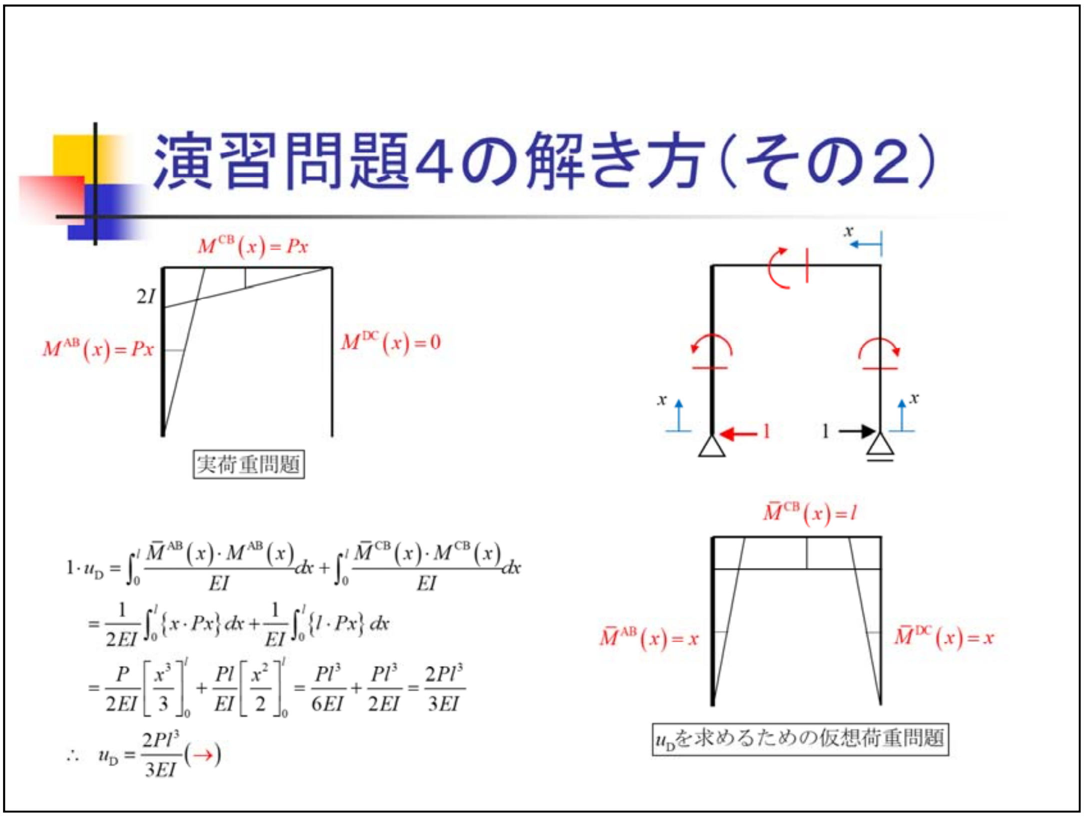
そして、仮想仕事式を立てて積分を行うと、この場合の解は、正になるので、仮想荷重と同じ向き（時計回り）の回転角となります。



次に、この問題は、単純支持ラーメンのD点の水平変位uDと回転角θDを求める問題です。

各部材の切断面と曲げモーメント関数の定義をきちんと書きます。

この定義は、仮想荷重問題と同じにする必要があります。

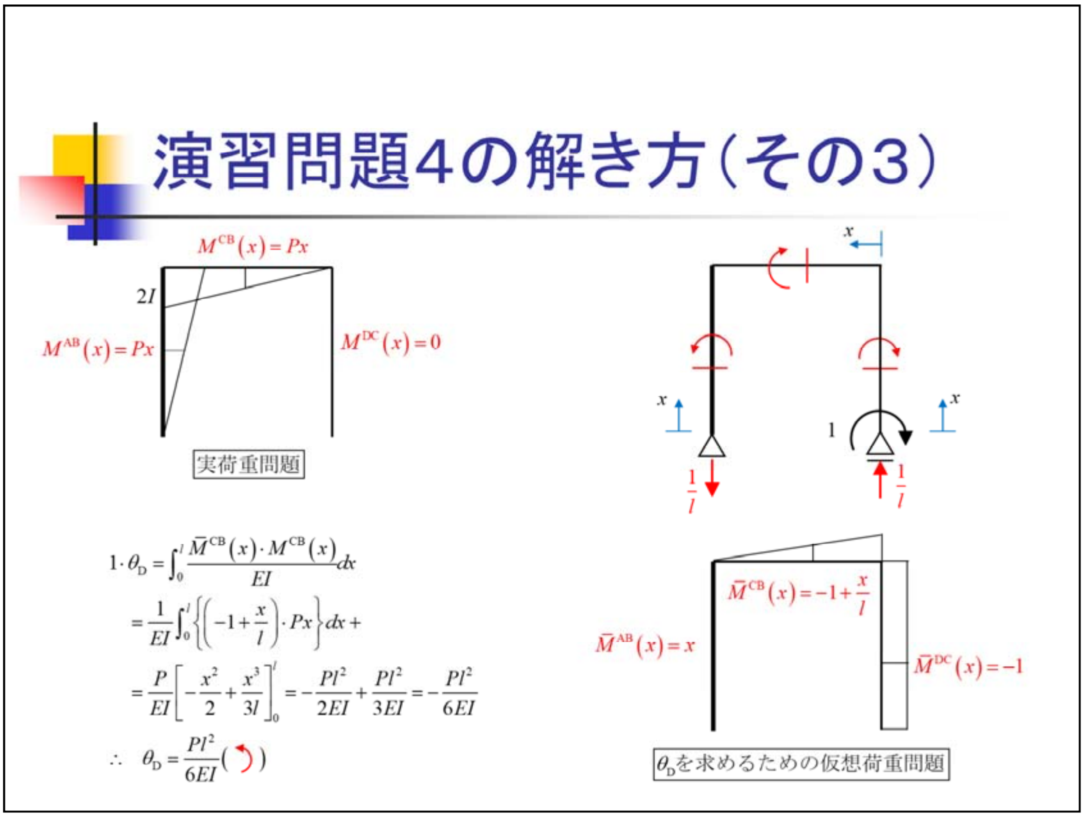


次に、uDを求めるための仮想荷重問題を定義し、この場合の曲げモーメント関数を求めます。

なお、各部材の断面の切り方、曲げモーメント関数の定義は、実荷重問題と同じにする必要があります。

この場合は、実荷重問題のDC間の曲げモーメントは0になるため、AB間とCB間の積分になります。

解は、プラスとなったので、変位の方向は仮想荷重と同じ方向です。



次に、θDを求めるための仮想荷重問題を定義し、曲げモーメント関数を求めます。

この場合は、CB間以外の積分は0になります。

仮想仕事式を立てて計算すると、この場合の解はマイナスとなるので、回転角の方向は、仮想荷重と逆向きになります。
この場合、仮想荷重が時計回りなので、θDは、時計の反対回りになります。

宿題の難易度は、やや高いですが、テストは宿題レベルと考えてください。