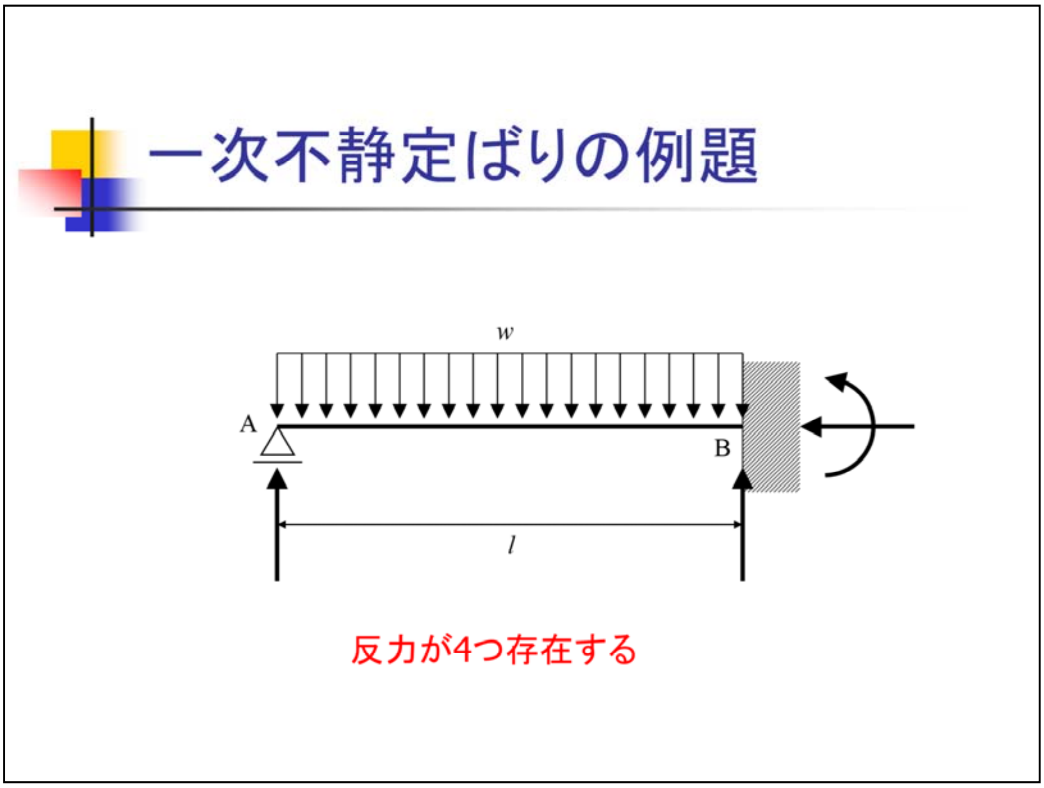
不静定力学I

不静定骨組の応力
（仮想仕事法）

今回から，不静定骨組の解法について勉強します。

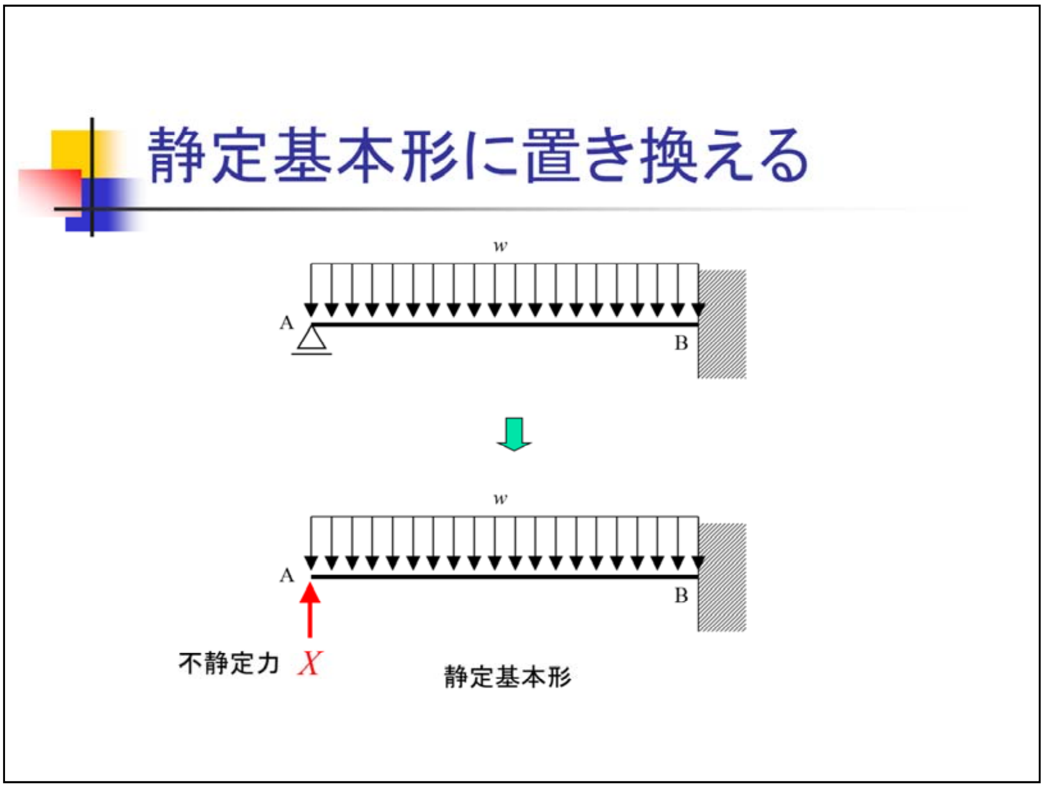


例えば，この問題では，4つの反力が存在するので，不静定骨組となります。

しかし，例えば，A点のローラー支持を除くと，片持ばりになり，静定骨組になります。

また，B点の固定支持をピン支持に変えることによっても，静定骨組にすることができます。

このように，1つの反力を減らすことで，静定骨組に変えることのできる骨組は1次の不静定問題と呼ばれます。



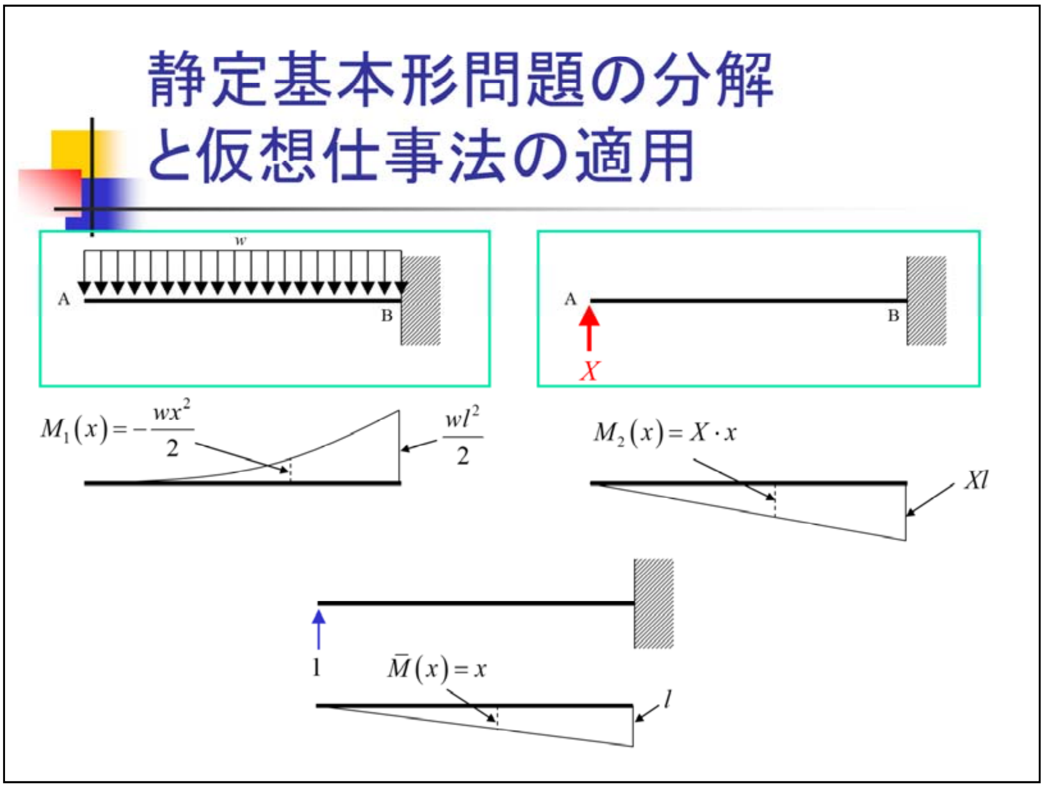
この問題の解き方は，まず，不静定骨組が静定骨組になるように，支持方法を変化させます。

