



# 不静定力学I

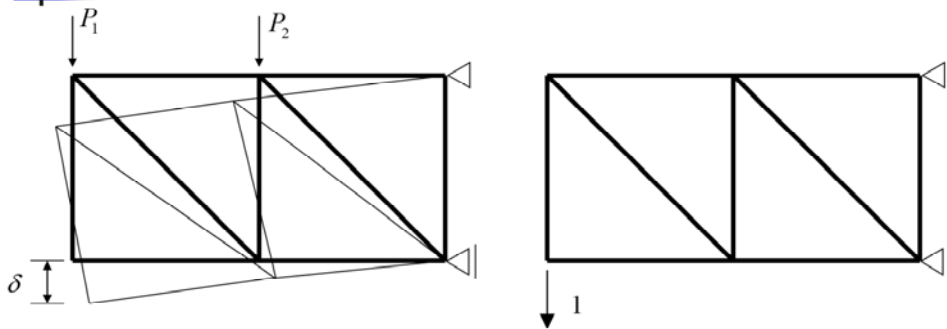
---

## 仮想仕事法による 静定トラスの変位

今回は、仮想仕事法を用いた静定トラスの変位の求め方を学びます。



## 仮想仕事の原理



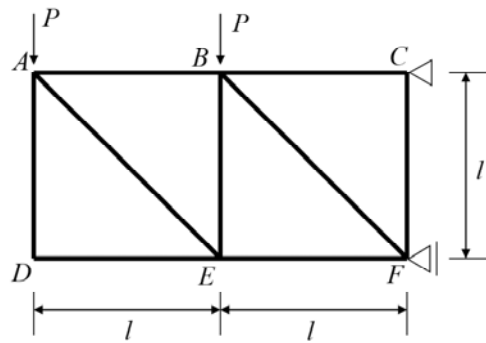
$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta &= \sum \int_0^{l_i} \bar{N}_i \cdot \varepsilon_i dx = \sum \int_0^{l_i} \bar{N}_i \cdot \frac{N_i}{EA_i} dx \\ &= \sum \frac{\bar{N}_i \cdot N_i}{EA_i} \int_0^{l_i} dx = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot N_i}{EA_i} l_i \end{aligned}$$

トラスでは曲げモーメントとせん断力は働かないため、トラスの仮想仕事の原理式は軸力のみで表されます。

また、一般に軸力は、部材内で一定になりますから、積分は単にlを掛けるだけの式になります。

したがって、トラスの変位は、実荷重問題の軸力と、仮想荷重問題の軸力が求まれば、計算は容易です。

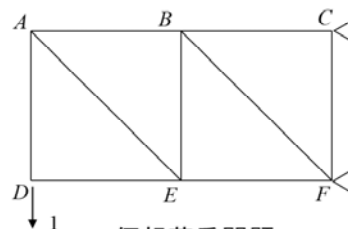
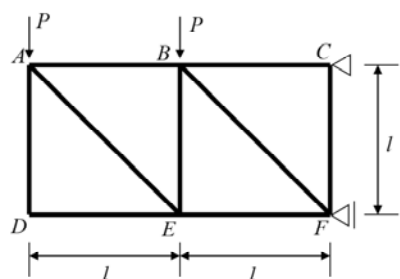
# 例題