この場合は，A点のローラ支持を除いて、片持梁に変換します。

この時，下側の静定骨組では，A点のローラ支持の鉛直反力が消えてしまいますので，この反力を大きさXの未知力として定義します。

このXの力は，不静定力と呼ばれます。Xの方向は，上下どちらでも構いませんが，ここでは反力と同じ方向で定義しています。

なお，不静定骨組を静定骨組と不静定力で表した問題を静定基本形と呼びます。

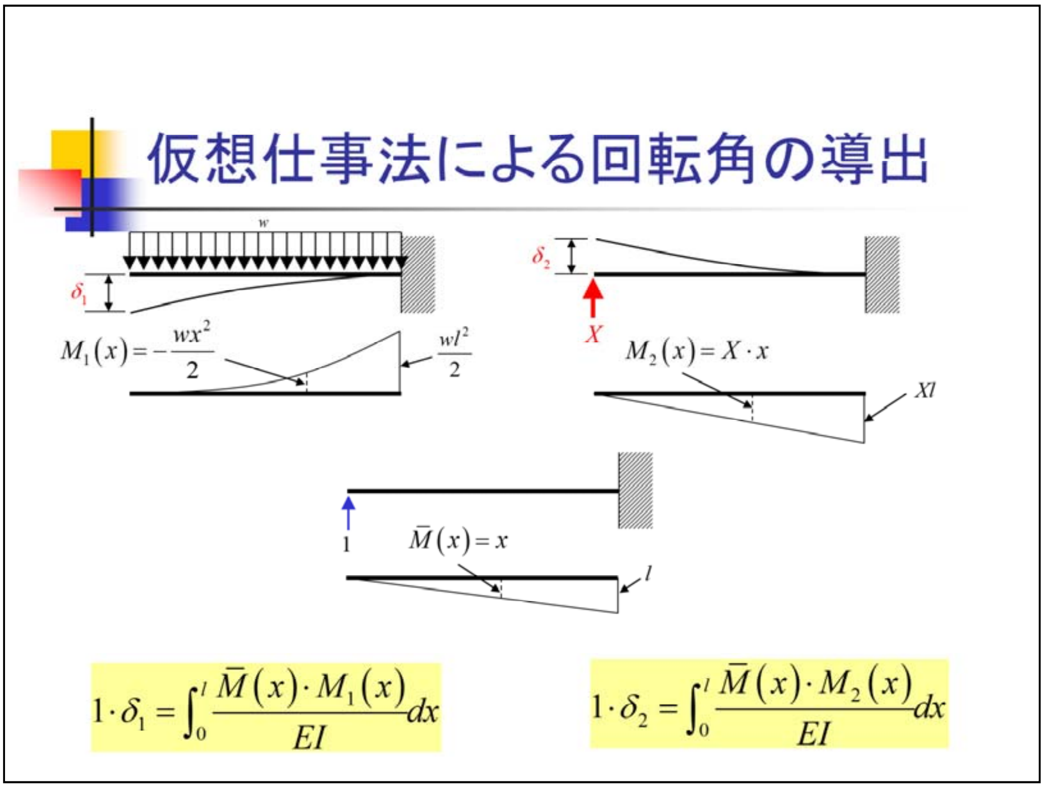


次に，静定基本形を，不静定力を除いた問題と不静定力のみが加わる問題に分離します。

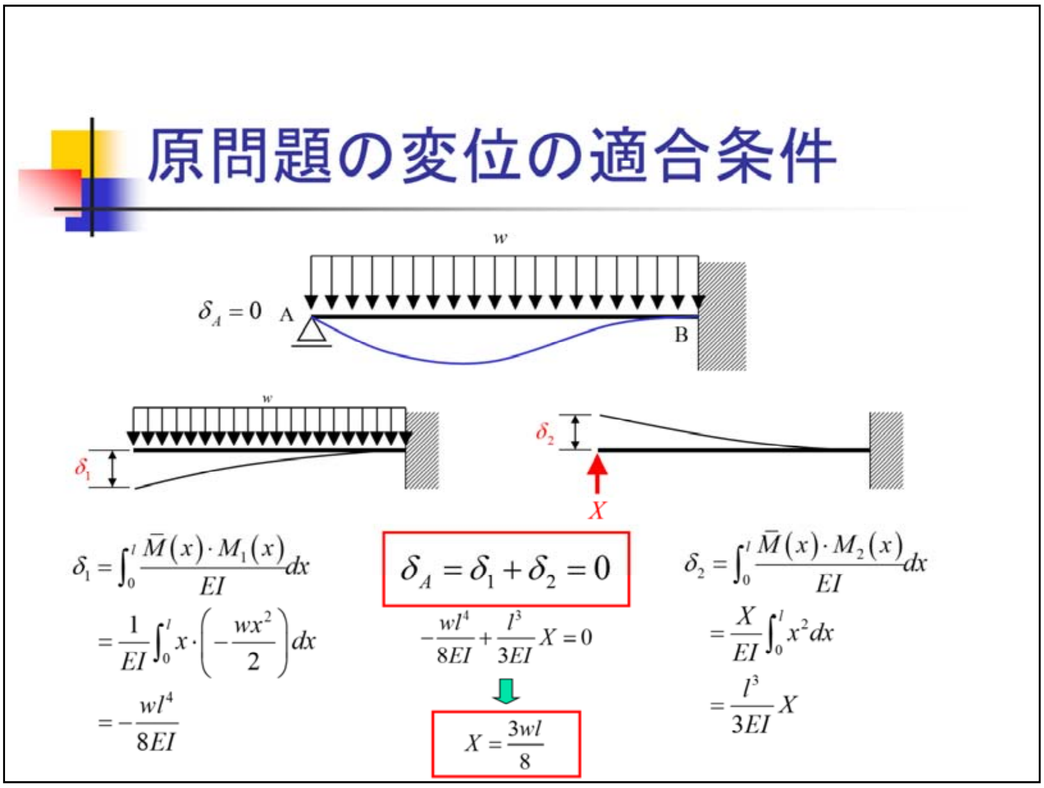
そして，仮想仕事法によって，それぞれの問題のA点の鉛直変位（たわみ）を求めます。