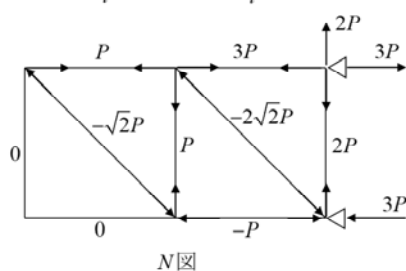
D点の鉛直変位を求める例題

例題として、この図に示すような問題を考えます。

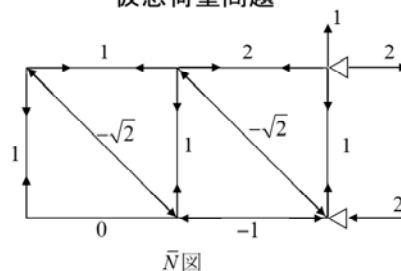
# 原問題と仮想荷重問題の軸力を求める



仮想荷重問題



N図

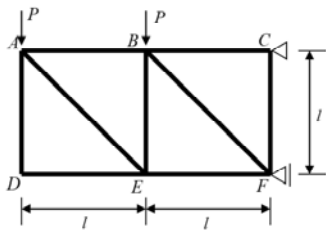
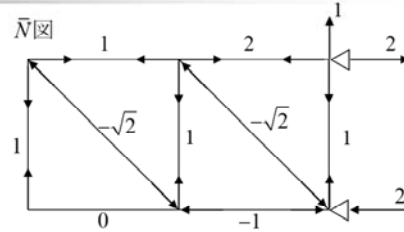
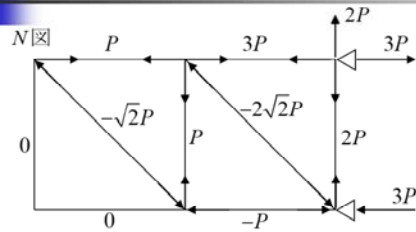


$\bar{N}$ 図

この問題を解くために、まず、実荷重問題と仮想荷重問題の軸力を求めます。



## 仮想仕事式を計算する表の作成



$$\delta_D = (11 + 6\sqrt{2}) \frac{Pl}{EA}$$

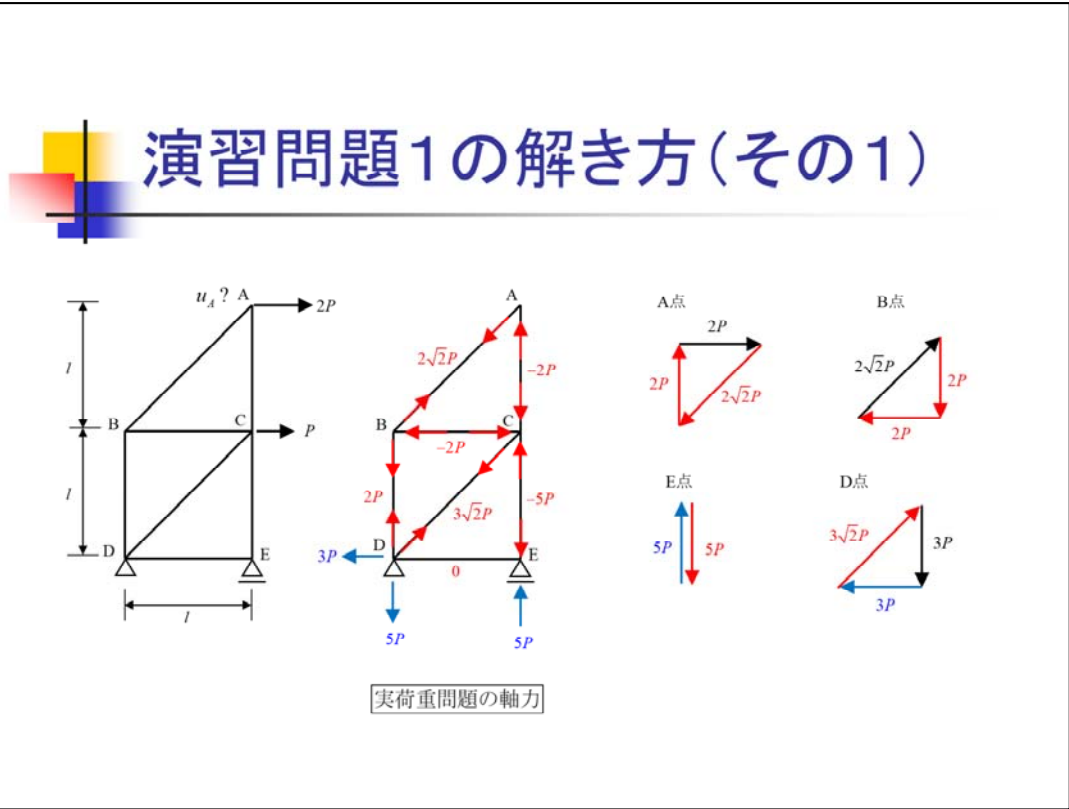
部材	長さ	$N_i$	$\bar{N}_i$	$\bar{N}_i N_i l_i$
AB	$l$	$P$	1	$Pl$
BC	$l$	$3P$	2	$6Pl$
DE	$l$	0	0	0
EF	$l$	$-P$	-1	$Pl$
AD	$l$	0	1	0
BE	$l$	$P$	1	$Pl$
CF	$l$	$2P$	1	$2Pl$
AE	$\sqrt{2}l$	$-\sqrt{2}P$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}Pl$
BF	$\sqrt{2}l$	$-2\sqrt{2}P$	$-\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}Pl$