そのために，A点の正方向に単位の仮想力を与えた仮想荷重問題を定義します。

そして，それぞれの問題の曲げモーメントの関数を求めます。

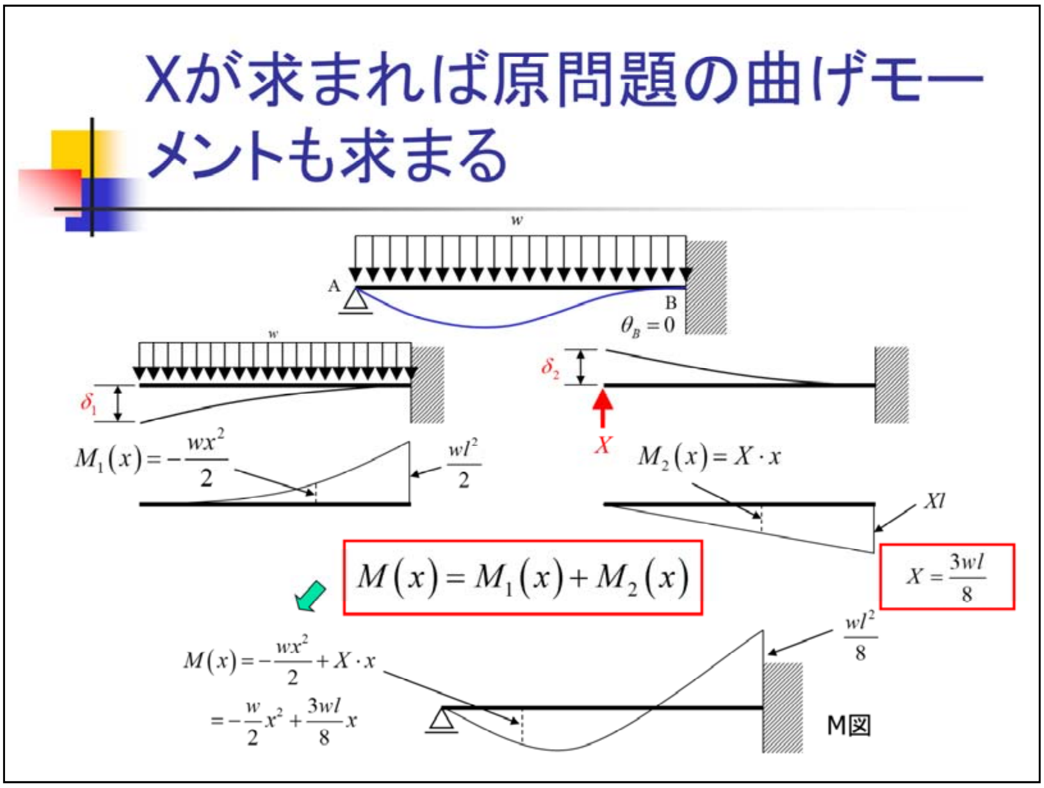


次に，仮想仕事法により，それぞれの問題のA点の変位を求めます。



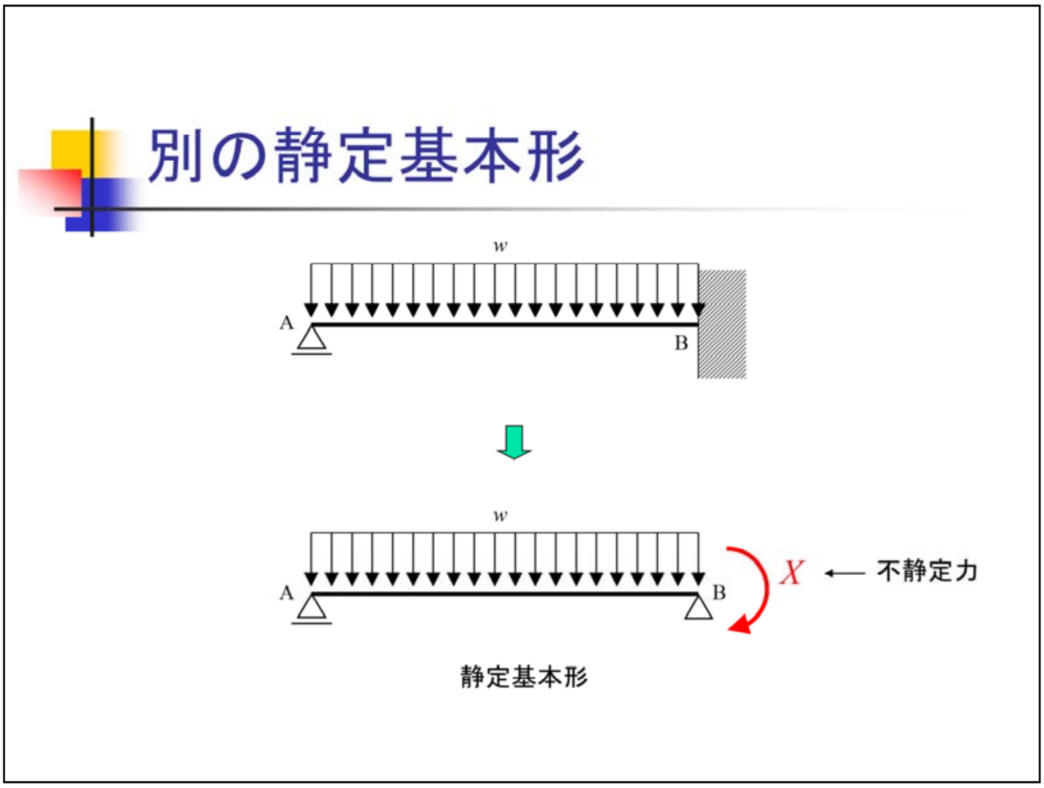
原問題では，A点の変位は0になっている必要があるため，δ1＋δ2は0になる必要があります。

この条件から，不静定力Xが求められます。



最後に，原問題の曲げモーメント関数M(x)は，M1(x)とM2(x)を加えた式から求まります。

この式を用いれば，原問題の曲げモーメント図を描くことができます。

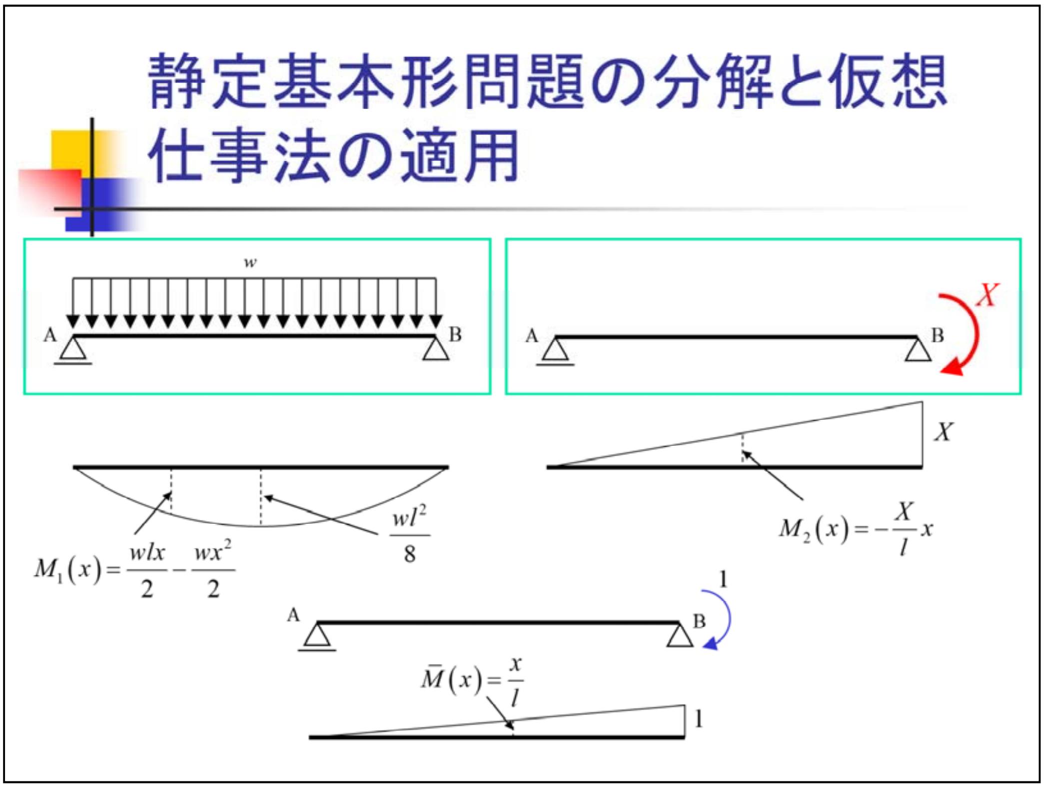


この問題は、単純梁型の静定基本形に変換して解くこともできます。

この場合は，B点の固定支持をピン支持に置き換えることによって静定骨組に直しています。

この時，下側の静定骨組では，B点の固定支持のモーメント反力が消えてしまいますので，この反力を大きさXの不静定モーメントとして定義します。

なお，Xの方向は，どちらの回転方向も構いませんが，この場合は時計まわりで定義しています。

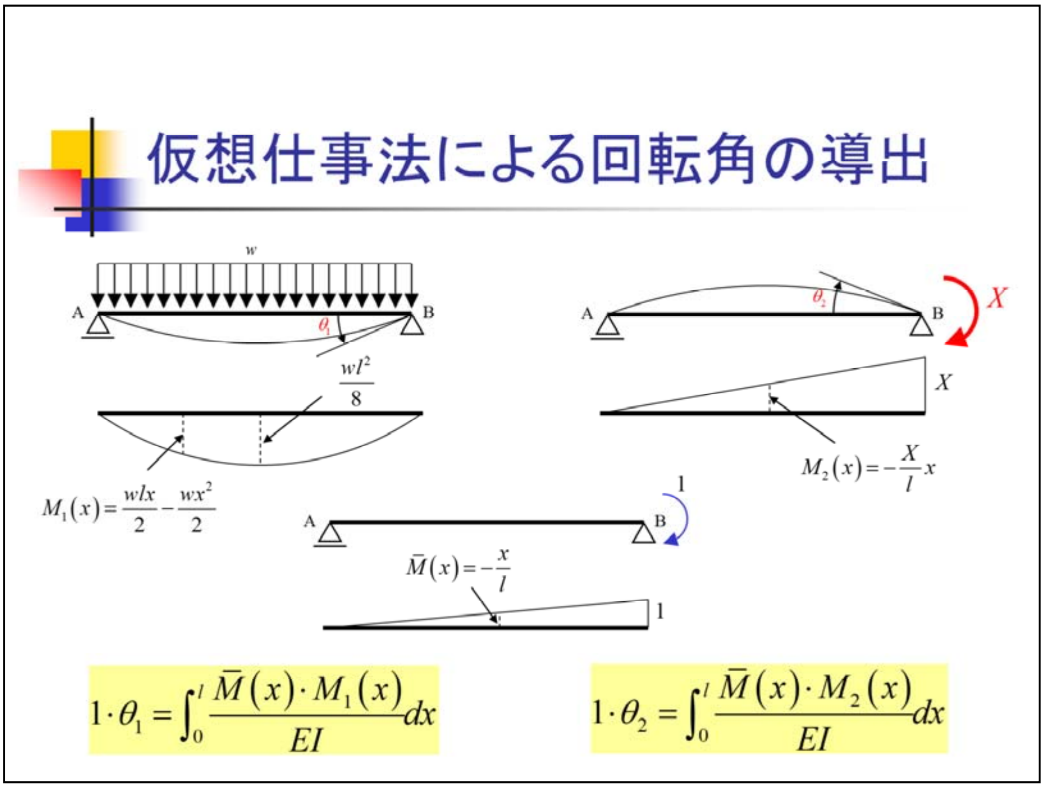


次に，静定基本形問題を，不静定力を除いた問題と，不静定力のみが加わった問題に分離します。