$$\Sigma[(11 + 6\sqrt{2})Pl]$$

次に、ここに示されるような表を作成します。

表には、部材の表記、部材長さ、実荷重問題の部材の軸力、仮想荷重問題の部材の軸力、両軸力と部材長さを掛けた値を書き込みます。

そして、すべての部材のNNIを足し合わせて、EAで割れば、D点の変位を求めることができます。



次に演習問題1の解き方を解説します。

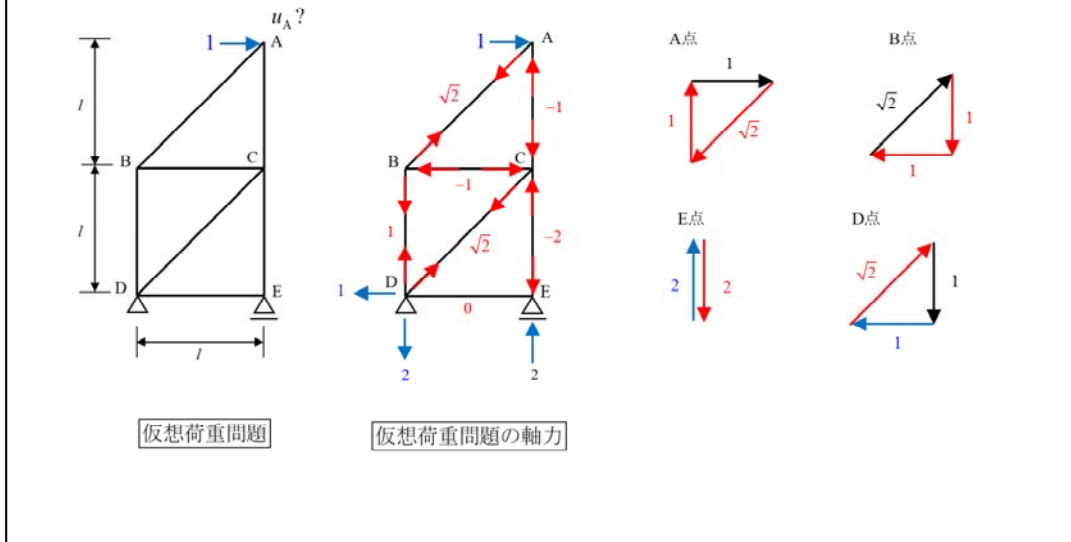
この問題では、まず反力を求めます。

まず、A点→B点→E点→D点の順に示力図を描いて、それぞれの部材の軸力を求めます。

図では、未知の軸力を赤で示しています。

ここでは、圧縮軸力では、一符号で示しています。これは、表の計算でミスがないようにするためです。

## 演習問題1の解き方(その2)

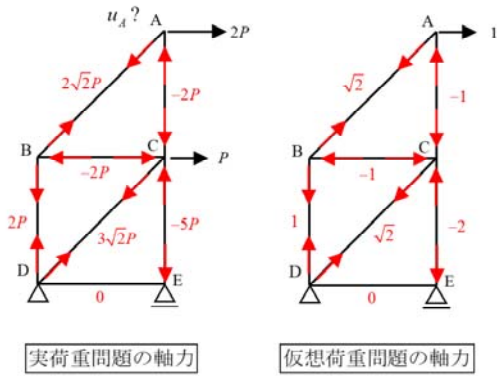


次に仮想荷重問題の軸力を求めます。

この場合は、A点の水平変位を求める問題ですから、A点の水平方向に1の仮想荷重を加えます。

反力を計算したら、実荷重と同様に示力図を描いて、未知の軸力を求めていきます。

## 演習問題1の解き方(その3)



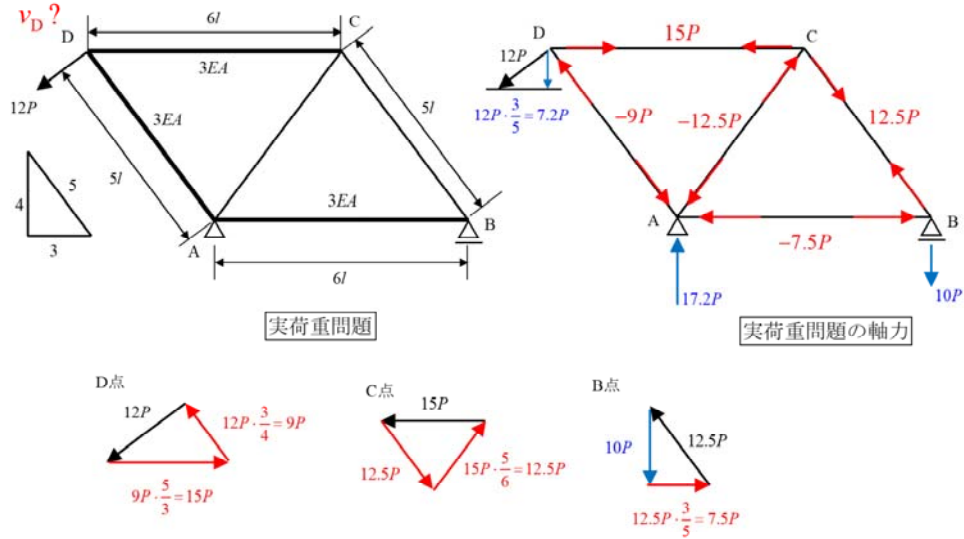