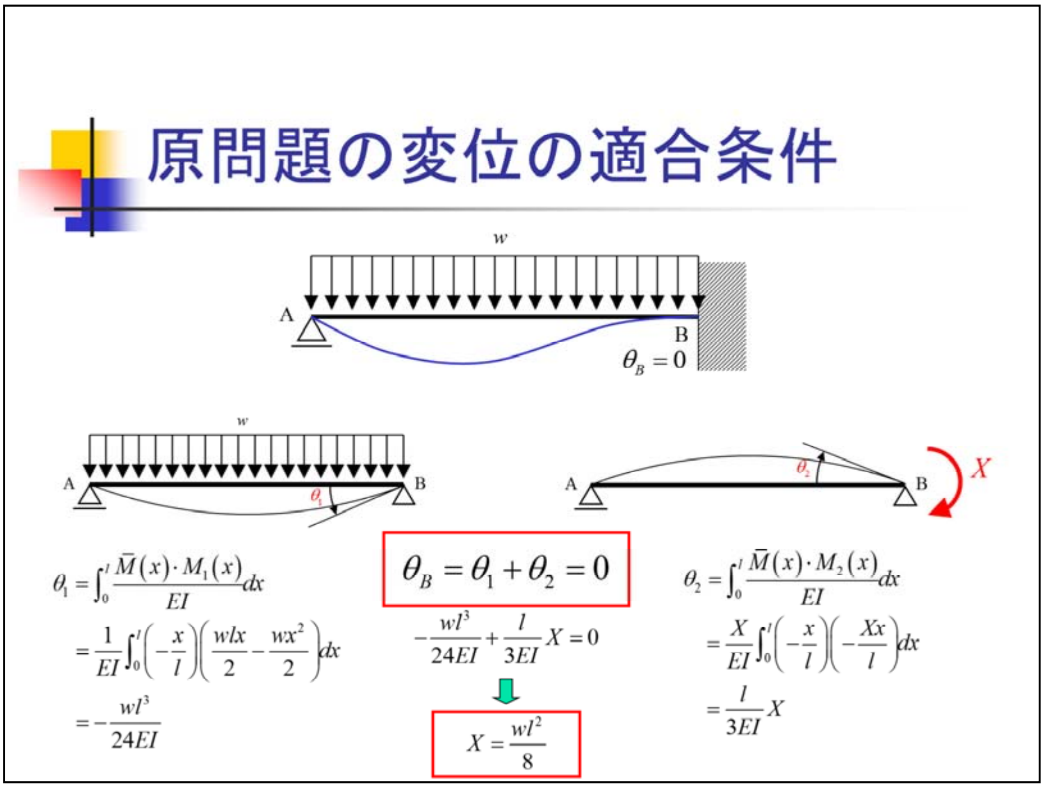
そして，それぞれの問題のB点の回転角を仮想仕事法によって求めます。

仮想仕事法で回転角を求めるには，それぞれの問題に対して，B点に単位の大きさ1のモーメントを加える問題を定義する必要があります。

次に，それぞれの問題について，曲げモーメントの関数を求めます。



そうすると，２つの問題のB点の回転角θ1とθ2を仮想仕事法によって，ここに示すような式で求めることができます。

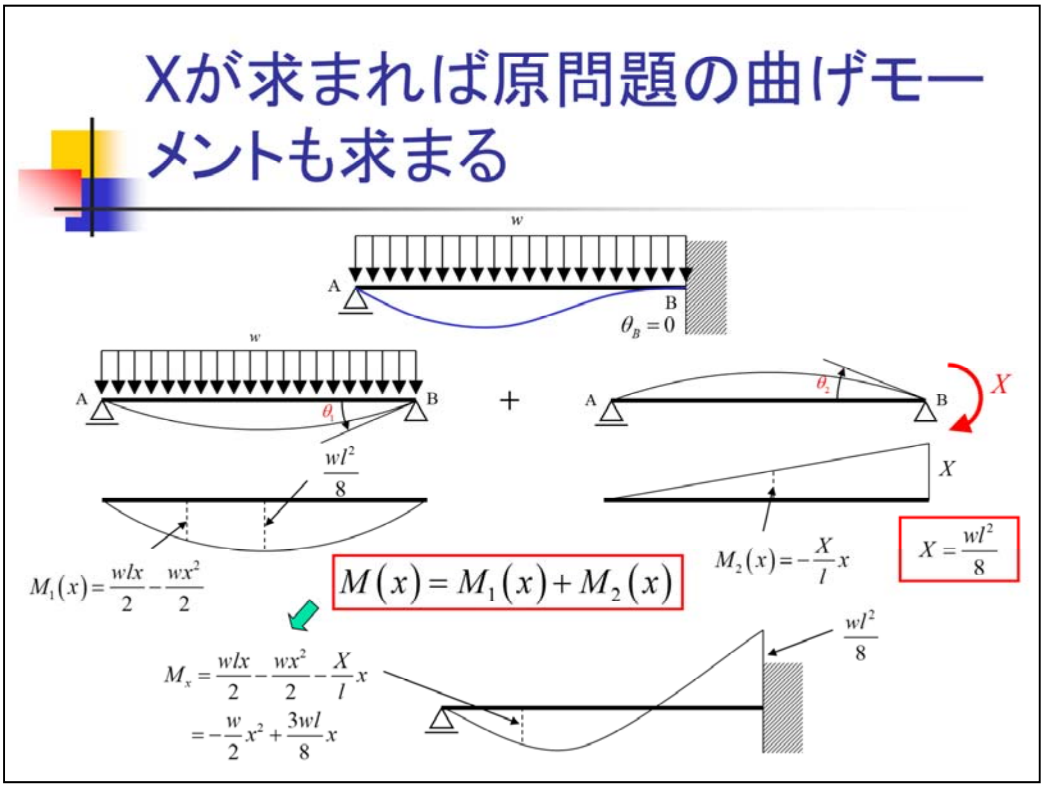


それぞれの仮想仕事式に，曲げモーメント関数を代入すると，θ1とθ2を求めることができます。

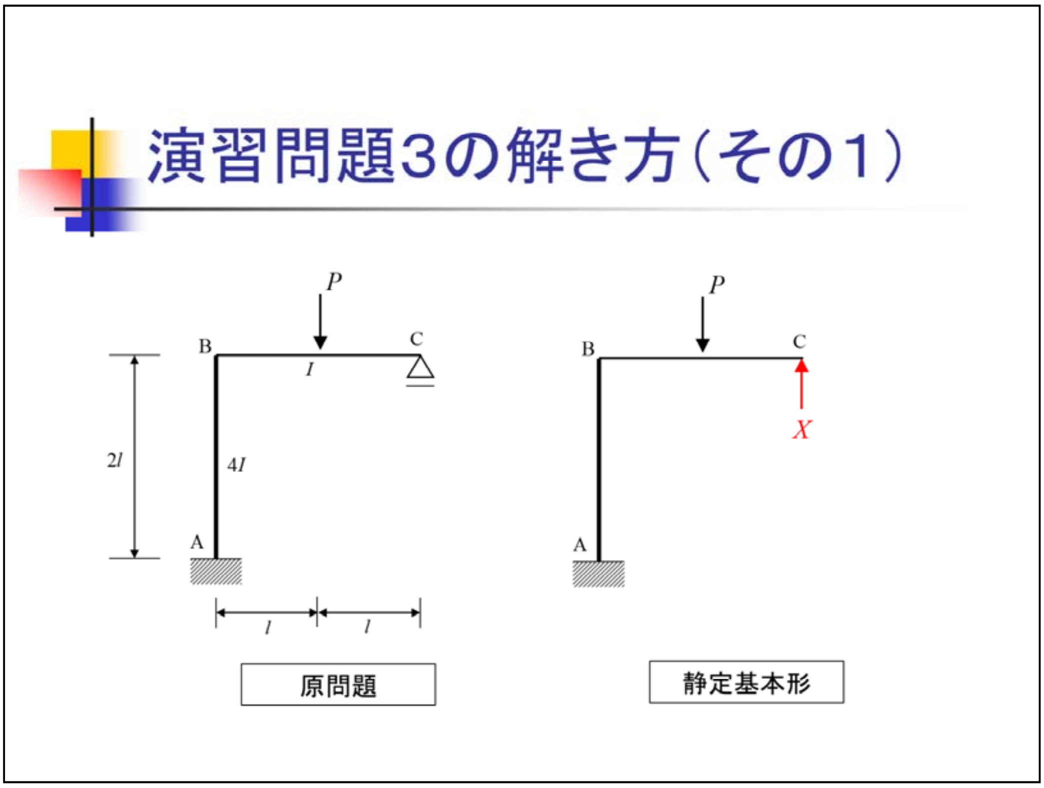
この時，再度，原問題を考えてみると，B点の回転角は0になっている必要があります。

したがって，θ1とθ2を加えたものは0になる必要があります。

この式から，不静定力Xを求めることができます。

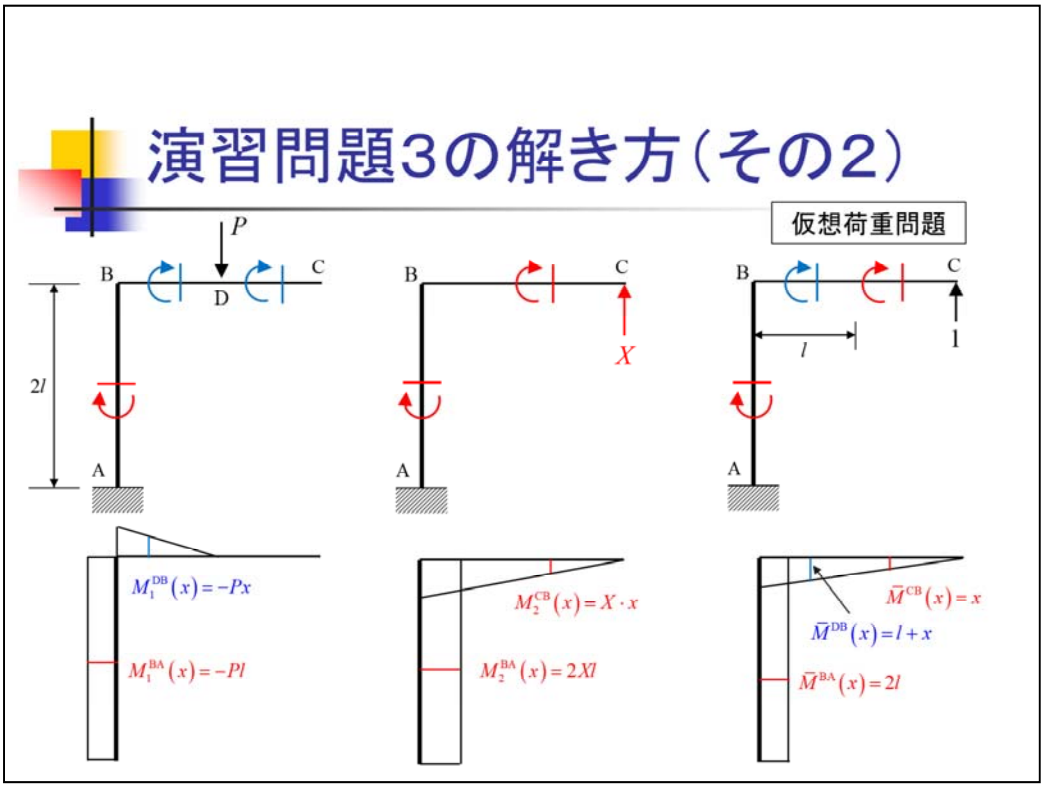


最後に，原問題の曲げモーメント関数M(x)は，M1(x)とM2(x)を加えたものになりますから，これから不静定骨組の曲げモーメント図を描くことができます。



次に、演習問題3を例にラーメン問題の解き方を説明します。

まず、静定基本形として、C点のローラーを除き、その反力を不静定力Xとする場合を考えます。



まず、静定基本形を外力が加わる問題と不静定力が加わる問題に分離し、それぞれの曲げモーメント関数を求めます。

この場合の断面を切る位置と曲げモーメント関数の定義に注意してください。

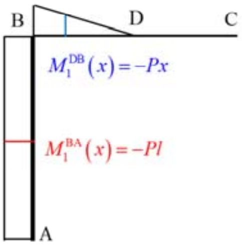
（これらの定義は、外力が加わる問題、不静定力が加わる問題、仮想荷重問題で統一する必要があります。）

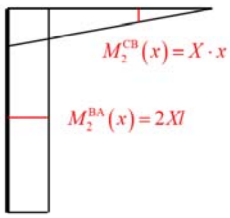
そして、C点の鉛直変位を求めるために、C点の鉛直方向に仮想荷重1を加えた仮想荷重問題を定義します。

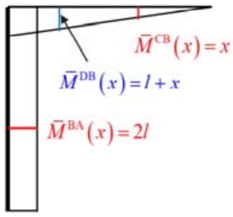
そして、仮想荷重問題の曲げモーメント関数を求めます。

ただし、Pが加わる問題では、CD間とDB間で曲げモーメント関数が異なるため、仮想荷重問題においても、DB間の曲げモーメント関数を別に求めておきます。

演習問題3の解き方（その3）







$$
\begin{aligned}
1 \cdot \delta_{\mathrm{C1}} &= \int_0^{l} \frac{\bar{M}^{\mathrm{DB}}(x) M_1^{\mathrm{DB}}(x)}{EI} dx \\
&\quad + \int_0^{2l} \frac{\bar{M}^{\mathrm{BA}}(x) M_1^{\mathrm{BA}}(x)}{4EI} dx \\
&= -\frac{P}{EI} \int_0^{l} x(l+x)\, dx - \frac{2Pl^2}{4EI} \int_0^{2l} dx \\
&= -\frac{P}{EI} \left[\frac{x^2 l}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^{l} - \frac{Pl^3}{EI} = -\frac{11Pl^3}{6EI}
\end{aligned}
$$

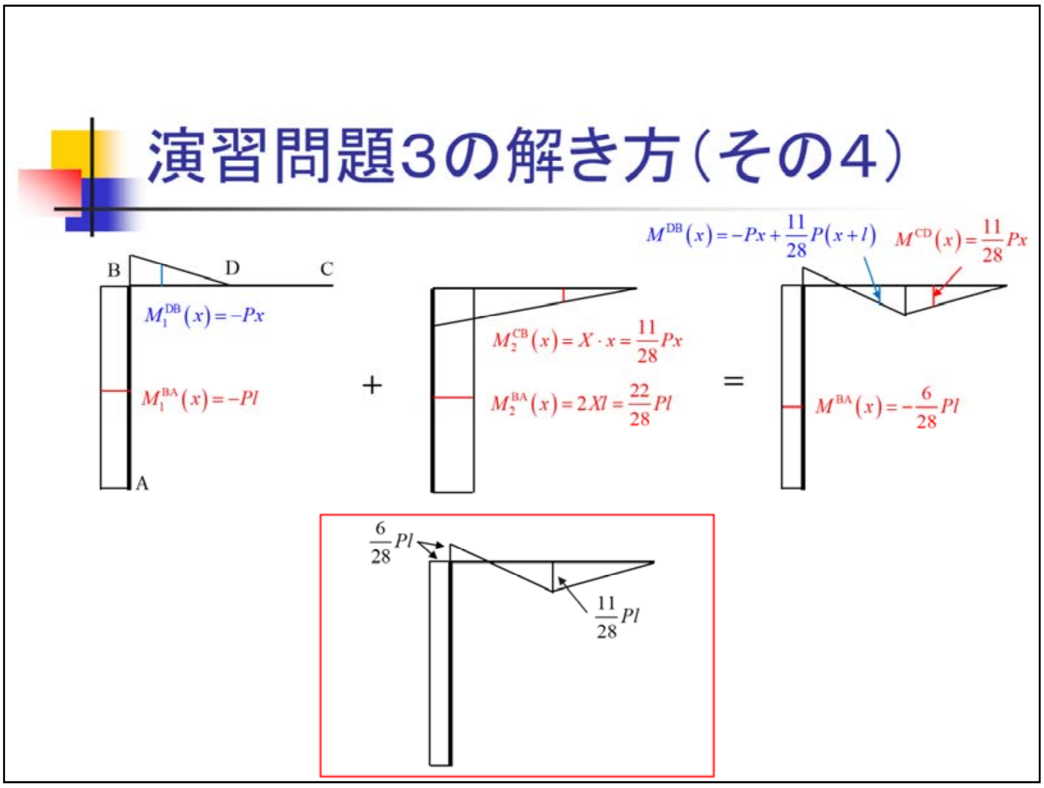
$$
\begin{aligned}
1 \cdot \delta_{\mathrm{C2}} &= \int_0^{2l} \frac{\bar{M}^{\mathrm{CB}}(x) M_2^{\mathrm{CB}}(x)}{EI} dx \\
&\quad + \int_0^{2l} \frac{\bar{M}^{\mathrm{BA}}(x) M_2^{\mathrm{BA}}(x)}{4EI} dx \\
&= \frac{X}{EI} \int_0^{2l} x^2\, dx + \frac{4Xl^2}{4EI} \int_0^{2l} dx \\
&= \frac{X}{EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2l} + \frac{2Xl^3}{EI} = \frac{14Xl^3}{3EI}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{C}} &= \delta_{\mathrm{C1}} + \delta_{\mathrm{C2}} \\
&= -\frac{11Pl^3}{6} + \frac{14Xl^3}{3EI} = 0 \\
\Rightarrow\ & X = \frac{11}{28} P
\end{aligned}
$$