部材	$N_i$	$\bar{N}_i$	$l_i$	$\bar{N}_i N_i l_i$
AB	$2\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}l$	$4\sqrt{2}Pl$
AC	$-2P$	$-1$	$l$	$2Pl$
BC	$-2P$	$-1$	$l$	$2Pl$
BD	$2P$	$1$	$l$	$2Pl$
CD	$3\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}l$	$6\sqrt{2}Pl$
CE	$-5P$	$-2$	$l$	$10Pl$
DE	$0$	$0$	$l$	$0$
				$\sum \bar{N}_i N_i l_i = (16 + 10\sqrt{2})Pl$

$$\therefore u_A = \frac{(16 + 10\sqrt{2})Pl}{EA} (\rightarrow)$$

最後に、実荷重問題の軸力と仮想荷重問題の軸力から、図のような表を作成し、A点の水平変位を求めます。



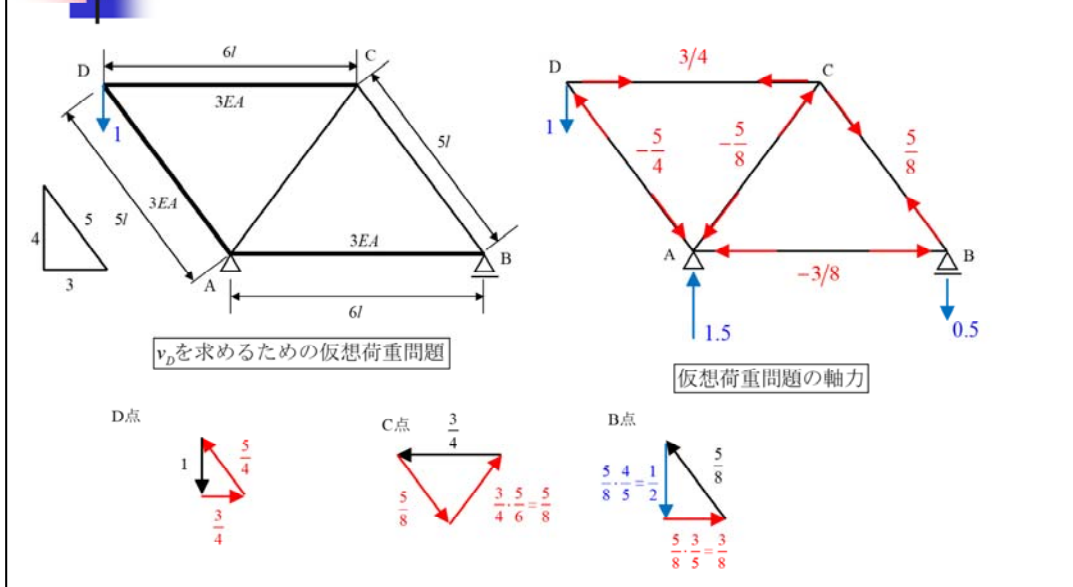
# 演習問題2の解き方(その1)