次に、外力が加わる問題と仮想荷重問題の仮想仕事式により、C点の鉛直変位δC1を求めます。

次に、不静定力が加わる問題と仮想荷重問題の仮想仕事式により、C点の鉛直変位δC2を求めます。

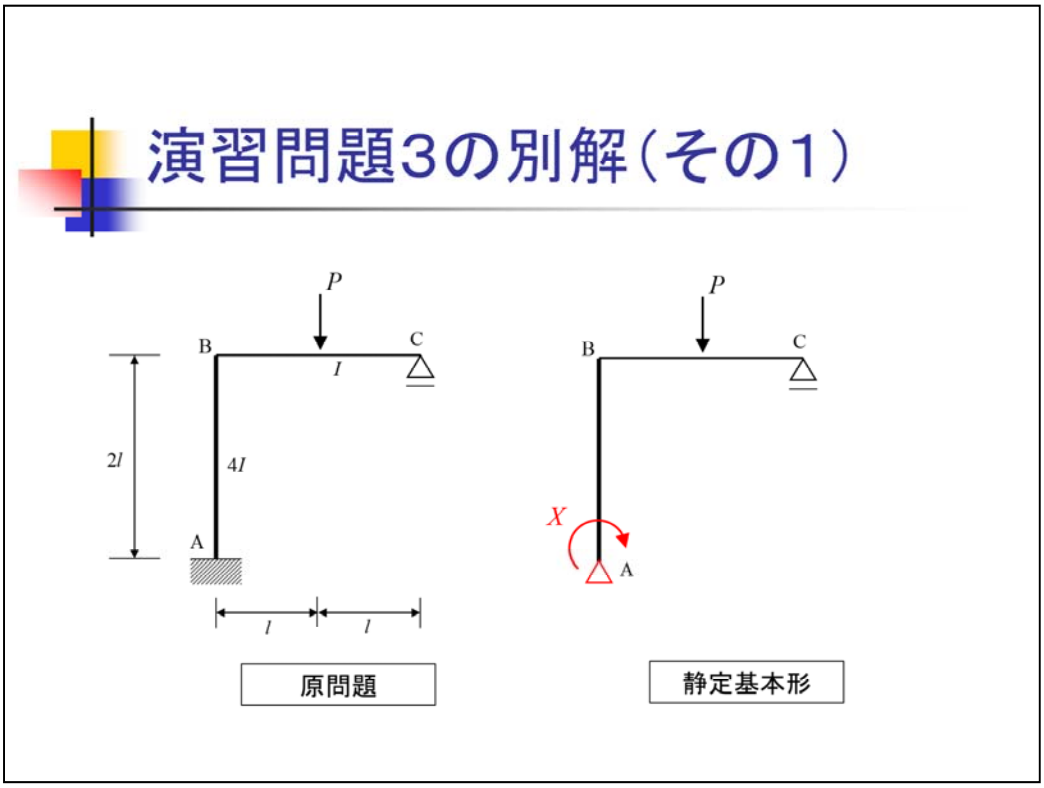
そして、実際のC点の鉛直変位は、δC1＋δC2ですから、これが0となる条件から不静定力Xを導きます。