演習問題2においても、示力図が多少複雑になりますが、手順は演習問題1と同様です。

まず、ここでは、実荷重問題の軸力を求めています。

## 演習問題2の解き方(その2)

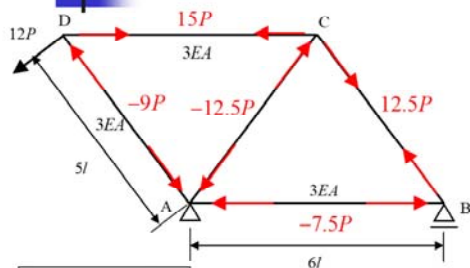


次に、仮想荷重問題を定義し、仮想荷重問題の軸力を求めます。

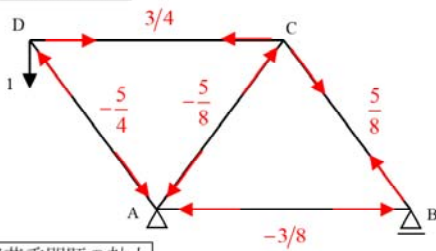
この場合は、D点の鉛直変位を求める問題ですから、D点の鉛直方向に仮想荷重を定義します。

次に、反力を求め、実荷重問題と同様に、示力図によって軸力を求めて行きます。

## 演習問題2の解き方(その3)



実荷重問題の軸力



仮想荷重問題の軸力

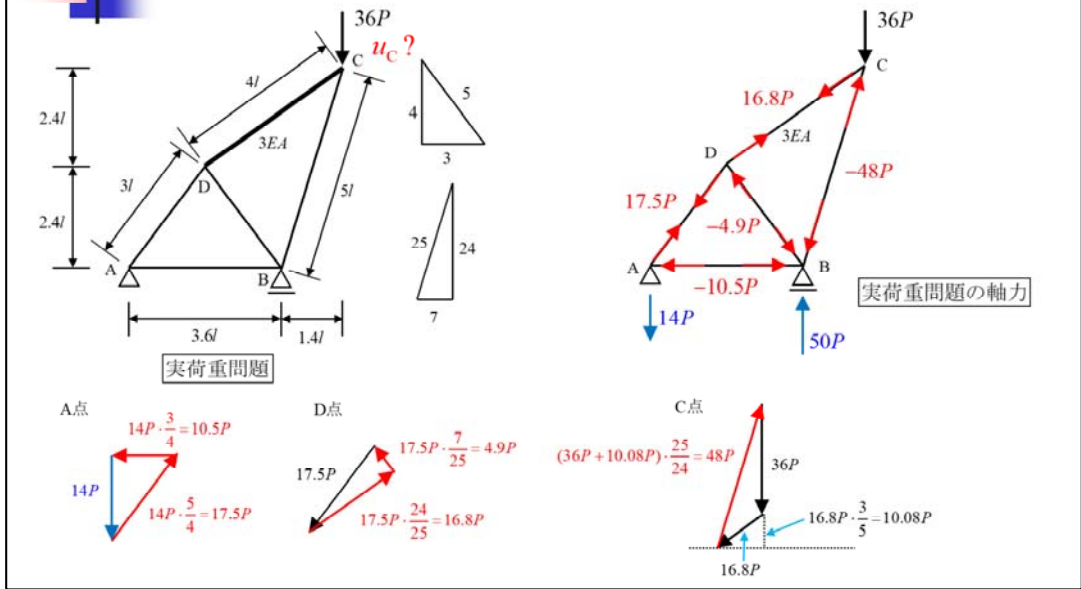
部材	$N_i$	$\bar{N}_i$	$l_i$	$1/EA_i$	$\bar{N}_i N_i l_i / EA_i$
AB	$-7.5P$	$-3/8$	$6l$	$1/3$	$45Pl/8$
AC	$-12.5P$	$-5/8$	$5l$	$1$	$312.5Pl/8$
AD	$-9P$	$-5/4$	$5l$	$1/3$	$150Pl/8$
BC	$12.5P$	$5/8$	$5l$	$1$	$312.5Pl/8$
CD	$15P$	$3/4$	$6l$	$1/3$	$180Pl/8$
					$\sum \bar{N}_i N_i l_i / EA_i = 125Pl$