次に、不静定力のみが作用する問題の不静定力Xに先ほど求めたXを代入し、M1とM2を加えると、実際の曲げモーメント関数が求められます。

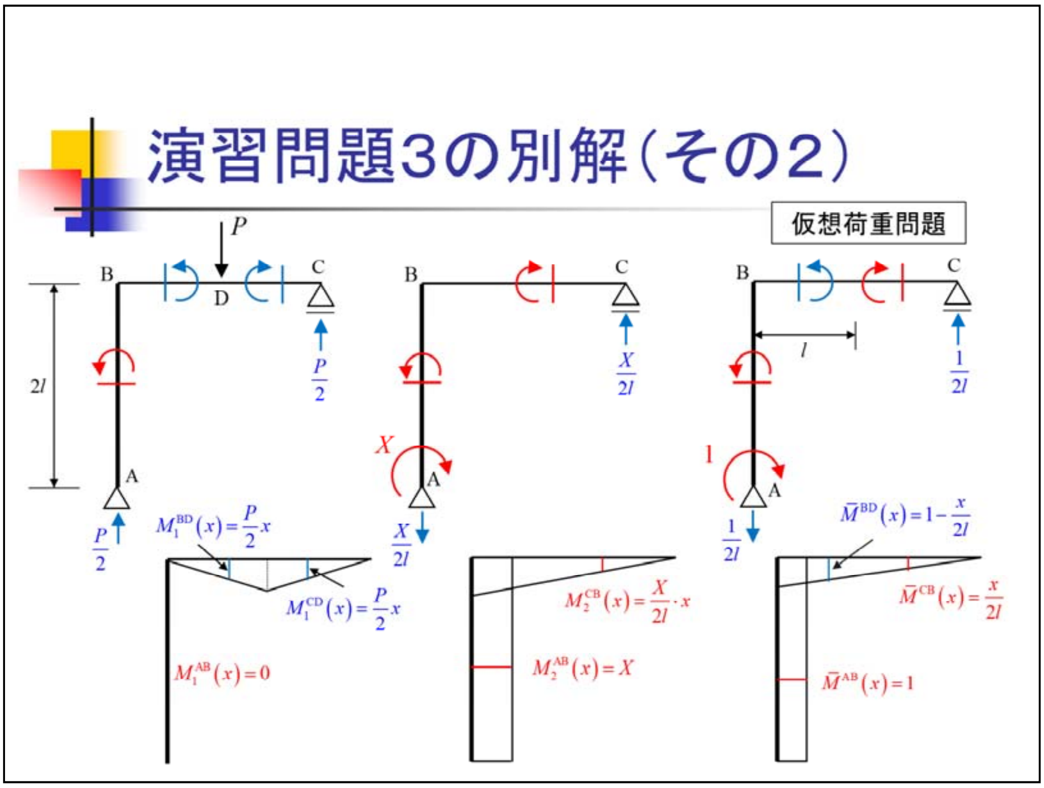
これをもとに、曲げモーメント図を描けば赤枠のような答えが得られます。

なお、DB間の曲げモーメント関数は無理に求めなくても、B点の曲げモーメントの値をM1とM2から計算すれば、曲げモーメント図を描くことができます。



次に、別解として、A点を固定端からピン支持にする静定基本形の解法を示します。

この場合、A点の曲げモーメント反力を不静定力Xとして、A点の回転角が0になるという条件から不静定力Xを求める問題になります。



先ほどと同様に、外力が加わる問題と不静定力が加わる問題を分離して、それぞれの曲げモーメント関数を求めます。

この場合の断面を切る位置と曲げモーメント関数の定義に注意してください。

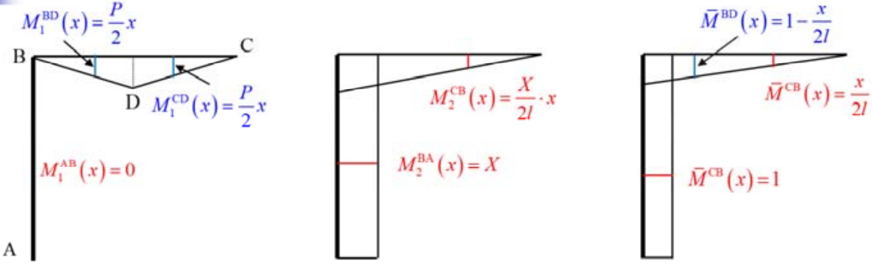
（これらの定義は、外力が加わる問題、不静定力が加わる問題、仮想荷重問題で統一する必要があります。）

次に、A点の回転角を求めるために、A点に1の大きさのモーメントを加える仮想荷重問題を定義します。

そして、この仮想荷重問題についても、曲げモーメント関数を求めます。

なお、この場合も、Pが加わる問題では、CD間とBD間で曲げモーメント関数が異なるため、仮想荷重問題においてもBD間の曲げモーメント関数を別に求めておく必要があります。

演習問題3の別解（その3）



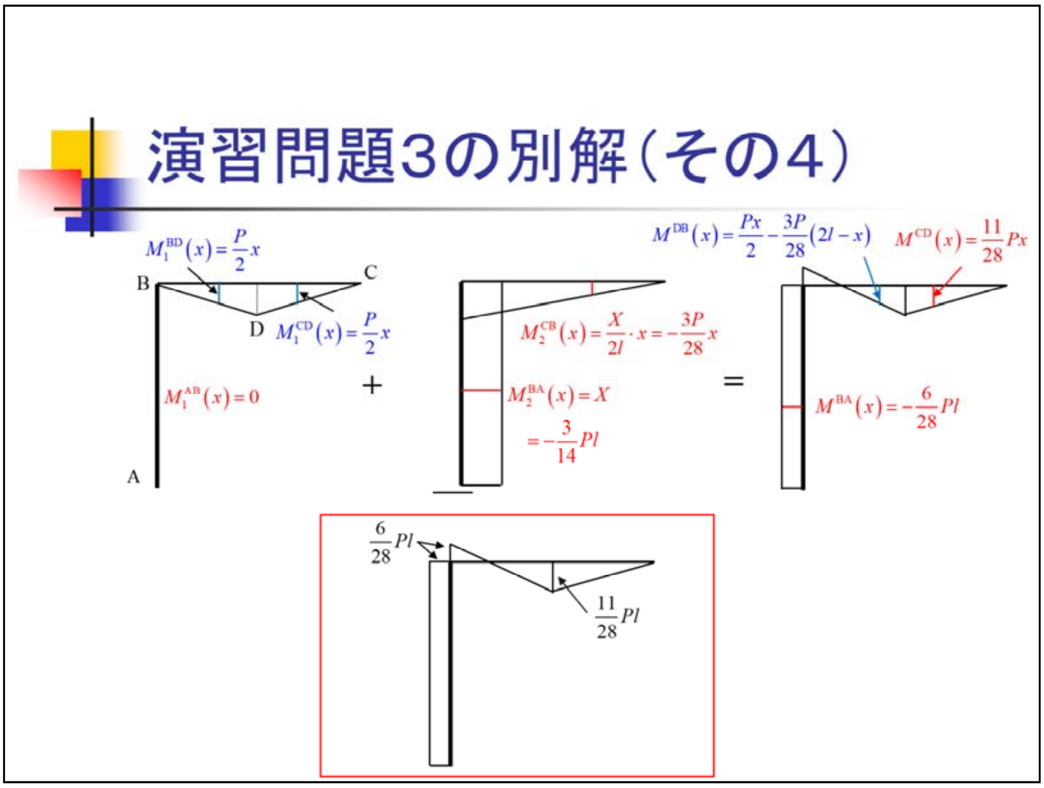
$$
\begin{aligned}
1\cdot\theta_{\mathrm{A1}} &= \int_0^l \frac{\bar{M}^{\mathrm{BD}}(x)M_1^{\mathrm{BD}}(x)}{EI}dx + \int_0^l \frac{\bar{M}^{\mathrm{CD}}(x)M_1^{\mathrm{CD}}(x)}{EI}dx \\
&= \frac{P}{2EI}\int_0^l x\left(1-\frac{x}{2l}\right)dx + \frac{P}{2EI}\int_0^l x\cdot\frac{x}{2l}dx \\
&= \frac{P}{2EI}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6l}\right]_0^l + \frac{P}{2EI}\left[\frac{x^3}{6l}\right]_0^l = \frac{3Pl^2}{12EI}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1\cdot\theta_{\mathrm{A2}} &= \int_0^{2l} \frac{\bar{M}^{\mathrm{CB}}(x)M_1^{\mathrm{CB}}(x)}{EI}dx + \int_0^{2l} \frac{\bar{M}^{\mathrm{AB}}(x)M_1^{\mathrm{AB}}(x)}{EI}dx \\
&= \frac{X}{EI}\int_0^{2l}\left(\frac{x}{2l}\right)\left(\frac{x}{2l}\right)dx + \frac{X}{4EI}\int_0^{2l}1\cdot 1dx \\
&= \frac{X}{4EIl^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2l} + \frac{2Xl}{4EI} = \frac{7Xl}{6EI}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_{\mathrm{A}} &= \theta_{\mathrm{A1}}+\theta_{\mathrm{A2}} \\
&= \frac{3Pl^2}{12EI}+\frac{7Xl}{6EI}=0 \\
&\Rightarrow X=-\frac{3}{14}Pl
\end{aligned}
$$

次に、外力Pが加わる問題と、不静定力が作用する問題のAの回転角を仮想仕事式によって求めます。

そして、θAが0となる条件から、不静定力Xを導きます。



最後に、不静定力が加わる問題の曲げモーメント関数に先ほど求めた不静定力Xを代入し、外力が加わる問題と不静定力が加わる問題の曲げモーメント関数を加えると原問題の曲げモーメント関数が求まります。

これをもとに曲げモーメント図を描くと、先ほどと同じ曲げモーメント図が求まります。

なお、この場合も、DB間の曲げモーメント関数は求めなくても、B点の曲げモーメントを求めれば、曲げモーメント図を描くことができます。