$$\therefore v_D = \frac{125Pl}{EA} (\downarrow)$$

最後に、表計算によって、変位を計算します。

なお、ここでは、AB材、AD材、CD材の断面定数が3EAであることに注意が必要です。

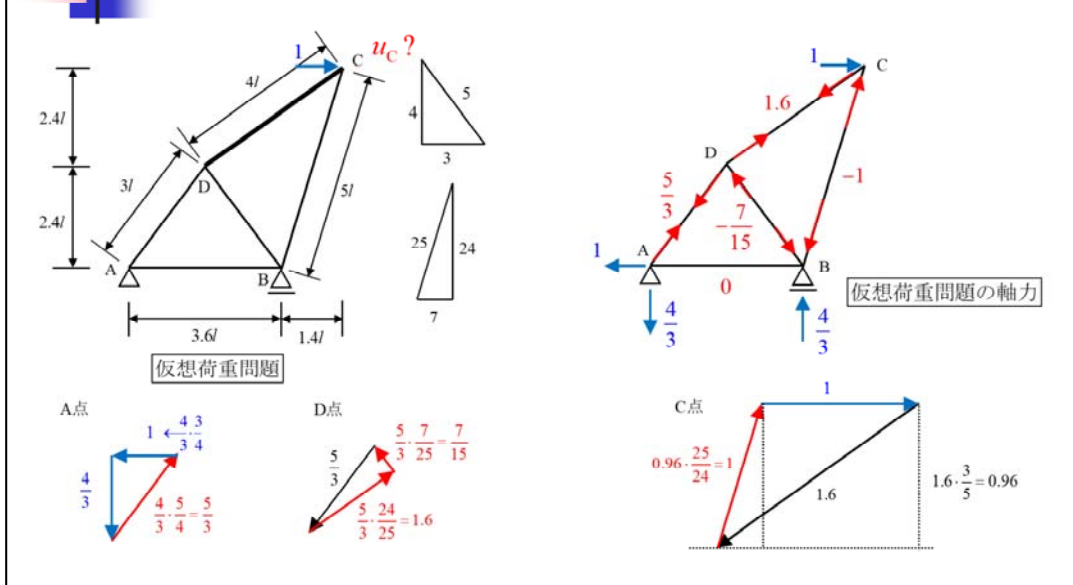
# 演習問題3の解き方(その1)



演習問題3についても、解き方は、演習問題1、2と同様です。

ただし、この場合は、2つの三角形の比を使う必要があることに注意が必要です。

## 演習問題3の解き方(その2)

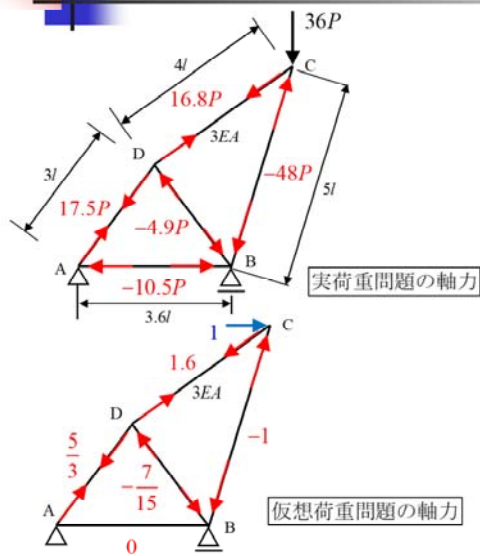


次に仮想荷重問題を定義し、仮想荷重問題の軸力を求めます。

この場合は、C点の水平変位を求める問題ですから、C点の水平方向に1の仮想荷重を加えます。

そして、反力を求め、部材の軸力を求めて行きます。

## 演習問題3の解き方(その3)



部材	$N_i$	$\bar{N}_i$	$l_i$	$1/EA_i$	$\bar{N}_i N_i l_i / EA_i$
AB	$-10.5P$	0	$3.6l$	1	0
AD	$17.5P$	$5/3$	$3l$	1	$87.5Pl$
BC	$-48P$	-1	$5l$	1	$240Pl$
BD	$-4.9P$	$-7/15$	$3l$	1	$6.86Pl$
CD	$16.8P$	1.6	$4l$	$1/3$	$35.84Pl$
					$\sum \bar{N}_i N_i l_i / EA_i = 370.2Pl$

$$\therefore u_c = \frac{370.2Pl}{EA} (\rightarrow)$$

最後に、実荷重問題の軸力と仮想荷重問題の軸力から、表の計算により、C点の水平変位を求めます。

この場合は、CD材の断面定数が $3EA$ であることに注意が必要です。